Santiago Álvarez Areces • Manuel Fernández Flórez

2000 PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

PROBLEMAS PROPUESTOS
Y RESUELTOS PARA:
EDUCACIÓN SECUNDARIA
Y BACHILLERATO.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

...CIOS PROPUESTOS.
...CIÓN DE LOS
...CIOS.

EVEREST

Santiago Álvarez Areces - Manuel Fernández Flórez

2000 PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Problemas propuestos y resueltos para: E. Secundaria y Bachillerato

EDITORIAL EVEREST, S. A.

Madrid • León • Barcelona • Sevilla • Granada • Valencia
Zaragoza • Las Palmas de Gran Canaria • La Coruña
Palma de Mallorca • Alicante • México • Lisboa

BLOQUES DE CONTENIDO:

- Problemas de variaciones, permutaciones, combinaciones y binomio de Newton.
- Ejercicios de operaciones con potencias, operaciones con radicales, operaciones con polinomios, operaciones con fracciones algebraicas y Regla de Ruffini.
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Resolución de inecuaciones de primer y segundo grado. Resolución de sistemas de ecuaciones. Problemas de aplicación. Representación de funciones de primer y segundo grado.
- Problemas de progresiones aritméticas y geométricas.
- Problemas sobre vectores, dependencia e independencia lineal. Problemas en el plano afín, incidencia y paralelismo. Producto escalar. Plano Euclídeo.
- Problemas de límites de sucesiones. Problemas de límites relacionados con el número e. Problemas de límites de funciones. Problemas sobre continuidad de funciones.
- Problemas de trigonometría. Resolución de ecuaciones trigonométricas. Resolución de triángulos. Problemas de aplicación. Operaciones con números complejos.
- Problemas sobre la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.
- Ejercicios sobre el cálculo de derivadas y diferenciales. Cálculo de máximos y mínimos. Problemas de aplicación. Estudio y representación gráfica de funciones.
- Cálculo de integrales indefinidas.
- Cálculo de integrales definidas. Aplicaciones al cálculo de áreas, volúmenes y longitudes de curvas.
- Problemas sobre espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal y cambios de base. Problemas sobre subespacios vectoriales. Cálculo y aplicación de determinantes. Resolución de sistemas por Cramer.
- Ejercicios sobre aplicaciones lineales y cálculo matricial. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Rouché.
- Problemas del producto escalar, vectorial y mixto en R^3. Problemas en los espacios afín y Euclídeo.
- Problemas de probabilidades.
- Cálculo de límites por la regla de L'Hôpital. Desarrollos en serie por la fórmula de Tay [illegible] s de aplicaciones

Índice

TERCERA EDICIÓN

Carretera León-La Coruña, km 5 - LEÓN
ISBN: 84-241-7605-7
Depósito legal: LE. 402-2001
Printed in Spain - Impreso en España

EDITORIAL EVERGRÁFICAS, S. L.
Carretera León-La Coruña, km 5
LEÓN (España)

Bloque 1

- Variaciones
- Permutaciones
- Combinaciones
- Potencias de binomios y polinomios

VARIACIONES

Definición

Se llaman variaciones sin repetición de m *elementos tomados de* n *en* n, *a las distintas alineaciones que se pueden formar con los* m *elementos dados, de modo que en cada alineación entren* n *de los* m *elementos.*

Dos alineaciones se consideran distintas cuando difieren en algún elemento, o cuando, teniendo los mismos elementos, éstos están ordenados de distinta forma.

Para representar las variaciones sin repetición de m *elementos tomados de* n *en* n *se emplea la notación:*

$$V_{m,n} = m\,(m-1)\,(m-2)\,....\,(m-n+2)\,(m-n+1)$$

Variaciones con repetición

Se representan por la notación:

$$VR_{m,n} = m^n$$

PERMUTACIONES

Definición

Se llaman permutaciones sin repetición de m *elementos de un conjunto a las distintas alineaciones que se pueden hacer con los* m *elementos dados de modo que en cada alineación entren todos los* m *elementos del conjunto.*

Dos alineaciones son distintas, cuando sus elementos están ordenados de distinta forma.

Para representar las permutaciones sin repetición de m *elementos se emplea la notación:*

$$P_m = m! = m\,(m-1)\,(m-2)\,...\,3\cdot 2\cdot 1$$

Permutaciones con repetición

Se representan por la notación:

$$P_m^{\alpha,\beta,\gamma...} = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!...} \quad \text{siendo } m = \alpha + \beta + \gamma + ...$$

COMBINACIONES

Definición

Se llaman combinaciones sin repetición de m *elementos tomados de* n *en* n, *a los distintos grupos que se pueden formar con los* m *elementos dados, de modo que en cada grupo entren* n *de los* m *elementos, y que un grupo se diferencie de los demás, al menos, en un elemento.*

Para designar las combinaciones de m *elementos tomados de* n *en* n *se emplea la notación:*

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Números combinatorios

Los números de la forma $\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$ *se llaman números combinatorios y se representan por el símbolo* $\binom{m}{n}$, *por tanto:*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = C_{m,n}$$

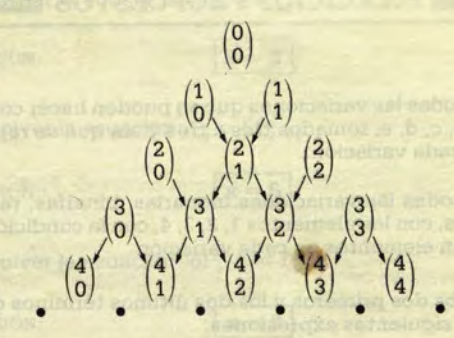
Propiedades de los números combinatorios

I) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

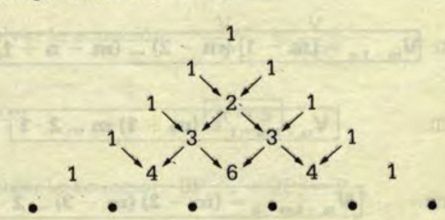
II) $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

NOTA: $0! = 1$; $1! = 1$; $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

Triángulo de Tartaglia



Es lo mismo que escribir:



Combinaciones con repetición

Se representan por la notación:

$$CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}$$

POTENCIAS DE BINOMIOS Y POLINOMIOS

La inducción matemática

Es un método para demostrar la validez de ciertas fórmulas referentes sobre todo a los números naturales.

Este método consta de dos partes y ambas son necesarias para probar la validez de la fórmula o teorema:

I) Comprobar que es cierto para $n = 1$

II) Admitiendo que es cierto para un valor $n = m$, comprobar que lo es también para el valor siguiente $n = m + 1$

Potencia de un binomio (Binomio de Newton)

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + ... + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m$$

siendo $m \in N$

Desarrollo de $(a-b)^m$

$$(a-b)^m = \binom{m}{0}a^m - \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 - ... + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}ab^{m-1} + (-1)^m\binom{m}{m}b^m$$

Término general

Es el que ocupa el lugar $n + 1$:

$$T_{n+1} = (-1)^n\binom{m}{n}a^{m-n}b^n \text{ de } (a-b)^m$$

$$T_{n+1} = \binom{m}{n}a^{m-n}b^n \text{ de } (a+b)^m$$

Cuadrado de un polinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Potencia de un polinomio

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Formar todas las variaciones que se pueden hacer con los elementos a, b, c, d, e, tomados tres a tres y sin que se repitan elementos en cada variación.

2. Formar todas las variaciones monarias, binarias, ternarias y cuaternarias, con los elementos 1, 2, 3, 4, con la condición de que no se repitan elementos en cada variación.

3. Escribe los dos primeros y los dos últimos términos del desarrollo de las siguientes expresiones:

I) $V_{m-1,n}$ II) $V_{m+1,m+1}$ III) $V_{m-2,m-2}$

SOLUCIÓN I): $\mathbf{V_{m-1,n} = (m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}$

SOLUCIÓN II): $\mathbf{V_{m+1,m+1} = (m+1)\,m \ldots 2 \cdot 1}$

SOLUCIÓN III): $\mathbf{V_{m-2,m-2} = (m-2)(m-3)\ldots 2 \cdot 1}$

4. Resolver la ecuación: $V_{x,5} = 6V_{x,3}$

SOLUCIÓN: **x = 6**

5. Resolver la ecuación $8V_{m,4} = V_{m,5}$

SOLUCIÓN: **m = 12**

6. Resolver la ecuación: $2V_{x-1,3} = V_{x,3} + V_{x-1,2}$

SOLUCIÓN: **x = 7**

7. ¿Cuántos elementos tiene un conjunto si se sabe que el número de variaciones ternarias que se pueden formar con ellos es nueve veces mayor que el de las binarias?

SOLUCIÓN: **m = 11**

8. Resolver la ecuación: $32V_{x,3} = 21VR_{x,3}$

SOLUCIÓN: **x = 8**

9. Resolver la ecuación: $VR_{x,2} - V_{x,2} = 12$

SOLUCIÓN: **x = 12**

10. Resolver la ecuación: $5V_{m,3} = 24VR_{m-1,2}$

SOLUCIÓN: **m = 6**

11. Resolver la ecuación: $V_{x+1,2} + 2V_{x-1,2} = 82$

SOLUCIÓN: **x = 6**

12. ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras pueden formarse con las letras a, b, c, d, e, teniendo que ser la primera letra una vocal?

SOLUCIÓN: **S = 24**

13. Hallar el valor de *m* sabiendo que el número de variaciones que se pueden formar con estos *m* elementos (distintos) tomados dos a dos es 2 756.

SOLUCIÓN: **m = 53**

14. ¿Cuántos números diferentes y menores que 1 000 se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 sin repetición?

SOLUCIÓN: **S = 85**

15. ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras no repetidas pueden formarse con los guarismos 2, 4, 5, 7 y 8 con la condición de ser menores que 5 000?

SOLUCIÓN: **S = 48**

16. ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras diferentes pueden formarse con los guarismos 0, 2, 4, 5, 6 y 8?

SOLUCIÓN: **S = 300**

17. Entre doce miembros de una comisión, deben elegirse presidente, vicepresidente y secretario. ¿De cuántas maneras podrá hacerse?

SOLUCIÓN: **S = 1 320**

18. Averiguar cuántos números hay que, siendo mayores que 200 y menores que 700, estén formados por tres cifras diferentes entre las siete primeras cifras significativas.

SOLUCIÓN: **S = 150**

19. ¿De cuántas formas se pueden colocar dos sortijas diferentes en una mano de modo que no estén en el mismo dedo?

SOLUCIÓN: **S = 20**

20. Averiguar cuántos números de cuatro cifras distintas pueden formarse con los guarismos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Cuántos de ellos empiezan por 5?

SOLUCIÓN: **S = 360 ; 60**

21. El número de variaciones quinarias de *m* elementos es 154 440 y el de ternarias 1 716. Halla *m*.

SOLUCIÓN: **m = 13**

22. ¿Cuántas palabras se pueden formar con 20 consonantes y las 5 vocales, de manera que cada palabra contenga 3 consonantes y 2 vocales, con la condición de que las vocales ocupen solamente el segundo y cuarto puesto y sin que haya letras repetidas en cada palabra?

SOLUCIÓN: **S = 136 800**

23. ¿Cuántas palabras de 2 vocales y 2 consonantes se pueden formar, tomando éstas entre un grupo de 5 vocales y 4 consonantes, con la condición de que no haya en cada palabra 2 consonantes seguidas?

SOLUCIÓN: **S = 720**

24. Hallar cuántos números, que no empiecen por cero, y tengan cuatro cifras, podemos formar con los guarismos 0, 1, 2, 3 y 4.

SOLUCIÓN: **S = 500**

25. ¿Cuántas quinielas tenemos que rellenar para acertar un pleno en una jornada?

SOLUCIÓN: **S = 4 782 969**

26. ¿Cuántos números de siete cifras iguales o diferentes se pueden formar con los guarismos 1, 4, 5, 7 y 9? ¿Cuántos números de siete cifras terminan en 7?

SOLUCIÓN: **S = 78 125 ; 15 625**

27. Con los guarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6:

a) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse, con la condición de que no se repitan las cifras en cada número?
b) ¿Cuántos de estos números son menores que 400?
c) ¿Cuántos son pares?
d) ¿Cuántos son impares?
e) ¿Cuántos son múltiplos de 4?
f) ¿Cuántos son múltiplos de 5?

SOLUCIÓN: **S = a) 120 ; b) 60 ; c) 60 ; d) 60 ; e) 32 ; f) 20**

28. a) ¿Cuántos números de cinco cifras, distintas o repetidas, pueden formarse con los guarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?
b) ¿Cuántos de dichos números comienzan por 50?
c) ¿Cuántos de dichos números son pares?
d) ¿Cuántos son divisibles por 5?

SOLUCIÓN: **S = a) 90 000 ; b) 1 000 ; c) 45 000 ; d) 18 000**

29. Con los guarismos 1, 2, 3, 4, 5 ¿cuántos números de cuatro cifras pueden formarse? Hallar la suma de todos ellos.

SOLUCIÓN: **S = 625 ; Suma = 2 083 125**

30. a) Cuántos números de cuatro cifras distintas pueden formarse con los guarismos 1, 2, 4, 5 y 7?
b) ¿Cuántos de estos números son pares?
c) ¿Cuántos terminan en 24?
d) ¿Cuántos son múltiplos de 25?
e) ¿Cuántos empiezan por 245?
f) ¿Cuánto suman todos ellos?

SOLUCIÓN:

S = a) 120 ; b) 48 ; c) 6 ; d) 6 ; e) 2 ; f) 506 616

31. ¿De cuántos modos pueden colocarse 5 libros distintos en una fila de un estante?

SOLUCIÓN: **S = 120**

32. Resolver la ecuación: $P_x = 56P_{(x-2)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 8}$

33. Resolver la ecuación: $\frac{x!}{(x-3)!} = 720$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 10}$

34. Resolver la ecuación $P_x = 24$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 4}$

35. Resolver la ecuación: $\frac{1}{6} P_x = V_{6,4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 6}$

36. Resolver la ecuación: $3P_x = V_{3,2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 2}$

37. Resolver la ecuación: $P_x = 5P_{x-1}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 5}$

38. Resolver la ecuación: $6P_{x-2} = P_x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 3}$

39. Resolver la ecuación: $\frac{V_{x,2}}{P_2} = \frac{V_{x,3}}{P_3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 5}$

40. Resolver la ecuación: $8P_{x-1} + 3P_x = P_{x+1}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 4}$

41. ¿Cuántos números de 5 cifras distintos pueden formarse con los guarismos 1, 2, 3, 4 y 5 que sean menores que 54 000, no pudiéndose repetir ningún guarismo?

SOLUCIÓN: **S = 114**

42. ¿De cuántas maneras diferentes se puede escribir el monomio $x^1y^2z^3$, teniendo en cuenta el orden de colocación de las letras y de los exponentes?

SOLUCIÓN: **S = 36**

43. Con 2 vocales y 3 consonantes distintas, ¿cuántas palabras de 5 letras no repetidas pueden formarse con la condición de que no figuren 2 consonantes seguidas?

SOLUCIÓN: **S = 12**

44. Con 2 vocales y 3 consonantes distintas, ¿cuántas palabras de 5 letras no repetidas pueden formarse con la condición de que no figuren 2 vocales seguidas ni 3 consonantes seguidas?

SOLUCIÓN: **S = 60**

45. Con 3 vocales y 3 consonantes distintas, ¿cuántas palabras de 6 letras pueden formarse con la condición de que no figuren 2 vocales seguidas ni 2 consonantes seguidas?

SOLUCIÓN: **S = 72**

46. Con las letras de la palabra SUMAR, ¿cuántas permutaciones pueden hacerse? ¿Cuántas empiezan por consonante?

SOLUCIÓN: **S = 120 y 72**

47. Con las letras de la palabra ELOISA, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse que empiecen y terminen en consonante? ¿Cuántas que empiecen y terminen en vocal?

SOLUCIÓN: **S = 48 y 288**

48. Con las letras de la palabra SAJON, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse en las que aparezca la J en medio? ¿Cuántas que empiecen y terminen en consonante?

SOLUCIÓN: **S = 24 y 36**

49. Con los guarismos 1, 2, 3, 4, 5 y 6:
a) ¿Cuántos números distintos, de seis cifras distintas, pueden formarse sin repetirse ningún guarismo?
b) ¿Cuántos son múltiplos de 2?
c) ¿Cuántos son impares?
d) ¿Cuántos son múltiplos de 5?

SOLUCIÓN: **S = a) 720 ; b) 360 ; c) 360 ; d) 120**

50. Supuestos ordenados en sucesión creciente todas las permutaciones posibles de las cifras 1, 2, 3, 5, 8, 9, ¿qué lugar ocuparía en la sucesión el número 598 132?

SOLUCIÓN: **S = 476**

51. Colocadas en orden alfabético todas las permutaciones de abcdefg, se desea saber el lugar que ocupa la permutación cgadbef.

SOLUCIÓN: **S = 2 047**

52. Con las cifras 0, 1, 2, 3, 4:
a) ¿Cuántos números distintos de cinco cifras se pueden formar?
b) ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

SOLUCIÓN: **S = a) 96 ; b) 2 599 980**

53. a) Hallar el número de permutaciones que se pueden formar con las letras de la palabra CAÑADA.
b) ¿Cuántas empiezan y terminan en A?
c) ¿Cuántas tienen las tres vocales juntas?
d) ¿Cuántas empiezan por C y terminan en A?

SOLUCIÓN: **S = a) 120 ; b) 24 ; c) 24 ; d) 12**

54. Resolver la ecuación: $3P_x^{x-3,3} = 6P_x^{x-2,2}$

SOLUCIÓN: **x = 8**

55. ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar entrando dos veces la cifra 0, dos veces la cifra 1 y tres veces la cifra 2?

SOLUCIÓN: **S = 150**

56. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de la palabra MATEMÁTICAS? ¿Cuántas empiezan y terminan en A?

SOLUCIÓN: **S = 1 663 200 ; 90 720**

57. a) ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de la palabra SALAMANCA?
b) ¿Cuántas empiezan por S?
c) ¿Cuántas empiezan por A?
d) ¿Cuántas empiezan y acaban en A?
e) ¿Cuántas tienen las cuatro A juntas?

SOLUCIÓN:
S = a) 15 120 ; b) 1 680 ; c) 6 720 ; d) 2 520 ; e) 720

58. ¿Cuántos números se pueden escribir con las cifras 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, que sean mayores que un millón?

SOLUCIÓN: **S = 200**

59. Un estante tiene 4 textos iguales de Matemáticas, 3 iguales de Química y 5 de Física, también iguales:
a) ¿Cuántas posiciones distintas pueden ocupar?
b) ¿Cuántas de ellas tienen los 4 de Matemáticas al final?
c) ¿Cuántas de ellas tienen uno de Química al principio y uno de Física al final?
d) ¿Cuántas tienen dos libros de Matemáticas en los extremos?

SOLUCIÓN: **S = a) 27 720 ; b) 56 ; c) 3 150 ; d) 56**

60. Formar todas las combinaciones ordinarias que se pueden hacer con los elementos a, b, c, d, e.

61. Calcula el valor de *m* sabiendo que:

I) $C_{m,2} = 36$ II) $C_{m,3} = 7m$ III) $3C_{m,3} = C_{m,4}$

SOLUCIÓN I): **m = 9**

SOLUCIÓN II): **m = 8**

SOLUCIÓN III): **m = 15**

62. Resolver la ecuación: $2C_{x,3} = V_{x,2}$

SOLUCIÓN: **x = 5**

63. Resolver la ecuación: $C_{x,3} = 40\,(x - 2)$

SOLUCIÓN: **x = 16**

64. Resolver la ecuación: $4CR_{x,2} = V_{x,3}$

SOLUCIÓN: **x = 5**

65. Hallar *m* y *n* sabiendo que: $V_{m,n} = 20$ y $C_{m,n} = 10$

SOLUCIÓN: **m = 5** ; **n = 2**

66. Hallar *x* sabiendo que el número de combinaciones binarias de *x* elementos son 190.

SOLUCIÓN: **x = 20**

67. Averiguar cuántos objetos son necesarios para formar con ellos 28 combinaciones binarias con repetición.

SOLUCIÓN: **m = 7**

68. El número de variaciones de *m* objetos, tomados de 4 en 4 es 20 veces mayor que el de combinaciones de esos elementos tomados de 5 en 5. Hallar *m*.

SOLUCIÓN: **m = 10**

69. Sabiendo que en cada ficha del dominó aparecen dos números del 0 al 6, incluidos ambos, determinar cuántas fichas tiene un dominó.

SOLUCIÓN: **m = 28**

70. Hallar el número de productos de tres factores que se pueden formar con los guarismos 2, 5, 8, 11 y 13 (sin repetirse).

SOLUCIÓN: **S = 10**

71. ¿Cuántas sumas diferentes de tres sumandos pueden formarse con los guarismos 3, 15, 21, 39, 47, 92?

SOLUCIÓN: **S = 20**

72. ¿Cuántos triángulos quedan determinados por diez puntos, tales que tres cualesquiera no estén alineados?

SOLUCIÓN: **S = 120**

73. ¿Cuántas líneas de navegación aérea pueden establecerse entre las capitales de 10 naciones?

SOLUCIÓN: **S = 45**

74. Con seis pesas de 1, 2, 3, 4, 7 y 9 kg, ¿cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse, tomándolas de 3 en 3?

SOLUCIÓN: **S = 20**

75. Con seis pesas de 1, 2, 3, 7, 10 y 25 kg, ¿cuántas pesadas diferentes pueden hacerse?

SOLUCIÓN: **S = 63**

76. ¿Cuántas palabras que contengan 2 vocales y 3 consonantes pueden formarse con 5 vocales y 6 consonantes?

SOLUCIÓN: **S = 24 000**

77. En una clase de 18 alumnos se desea formar un grupo de 4 para competir en un concurso. ¿Cuántos grupos distintos se pueden formar? ¿En cuántos de dichos grupos entra un determinado alumno? ¿En cuántos de ellos no entra dicho alumno?

SOLUCIÓN: **S = 3 060 ; 680 ; 2 380**

78. En un poste de señales luminosas hay 5 focos de distinto color. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse encendiendo menos de cuatro luces?

SOLUCIÓN: **S = 25**

79. Con 5 factores positivos y 5 negativos, ¿cuántos productos negativos, de 5 factores distintos cada uno, podremos hacer?

SOLUCIÓN: **S = 126**

80. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir 4 juguetes distintos entre 3 niños sin que sobren juguetes, y ningún niño se quede sin juguete?

SOLUCIÓN: **S = 36**

81. Para formar la tripulación de un submarino se deben elegir 4 maquinistas y 1 capitán entre un grupo de 12 hombres, de los cuales 9 son maquinistas y 3 capitanes. ¿Cuántas tripulaciones se podrán obtener?

SOLUCIÓN: **S = 378**

82. Se desea distribuir 10 bolas numeradas del 1 al 10 en tres urnas, de modo que en la primera haya 5 bolas, en la segunda 3 bolas y en la tercera 2 bolas. ¿De cuántos modos es posible la distribución?

SOLUCIÓN: **S = 2 520**

83. Calcula los siguientes números combinatorios:

I) $\binom{8}{3}$ II) $\binom{6}{5}$ III) $\binom{10}{4}$

SOLUCIÓN I): $\binom{8}{3} = 56$

SOLUCIÓN II): $\binom{6}{5} = 6$

SOLUCIÓN III): $\binom{10}{4} = 210$

84. Comprueba las siguientes relaciones:

I) $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ II) $\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$ III) $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$

SOLUCIÓN I): $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

SOLUCIÓN II): $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

SOLUCIÓN III): $\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126$

85. Calcula el valor de los siguientes números combinatorios:

I) $\binom{25}{22}$ II) $\binom{100}{99}$ III) $\binom{324}{323}$ IV) $\binom{195}{193}$

SOLUCIÓN I): $\binom{25}{22} = 2\,300$

SOLUCIÓN II): $\binom{100}{99} = 100$

SOLUCIÓN III): $\binom{324}{323} = 324$

SOLUCIÓN IV): $\binom{195}{193} = 18\,915$

86. Comprueba las siguientes relaciones:

I) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ II) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$ III) $\binom{11}{5} + \binom{11}{6} = \binom{12}{6}$

SOLUCIÓN I): $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3} = 10$

SOLUCIÓN II): $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = 56$

SOLUCIÓN III): $\binom{11}{5} + \binom{11}{6} = \binom{12}{6} = 924$

87. Resolver las siguientes ecuaciones:

I) $\binom{x}{3} = \binom{x}{2}$ II) $\binom{x}{7} = \binom{x}{4}$ III) $\binom{x}{2} = \binom{x}{8}$

SOLUCIÓN I): **x = 5**

SOLUCIÓN II): **x = 11**

SOLUCIÓN III): **x = 10**

88. Resolver las siguientes ecuaciones:

I) $\binom{40}{x} = \binom{40}{x+6}$ II) $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$ III) $\binom{15}{x} = \binom{15}{x-3}$

SOLUCIÓN I): **x = 17**

SOLUCIÓN II): **x = 4**

SOLUCIÓN III): **x = 9**

89. Resolver las siguientes ecuaciones:

I) $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{x}{2}$ IV) $\binom{9}{3} = \binom{8}{3} + \binom{8}{x}$

II) $\binom{x}{5} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5}$ V) $\binom{10}{x} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3}$

III) $\binom{10}{4} = \binom{x}{3} + \binom{9}{4}$ VI) $\binom{6}{5} = \binom{5}{x} + \binom{5}{5}$

SOLUCIÓN I): **x = 5**

SOLUCIÓN II): **x = 7**

SOLUCIÓN III): **x = 9**

SOLUCIÓN IV): **x = 2 ; x = 6**

SOLUCIÓN V): **x = 3**

SOLUCIÓN VI): **x = 4 ; x = 1**

90. Resolver las siguientes ecuaciones:

I) $\binom{7}{3} - x = \binom{6}{3}$ II) $\binom{7}{4} - \binom{6}{4} = x$ III) $\binom{6}{3} = x + \binom{5}{3}$

SOLUCIÓN I): **x = 15**

SOLUCIÓN II): **x = 20**

SOLUCIÓN III): **x = 10**

91. Calcular el valor de *x* en las siguientes ecuaciones:

I) $\binom{x}{2} = 36$ V) $4\binom{2x}{x} = 15\binom{2x-2}{x-1}$

II) $\binom{x}{3} = x$ VI) $\binom{x}{3} : \binom{x}{4} = \frac{1}{2}$

III) $\binom{x}{4} = 20\binom{x}{2}$ VII) $18\binom{x}{2} + 24\binom{x}{3} = 125x$

IV) $\binom{x}{5} : \binom{x}{6} = 1$ VIII) $3\binom{x+2}{3} = 4\binom{x+1}{2}$

SOLUCIÓN I): **x = 9**

SOLUCIÓN II): **x = 4**

SOLUCIÓN III): **x = 18**

SOLUCIÓN IV): **x = 11**

SOLUCIÓN V): **x = 8**

SOLUCIÓN VI): **x = 11**

SOLUCIÓN VII): **x = 6**

SOLUCIÓN VIII): **x = 2**

92. Calcular el valor de *x* en las siguientes ecuaciones:

I) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \frac{x(x^2+6)}{6}$

II) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} + \binom{x-2}{2} = 136$

SOLUCIÓN I): **x = 6**

SOLUCIÓN II): **x = 11**

93. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \binom{x}{y} &= \binom{x}{y+1} \\ 7\binom{x}{y+1} &= 8\binom{x}{y-1} \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 29 ; y = 14**

94. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \binom{x}{y-1} &= \binom{x}{y} \\ 4\binom{x}{y} &= 5\binom{x}{y-2} \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 17 ; y = 9**

95. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3\binom{x}{5} &= 2\binom{x}{6} \\ \binom{x}{y-2} &= \binom{x}{y} \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 14 ; y = 8**

96. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5\binom{y}{2} &= 3\binom{y}{3} \\ \binom{x}{y-1} &= \binom{x}{y} \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 13 ; y = 7**

97. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \binom{x}{y+1} &= \binom{x}{2y-1} \\ \binom{x}{y} &= \frac{2}{3}\binom{x}{y+2} \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 9 ; y = 3**

98. Demuestra por inducción la siguiente igualdad:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

SOLUCIÓN: **Se cumple para todo *n***

99. Demuestra por inducción la siguiente igualdad:

$$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = n(n+1)$$

SOLUCIÓN: **Se cumple para todo *n***

100. Demuestra por inducción la siguiente igualdad:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$$

SOLUCIÓN: **Se cumple para todo *n***

101. Demuestra por inducción la siguiente igualdad:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

SOLUCIÓN: **Se cumple para todo *n***

102. Desarrollar los siguientes binomios:

I) $(a+2b)^4$ II) $(x+\sqrt{2})^5$ III) $(a^{1/3}+b^{1/3})^5$

SOLUCIÓN I):

$$(a+2b)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

SOLUCIÓN II):

$$(x+\sqrt{2})^5 = x^5 + 5\sqrt{2}x^4 + 20x^3 + 20\sqrt{2}x^2 + 20x + 4\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN III):

$$(a^{1/3}+b^{1/3})^5 = a^{5/3} + 5a^{4/3}b^{1/3} + 10ab^{2/3} + 10a^{2/3}b + 5a^{1/3}b^{4/3} + b^{5/3}$$

103. Desarrollar los siguientes binomios:

I) $(2x + 1/4\, y^3)^5$ II) $(x^2+y^2)^5$ III) $(2xy+y^3)^4$

SOLUCIÓN I):

$$(2x + 1/4\, y^3)^5 = 32x^5 + 20x^4y^3 + 5x^3y^6 + 5/8\, x^2y^9 + 5/128\, xy^{12} + 1/1\,024\, y^{15}$$

SOLUCIÓN II):

$$(x^2+y^2)^5 = x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10}$$

SOLUCIÓN III):

$$(2xy+y^3)^4 = 16x^4y^4 + 32x^3y^6 + 24x^2y^8 + 8xy^{10} + y^{12}$$

104. Desarrollar los siguientes binomios:

I) $(3x^2+2y^3)^4$ II) $(1/\sqrt{2} + \sqrt{2}/x)^{10}$

III) $(2x + y/3)^4$

SOLUCIÓN I):

$$(3x^2+2y^3)^4 = 81x^8 + 216x^6y^3 + 216x^4y^6 + 96x^2y^9 + 16y^{12}$$

SOLUCIÓN II):

$$(1/\sqrt{2} + \sqrt{2}/x)^{10} = 1/32 + 5/8x + 45/8x^2 + 30/x^3 + 105/x^4 + 252/x^5 + 420/x^6 + 480/x^7 + 360/x^8 + 160/x^9 + 32/x^{10}$$

SOLUCIÓN III):

$$(2x + y/3)^4 = 16x^4 + 32/3\, x^3y + 24/9\, x^2y^2 + 8/27\, xy^3 + 1/81\, y^4$$

105. Desarrollar los siguientes binomios:

I) $(a-1)^8$ II) $(3x-2y)^4$ III) $(2/x - \sqrt{x})^4$

SOLUCIÓN I):

$$(a-1)^8 = a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1$$

SOLUCIÓN II):

$$(3x-2y)^4 = 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$$

SOLUCIÓN III):

$$(2/x - \sqrt{x})^4 = 16/x^4 - 32\sqrt{x}/x^3 + 24/x - 8\sqrt{x} + x^2$$

106. Desarrollar los siguientes binomios:

I) $(\sqrt{x}-\sqrt{2})^5$ II) $(x^{3/5}-x^2)^4$ III) $(x^2/2 - 3y)^6$

SOLUCIÓN I):

$$(\sqrt{x}-\sqrt{2})^5 = x^2\sqrt{x} - 5x^2\sqrt{2} + 20x\sqrt{x} - 20x\sqrt{2} + 20\sqrt{x} - 4\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN II):

$$(3x^{3/5}-x^2)^4 = x^{12/5} - 4x^{19/5} + 6x^{26/5} - 4x^{33/5} + x^8$$

SOLUCIÓN III):

$$(x^2/2 - 3y)^6 = x^{12}/64 - (9/16)\, x^{10}y + (135/16)\, x^8y^2 - (135/2)\, x^6y^3 + (1\,215/4)\, x^4y^4 - 729x^2y^5 + 729y^6$$

107. Hallar el valor de:

$$(x+y)^5 - (x-y)^5$$

SOLUCIÓN:

$$(x+y)^5 - (x-y)^5 = 10x^4y + 20x^2y^3 + 2y^5$$

108. Hallar el valor de:

$$(1+\sqrt{y})^5 + (1-\sqrt{y})^5$$

SOLUCIÓN:

$$(1+\sqrt{y})^5 + (1-\sqrt{y})^5 = 2 + 20y + 10y^2$$

109. Hallar el valor de:

$$(3-2\sqrt{3})^3 - (3+2\sqrt{3})^3$$

SOLUCIÓN:

$$(3-2\sqrt{3})^3 - (3+2\sqrt{3})^3 = -156\sqrt{3}$$

110. Mediante el desarrollo del binomio de Newton, calcular los siguientes números con tres cifras decimales:

I) $(0{,}99)^3$ II) $(3{,}01)^4$ III) $(1{,}98)^5$

SOLUCIÓN I): $(0{,}99)^3 = 0{,}970$

SOLUCIÓN II): $(3{,}01)^4 = 82{,}085$

SOLUCIÓN III): $(1{,}98)^5 = 30{,}432$

111. Calcular directamente el término indicado en los desarrollos siguientes:

I) El 6.° término de $(3a+b)^9$

II) El 3.° término de $\left(\frac{a\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{a}\right)^5$

III) El 8° término de $(2a-y)^{12}$

SOLUCIÓN I): $T_6 = 10\,206\, a^4b^5$

SOLUCIÓN II): $T_3 = \frac{10}{27} ax\sqrt{x}$

SOLUCIÓN III): $T_8 = -25\,344\, a^5y^7$

112. Calcular directamente el término indicado en los desarrollos siguientes:

I) El 6.° término de $(x - 2y)^8$

II) El 14.° $(x + 3y)^{17}$

III) El 23° término de $\left(x + \frac{b}{x}\right)^{25}$

SOLUCIÓN I): $T_6 = -1\,792\, x^3y^5$

SOLUCIÓN II): $T_{14} = 2\,380\, x^4(3y)^{13}$

SOLUCIÓN III): $T_{23} = 2\,300\, \frac{b^{22}}{x^{19}}$

113. Hallar el término medio de los desarrollos siguientes:

I) $(x + y)^{10}$

II) $\left(x - \frac{y}{2}\right)^{10}$

III) $\left(\frac{a-2}{3} - \frac{2}{b-2}\right)^{14}$

SOLUCIÓN I): $T_6 = 252\, x^5y^5$

SOLUCIÓN II): $T_6 = -\frac{63}{8} x^5y^5$

SOLUCIÓN III): $T_8 = -\frac{146\,432}{729} \frac{(a-2)^7}{(b-2)^7}$

114. Hallar los términos medios de los desarrollos siguientes:

I) $(3x^2y + b^2)^5$ II) $(2 - \sqrt{3})^5$

SOLUCIÓN I): $T_3 = 270\, b^4x^6y^3$
$T_4 = 90\, b^6x^4y^2$

SOLUCIÓN II): $T_3 = 240$
$T_4 = -120\sqrt{3}$

115. Hallar el coeficiente del término que a continuación se especifica en los desarrollos siguientes:

I) $(3x + 4)^{10}$, cuya parte literal es x^4

II) $\left(2x + \frac{5}{x}\right)^7$, cuya parte literal es x

III) $(x^2 + 2x)^{10}$, cuya parte literal es x^{12}

IV) $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{11}$, cuya parte literal es x^4

SOLUCIÓN I): **Su coeficiente es: 69 672 960**

SOLUCIÓN II): **Su coeficiente es:** $\binom{7}{3} 2^4 5^3 = 70\,000$

SOLUCIÓN III): **Su coeficiente es:** $\binom{10}{8} 2^8 = 11\,520$

SOLUCIÓN IV): **Su coeficiente es:** $\binom{11}{6} 2^6 = 29\,568$

116. Hallar el término que a continuación se especifica en los desarrollos siguientes:

I) $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^7$, cuya parte literal es x^5

II) $(x^2 + 2x)^{10}$, cuya parte literal es x^{12}

III) $(x^3 - \sqrt{x})^{15}$, cuya parte literal es x^{30}

IV) $\left(\frac{2}{3}x + x^2\right)^5$, cuya parte literal es x^7

SOLUCIÓN I): **El término es:** $(-1)^1\binom{7}{1}3^6x^5 = -7 \cdot 3^6x^5 = -5\,103\, x^5$

SOLUCIÓN II): **El término es:** $\binom{10}{8}2^8x^{12} = 11\,520\, x^{12}$

SOLUCIÓN III): **El término es:** $(-1)^6\binom{15}{6}x^{30} = 5\,005\, x^{30}$

SOLUCIÓN IV): **El término es** $\binom{5}{2}\binom{7}{1}^3 x^7 = \frac{80}{27} x^7$

117. Sabiendo que el penúltimo término del desarrollo de $(2 + ax)^n$ es $40x^3$, halla el valor de «a» y «n».

SOLUCIÓN: $a = \sqrt[3]{5}$; $n = 4$

118. El segundo y el tercer término del desarrollo $(1 + 2y)^x$ son iguales a 16 y 96. Hallar «x» e «y».

SOLUCIÓN: $x = 4$; $y = 2$

119. Los términos quinto y séptimo del desarrollo $(1 + 2x)^n$ tienen por coeficiente de «x», respectivamente 1 120 y 1 792. Halla «n».

SOLUCIÓN: $n = 8$

120. Desarrollar los polinomios siguientes:

I) $(x^2 + 2x + 1)^3$ II) $(3x - 2y + 1)^3$

SOLUCIÓN I): $(x^2 + 2x + 1)^3 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

SOLUCIÓN II): $(3x - 2y + 1)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 27x^2 + 36xy^2 - 36xy + 9x - 8y^3 + 12y^2 - 6y + 1$

121. Halla el cuadrado de los polinomios siguientes:

I) $(1 + 2x + 3x^2)^2$ II) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2$

SOLUCIÓN I): $(1 + 2x + 3x^2)^2 = 1 + 4x + 10x^2 + 12x^3 + 9x^4$

SOLUCIÓN II): $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 44x^5 + 46x^6 + 40x^7 + 25x^8$

122. Halla el cuadrado de los polinomios siguientes:

I) $(x + y + z + t)^2$ II) $(x - y + z - t)^2$

SOLUCIÓN I):

$(x + y + z + t)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt$

SOLUCIÓN II):

$(x - y + z - t)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy + 2xz - 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$

123. Calcular $(1 + x + x^2)^3$ aplicando el binomio de Newton.

SOLUCIÓN:

$(1 + x + x^2)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$

124. Desarrollar el polinomio: $(x + y + z)^3$

SOLUCIÓN:

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

abc	bac	cab	dab	eab
abd	bad	cad	dac	eac
abe	bae	cae	dae	ead
acb	bca	cba	dba	eba
acd	bcd	cbd	dbc	ebc
ace	bce	cbe	dbe	ebd
adb	bda	cda	dca	eca
adc	bdc	cdb	dcb	ecb
ade	bde	cde	dce	ecd
aeb	bea	cea	dea	eda
aec	bec	ceb	deb	edb
aed	bed	ced	dec	edc

2. RESOLUCIÓN

$V_{4,1} = 4$; *Variaciones monarias: 1, 2, 3, 4*

$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$; *Variaciones binarias:*

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; *Variaciones ternarias:*

123	213	312	412
124	214	314	413
132	231	321	421
134	234	324	423
142	241	341	431
143	243	342	432

$V_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; *Variaciones cuaternarias:*

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

3. RESOLUCIÓN

I)

$$V_{m-1,n} = (m-1)(m-2)\dots(m-1-n+2)(m-1-n+1) = (m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)$$

SOLUCIÓN I): **$V_{m-1,n} = (m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)$**

II)

$$V_{m+1,m+1} = (m+1)\,m\dots[(m+1)-(m+1)+2][(m+1)-(m+1)+1] = (m+1)\,m\dots(m+1-m-1+2)\,(m+1-m-1+1) = (m+1)\,m\dots 2 \cdot 1$$

SOLUCIÓN II): **$V_{m+1,m+1} = (m+1)\,m\dots 2 \cdot 1$**

III)

$$V_{m-2,m-2} = (m-2)(m-3)\dots[(m-2)-(m-2)+2][(m-2)-(m-2)+1] = (m-2)(m-3)\dots(m-2-m+2+2)(m-2-m+2+1) = (m-2)(m-3)\dots 2 \cdot 1$$

SOLUCIÓN III): **$V_{m-2,m+2} = (m-2)(m-3)\dots 2 \cdot 1$**

4. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} V_{x,5} &= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ 6V_{x,3} &= 6x(x-1)(x-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 6x(x-1)(x-2)$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \;;\; x = 6 \;;\; x = 1 \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN: **$x = 6$**

5. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} 8V_{m,4} &= 8m(m-1)(m-2)(m-3) \\ V_{m,5} &= m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8m(m-1)(m-2)(m-3) = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$8 = m - 4 \Rightarrow m = 12$$

SOLUCIÓN: **$m = 12$**

6. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} 2V_{x-1,3} &= 2(x-1)(x-2)(x-3) \\ V_{x,3} + V_{x-1,2} &= x(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)(x-2)(x-3) = x(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$2(x-3) = x+1 \Rightarrow x = 7$$

SOLUCIÓN: **x = 7**

7. RESOLUCIÓN

$V_{m,3} = 9V_{m,2}$

$$\left.\begin{array}{l} V_{m,3} = m(m-1)(m-2) \\ 9V_{m,2} = 9m(m-1) \end{array}\right\} \Rightarrow m(m-1)(m-2) = 9m(m-1)$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$m - 2 = 9 \Rightarrow m = 11$$

SOLUCIÓN: **m = 11**

8. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 32V_{x,3} = 32x(x-1)(x-2) \\ 21VR_{x,3} = 21x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 32x(x-1)(x-2) = 21x^3$$

Efectuando operaciones, resulta:

$11x^2 - 96x + 64 = 0\ ;\ x = 8\ ;\ x = \frac{8}{11}$ no sirve

SOLUCIÓN: **x = 8**

9. RESOLUCIÓN

$VR_{x,2} = x^2$

$V_{x,2} = x(x-1)$

Luego: $x^2 - x(x-1) = 12$

$x^2 - x^2 + x = 12$

$x = 12$

SOLUCIÓN: **x = 12**

10. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 5V_{m,3} = 5m(m-1)(m-2) \\ 24VR_{m-1,2} = 24(m-1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5m(m-1)(m-2) = 24(m-1)^2$$

Efectuando operaciones, resulta:

$5m^2 - 34m + 24 = 0\ ;\ m = 6\ ;\ m = \frac{4}{5}$ no sirve

SOLUCIÓN: **m = 6**

11. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} V_{x+1,2} = (x+1)x \\ 2V_{x-1,2} = 2(x-1)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow (x+1)x + 2(x-1)(x-2) = 82$$

Efectuando operaciones, resulta: $3x^2 - 5x - 78 = 0$

$x = 6\ ;\ x = -\frac{13}{3}$ no sirve

SOLUCIÓN: **x = 6**

12. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} a\cdots\ ;\ V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \\ e\cdots\ ;\ V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 12 + 12 = 24$$

SOLUCIÓN: **24**

13. RESOLUCIÓN

$V_{m,2} = 2\,756$

$m(m-1) = 2\,756 \Rightarrow m^2 - m - 2\,756 = 0\ ;$

$m = 53\ ;\ m = -52$ no sirve

SOLUCIÓN: **m = 53**

14. RESOLUCIÓN

Todos los números de una, dos y tres cifras, son menores que 1 000.

$$\left.\begin{array}{l} V_{5,1} = 5 \\ V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20 \\ V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 + 20 + 60 = 85$$

SOLUCIÓN: **S = 85**

15. RESOLUCIÓN

Sólo sirven los que empiezan por 2 ó 4

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdots\ ;\ V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \\ 4\cdots\ ;\ V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 24 + 24 + = 48$$

SOLUCIÓN: **S = 48**

También:

Se pueden formar: $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Los que empiezan por 5, 7 y 8 son mayores que 5 000, así quedan sólo los que empiezan por 2 y 4 que son los 2/5 del total:

$$120 \cdot \frac{2}{5} = \frac{240}{5} = 48$$

SOLUCIÓN: **S = 48**

16. RESOLUCIÓN

En total: $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Los que empiezan por 0 no sirven: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

luego:

$$V_{6,4} - V_{5,3} = 360 - 60 = 300$$

SOLUCIÓN: **S = 300**

17. RESOLUCIÓN

$V_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\,320$

SOLUCIÓN: **S = 1 320**

18. RESOLUCIÓN

$V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Empiezan por 1: } 1\cdots\ ;\ V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30 \\ \text{Empiezan por 7: } 7\cdots\ ;\ V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 30 + 30 = 60 \text{ no sirven}$$

por ser menores que 200 y mayores que 700; luego:

$$210 - 60 = 150$$

SOLUCIÓN: **S = 150**

19. RESOLUCIÓN

$V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

SOLUCIÓN: **S = 20**

20. RESOLUCIÓN

$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Empezan por 5: 5 • • • ; $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

SOLUCIÓN: **S = 360 ; 60**

21. RESOLUCIÓN

$$\frac{V_{m,5}}{V_{m,3}} = \frac{154\,440}{1\,716} = 90 \; ; \; \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{m(m-1)(m-2)} = 90$$

$$(m-3)(m-4) = 90 \Rightarrow m^2 - 7m - 78 = 0 \quad ;$$

$$m = 13 \quad ; \quad m = -6 \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN: **m = 13**

22. RESOLUCIÓN

Con las consonantes: $V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$

Con las vocales: $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

Representando por C las consonantes y por V las vocales, resulta:

C V C V C posición fija de las V

luego:

$$6\,840 \cdot 20 = 136\,800$$

SOLUCIÓN: **S = 136 800**

23. RESOLUCIÓN

Con las vocales: $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

Con las consonantes: $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Posiciones relativas de modo que no existan 2 C seguidas:

C V C V ; C V V C ; V C V C

El número total de palabras será:

$$20 \cdot 12 \cdot 3 = 720$$

SOLUCIÓN: **S = 720**

24. RESOLUCIÓN

$$VR_{5,4} = 5^4 = 625$$

Empiezan por 0:

0 • • • ; $VR_{5,3} = 5^3 = 125$ *que no sirven*

Luego:

$$625 - 125 = 500 \text{ números}$$

SOLUCIÓN: **S = 500**

25. RESOLUCIÓN

En la quiniela intervienen catorce partidos, cuyos resultados pueden ser 1, X, 2, que se pueden repetir catorce veces, luego:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$$

SOLUCIÓN: **S = 4 782 969**

26. RESOLUCIÓN

$$VR_{5,7} = 5^7 = 78\,125$$

Terminan en 7;

$$\frac{78\,125}{5} = 15\,625$$

SOLUCIÓN: **S = 78 125 ; 15 625**

27. RESOLUCIÓN

a) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ *números de tres cifras*

b) $\frac{120}{6} = 20$; $3 \cdot 20 = 60$ *números que empiezan por 1, 2, y 3 que son menores que 400.*

c) Acaban en 2, 4, 6 ;

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\cdot 2 \; ; \; V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20 \\ \cdot\cdot 4 \; ; \; V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20 \\ \cdot\cdot 6 \; ; \; V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 + 20 + 20 = 60$$

d) Acaban en 1, 3, 5;

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\cdot 1 \\ \cdot\cdot 3 \\ \cdot\cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot V_{5,2} = 3 \cdot 20 = 60$$

e) Acaban en 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64;

$$8 \cdot V_{4,1} = 8 \cdot 4 = 32$$

f) Acaban en 5:

$$\cdot\cdot 5 \; ; \; V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

SOLUCIÓN: **S = a) 120 ; b) 60 ; c) 60 ; d) 60 ; e) 32 ; f) 20**

28. RESOLUCIÓN

a) $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$ *números de cinco cifras*

Los que empiezan por 0 no sirven:

$$\frac{100\,000}{10} = 10\,000$$

luego;

$$100\,000 - 10\,000 = 90\,000 \text{ números de cinco cifras}$$

b) 50 • • • ; $VR_{10,3} = 10^3 = 1\,000$ *números que empiezan por 50*

c) $\frac{90\,000}{2} = 45\,000$ *números que son pares*

d) $\frac{90\,000}{5} = 18\,000$ *números que son divisibles por 5*

SOLUCIÓN: **S = a) 90 000 ; b) 1 000 ; c) 45 000 ; d) 18 000**

29. RESOLUCIÓN

$VR_{5,4} = 5^4 = 625$

$\frac{625}{5} = 125$ *números que acaban en cada una de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5*

La suma de las unidades es:

$$125\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 125 \cdot 15 = 1\,875$$

La suma de todos ellos, será:

$$S = 1\,875 + 1\,875 \cdot 10 + 1\,875 \cdot 100 + 1\,875 \cdot 1\,000 = 2\,083\,125$$

SOLUCIÓN: **S = 625 ; S = 2 083 125**

30. RESOLUCIÓN

a) $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ *números de cuatro cifras distintas*

b) Terminan en 2 ó 4:

$$\frac{120}{5} = 24 \ ; \ 24 \cdot 2 = 48$$

c) Terminan en 24:

$$..24 \ ; \ V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

d) Son múltiplos de 25:

$$..25 \ ; \ V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow V_{3,2} = 6$$

e) Empiezan por 245:

$$245. \ ; \ V_{2,1} = 2$$

f) Suman todos ellos:

$$S = 24\,(1 + 2 + 4 + 5 + 7) + 24 \cdot 10\,(1 + 2 + 4 + 5 + 7) +$$
$$+ 24 \cdot 100\,(1 + 2 + 4 + 5 + 7) + 24 \cdot 1\,000\,(1 + 2 + 4 + 5 + 7) =$$
$$= 24 \cdot 19 + 240 \cdot 19 + 2\,400 \cdot 19 + 24\,000 \cdot 19 =$$
$$= 456 + 4\,560 + 45\,600 + 456\,000 = 506\,616$$

SOLUCIÓN:

S = a) 120 ; b) 48 ; c) 6 ; d) 6 ; e) 2 ; f) 506 616

31. RESOLUCIÓN

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

SOLUCIÓN: **S = 120**

32. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} P_x = x! = x\,(x-1)\,(x-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 56P_{x-2} = 56\,(x-2)! = 56\,(x-2)\,(x-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x\,(x-1)\,(x-2) \ldots 2 \cdot 1 = 56\,(x-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Efectuando operaciones, resulta:

$x\,(x-1) = 56 \Rightarrow x^2 - x - 56 = 0 \ ; \ x = 8 \ ; \ x = -7$ *no sirve*

SOLUCIÓN: **x = 8**

33. RESOLUCIÓN

$$\frac{x!}{(x-3)!} = \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)!}{(x-3)!} = 720$$

Simplificando, resulta:

$$x\,(x-1)\,(x-2) = 720 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 720 = 0$$

Solamente tiene una solución real, que es: $x = 10$

SOLUCIÓN: **x = 10**

34. RESOLUCIÓN

$$P_x = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! \Rightarrow x = 4$$

SOLUCIÓN: **x = 4**

35. RESOLUCIÓN

$$\frac{1}{6} P_x = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow P_x = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6! \Rightarrow x = 6$$

SOLUCIÓN: **x = 6**

36. RESOLUCIÓN

$$3P_x = 3 \cdot 2 \Rightarrow P_x = 2 \Rightarrow x = 2$$

SOLUCIÓN: **x = 2**

37. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} P_x = x! = x\,(x-1)\,(x-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 5P_{x-1} = 5\,(x-1)! = 5\,(x-1)\,(x-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\,(x-1)\,(x-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,(x-1)\,(x-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$x = 5$$

SOLUCIÓN: **x = 5**

38. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 6P_{x-2} = 6\,(x-2)! \\ P_x = x! = x\,(x-1)\,(x-2)! \end{array}\right\} \Rightarrow 6\,(x-2)! = x\,(x-1)\,(x-2)!$$

resultando:

$6 = x\,(x-1) \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \ ; \ x = 3 \ ; \ x = -2$ *no sirve*

SOLUCIÓN: **x = 3**

39. RESOLUCIÓN

$$\frac{x\,(x-1)}{2} = \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3 \cdot 2}$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$1 = \frac{x-2}{3} \Rightarrow x = 5$$

SOLUCIÓN: **x = 5**

40. RESOLUCIÓN

$$8\,(x-1)! + 3x! = (x+1)!$$
$$8\,(x-1)! + 3x\,(x-1)! = (x+1)\,x\,(x-1)!$$

Dividiendo por $(x-1)!$, *resulta:*

$$8 + 3x = (x+1)\,x$$
$$8 + 3x = x^2 + x$$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \ ; \ x = -2$ *no sirve*

SOLUCIÓN: **x = 4**

41. RESOLUCIÓN

El número de permutaciones es: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Los números que son mayores que 54 000 son los que empiezan por:

$$54... \ ; \ P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Los números de 5 cifras menores que 54 000 son:

$$120 - 6 = 114$$

SOLUCIÓN: **S = 114**

42. RESOLUCIÓN

Teniendo en cuenta el orden de colocación de las letras serán:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Teniendo en cuenta el orden de colocación de los exponentes serán:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

El número total de monomios diferentes que podemos escribir, serán:

$$6 \cdot 6 = 36$$

SOLUCIÓN: **S = 36**

43. RESOLUCIÓN

La posición relativa de vocales y consonantes es: C V C V C

Las consonantes C ocupan los lugares 1, 3 y 5, luego serán:

$$P_3 = 3! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Las vocales V ocupan los lugares 2 y 4, luego serán:

$$P_2 = 2! = 2$$

El número total de palabras distintas son:

$$P_3 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

SOLUCIÓN: **S = 12**

44. RESOLUCIÓN

Las posiciones relativas son:

C V C V C ; C V C C V ; V C C V C ; V C V C C ; C C V C V

Con las vocales: $P_2 = 2! = 2$

Con las consonantes: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

El número total de palabras será:

$$5 \cdot P_2 \cdot P_3 = 5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$$

SOLUCIÓN: **S = 60**

45. RESOLUCIÓN

Las posiciones relativas son: V C V C V C ; C V C V C V

Con las V: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Con las C: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

El número total de palabras será:

$$2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$$

SOLUCIÓN: **S = 72**

46. RESOLUCIÓN

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ *permutaciones*

$\frac{120}{5} = 24$ *permutaciones que empiezan por cada una de las letras S, U, M, A y R*

Empiezan por consonante:

$24 \cdot 3 = 72$ *palabras*

SOLUCIÓN: **S = 120 y 72**

47. RESOLUCIÓN

Empiezan y terminan en consonante:

L....S ; $P_4 = 4! = 24$
S....L ; $P_4 = 4! = 24$ $\Rightarrow 24 + 24 = 48$

Empiezan y terminan en vocal:

E....O

E....I

E....A

Análogamente: O, I, A; resultando:

$$P_4 \cdot V_{4,2} = 4! \cdot 4 \cdot 3 = 24 \cdot 12 = 288$$

SOLUCIÓN: **S = 48 y 288**

48. RESOLUCIÓN

••J•• ; $P_4 = 4! = 24$ *ordenaciones*

Las 3 consonantes ocuparán los lugares 1.° y 5.°

S... J J... S N... S

S... N J... N N... J

Resultando:

$$P_3 \cdot V_{3,2} = 3! \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$$

SOLUCIÓN: **S = 24 y 36**

49. RESOLUCIÓN

a) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) Son los terminados en 2, 4 y 6: .....2, ...4, ...6 $\Big\}$ $3P_5 = 360$

c) Son los terminados en 1, 3 y 5: .....1, ...3, ...5 $\Big\}$ $3P_5 = 360$

d) Son los terminados en 5: .....5 ; $P_5 = 120$

SOLUCIÓN: **S = a) 720 ; b) 360 ; c) 360 ; d) 120**

50. RESOLUCIÓN

Empiezan por 1, 2 y 3: 1....., 2....., 3..... $\Rightarrow 3P_5 = 3 \cdot 120 = 360$

Empiezan por 51, 52, 53 y 58: 51...., 52...., 53...., 58.... $\Rightarrow 4P_4 = 4 \cdot 24 = 96$

Empiezan por 591, 592 y 593: 591..., 592..., 593... $\Rightarrow 3P_3 = 3 \cdot 6 = 18$

Empiezan por 59 812: 59 812• ; $P_1 = 1$

La dada 59 8132 ;

Ocuparía el lugar: $360 + 96 + 18 + 1 + 1 = 476$

SOLUCIÓN: **S = 476**

51. RESOLUCIÓN

Empiezan por a: a...... ; $P_6 = 6! = 720$

Empiezan por b: b...... ; $P_6 = 6! = 720$

Empiezan por ca: ca .....
Empiezan por cb: cb .....
Empiezan por cd: cd ..... $\Rightarrow$ $5P_5 = 600$
Empiezan por ce: ce .....
Empiezan por cf: cf .....

Empiezan por cgab: ... ; $P_3 = 3! = 6$

La permutación cgadbef ocupa el lugar:

$$720 + 720 + 600 + 6 + 1 = 2\,047$$

SOLUCIÓN: **S = 2 047**

52. RESOLUCIÓN

a) *Se pueden formar:*

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Suprimiendo los que empiezan por 0, resulta:

$$\frac{120}{5} = 24 \text{ empiezan por } 0$$

$$120 - 24 = 96$$

b) *La suma de las unidades es:* $24\,(0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 240$.
La suma total será:

$$S_1 = 240 + 240 \cdot 10 + 240 \cdot 100 + 240 \cdot 1\,000 + 240 \cdot 10\,000 = 2\,666\,640$$

A esta suma hay que restarle los que empiezan por 0:

$$S_2 = \frac{24}{4}(1 + 2 + 3 + 4)\,1\,111 = 60 \cdot 1\,111 = 66\,660$$

La suma de ellos es:

$$S_1 - S_2 = 2\,666\,640 - 66\,660 = 2\,599\,980$$

SOLUCIÓN: **S = a) 96 ; b) 2 599 980**

53. RESOLUCIÓN

a) $P_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

b) A....A ; $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) *Posiciones de las 3 vocales juntas:*

A A A . . .
. A A A . .
. . A A A . $\Rightarrow$ $4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
. . . A A A

c) C....A ; $P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$

SOLUCIÓN: **S = a) 120 ; b) 24 ; c) 24 ; d) 12**

54. RESOLUCIÓN

$$3 \cdot \frac{x!}{(x-3)!\,3!} = 6 \cdot \frac{x!}{(x-2)!\,2!}$$

$$3 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{(x-3)!\,3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!\,2!}$$

Simplificando, resulta:

$$\frac{x-2}{2} = 3 \Rightarrow x - 2 = 6 \Rightarrow x = 8$$

SOLUCIÓN **x = 8**

55. RESOLUCIÓN

$$P_7^{2,2,3} = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Las que empiezan por 0 no sirven:

$$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

El número total de números de 7 cifras serán:

$$210 - 60 = 150$$

SOLUCIÓN: **S = 150**

56. RESOLUCIÓN

$$P_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3!\,2!\,2!} = 1\,663\,200$$

Empiezan y terminan en A:

A . . . . A ; $P_9^{2,2} = \frac{9!}{2!2!}$ 90 720

SOLUCIÓN: **S = 1 663 200 ; 90 720**

57. RESOLUCIÓN

a) $P_9^4 = \frac{9!}{4!} = 15\,120$

b) *Empiezan por S:*

S........ ; $P_8^4 = \frac{8!}{4!} = 1\,680$

c) *Empiezan por A:*

A........ ; $P_8^3 = \frac{8!}{3!} = 6\,720$

d) *Empiezan y acaban por A:*

A.......A ; $P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 2\,520$

e)

A A A A . . . . .
. A A A A . . . .
. . A A A A . . . $\Rightarrow$ $6 \cdot P_5 = 720$
. . . A A A A . .
. . . . A A A A .
. . . . . A A A A

SOLUCIÓN:
S = a) 15 120 ; b) 1 680 ; c) 6 720 ; d) 2 520 ; e) 720

58. RESOLUCIÓN

$$P_7^{2,2,3} = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210$$

Los que empiezan por 0 no sirven:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2¡\,3!} = 10$$

El número total de números mayores que un millón será:

$$210 - 10 = 200$$

SOLUCIÓN: **S = 200**

59. RESOLUCIÓN

a) M [••••] Q [•••] F [•••••] ; $P_{12}^{4,3,5} = \frac{12!}{4!\,3!\,5!} = 27\,720$

b) .... M [••••] ; $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$

c) Q .... F ; $P_{10}^{4,2,4} = \frac{10!}{4!\,2!\,4!} = 3\,150$

d) M [••] .... M [••] ; $P_8^{3,5} = \frac{8\,!}{3!\,5!} = 56$

SOLUCIÓN: **S= a) 27 720 ; b) 56 ; c) 3 150 ; d) 56**

60. RESOLUCIÓN

Combinaciones monarias: $C_{5,1} = \frac{V_{5,1}}{P_1} = \frac{5}{1} = 5$

a, b, c, d, e

Combinaciones binarias: $C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

ab bc cd de
ac bd ce
ad be
ae

Combinaciones ternarias: $C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

abc bcd cde
abd bce
abe bde
acd
ace
ade

Combinaciones cuaternarias: $C_{5,4} = \frac{V_{5,4}}{P_4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$

abcd bcde
abce
abde
acde

Combinaciones quinarias: $C_{5,5} = \frac{V_{5,5}}{P_5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$

abcde

61. RESOLUCIÓN

I) $\left.\begin{array}{l} C_{m,2} = \frac{V_{m,2}}{P_2} = \frac{m\,(m-1)}{2 \cdot 1} \\ C_{m,2} = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m\,(m-1)}{2} = 36 \Rightarrow m^2 - m - 72 = 0;$

$m = 9$; $m = -8$ no sirve

SOLUCIÓN: **m = 9**

II) $\left.\begin{array}{l} C_{m,3} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ C_{m,3} = 7\,m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{6} = 7\,m$

Efectuando operaciones, resulta:

$m^2 - 3m - 40 = 0$; $m = 8$; $m = -5$ no sirve

SOLUCIÓN: **m = 8**

III)

$\left.\begin{array}{l} 3\,C_{m,3} = 3 \cdot \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ C_{m,4} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Efectuando operaciones, resulta:

$3 = \frac{m-3}{4} \Rightarrow m - 3 = 12 \Rightarrow m = 15$

SOLUCIÓN: **m = 15**

62. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} 2C_{x,3} = 2 \cdot \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ V_{x,2} = x\,(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = x\,(x-1)$

Efectuando operaciones, resulta:

$\frac{(x-2)}{3} = 1 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$

SOLUCIÓN: **x = 5**

63. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} C_{x,3} = \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ C_{x,3} = 40\,(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{6} = 40\,(x-2)$

Efectuando operaciones, resulta:

$x\,(x-1) = 240 \Rightarrow x^2 - x - 240 = 0$; $x = 16$; $x = -15$ no sirve

SOLUCIÓN: **x = 16**

64. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} 4CR_{x,2} = 4C_{x+1,2} = 4 \cdot \frac{(x+1)\,x}{2} \\ V_{x,3} = x\,(x-1)\,(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot \frac{(x+1)\,x}{2} = x\,(x-1)\,(x-2)$

Efectuando operaciones, resulta:

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x\,(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$ no sirve ; $x = 5$

SOLUCIÓN: **x = 5**

65. RESOLUCIÓN

Dividiendo ambas expresiones, resulta:

$\frac{V_{m,n}}{C_{m,n}} = \frac{20}{10} \Rightarrow \frac{m\,(m-1) \ldots (m-n+1)}{\frac{m\,(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!}} = 2 \Rightarrow n! = 2 \Rightarrow n = 2$

Sustituyendo este valor de n = 2 en una de las expresiones dadas, resulta:

$C_{m,2} = 10 \Rightarrow \frac{m\,(m-1)}{2} = 10 \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0$;

$m = 5$; $m = -4$ no sirve

SOLUCIÓN: **m = 5 ; n = 2**

66. RESOLUCIÓN

$$C_{x,2} = 190 \Rightarrow \frac{x\,(x-1)}{2} = 190 \Rightarrow x^2 - x - 380 = 0 \;;$$

$x = 20$; $x = -19$ no sirve

SOLUCIÓN: **x = 20**

67. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} CR_{m,2} = 28 \\ CR_{m,2} = C_{m+1,2} = \dfrac{(m+1)\,m}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 28 = \frac{(m+1)\,m}{2}$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$m^2 + m - 56 = 0 \;;\; m = 7 \;;\; m = -8 \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN: **m = 7**

68. RESOLUCIÓN

$V_{m,4} = 20C_{m,5}$

$$\left.\begin{array}{l} V_{m,4} = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3) \\ 20C_{m,5} = 20 \cdot \dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3) =$$

$$= 20 \cdot \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$1 = \frac{m-4}{6} \Rightarrow m - 4 = 6 \Rightarrow m = 10$$

SOLUCIÓN: **m = 10**

69. RESOLUCIÓN

$$CR_{7,2} = C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

SOLUCIÓN: **S = 28**

70. RESOLUCIÓN

$$C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

SOLUCIÓN: **S = 10**

71. RESOLUCIÓN

$$C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

SOLUCIÓN: **S = 20**

72. RESOLUCIÓN

$$C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

SOLUCIÓN: **S = 120**

73. RESOLUCIÓN

$$C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

SOLUCIÓN: **S = 45**

74. RESOLUCIÓN

$$C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

SOLUCIÓN: **S = 20**

75. RESOLUCIÓN

Tomándolas de 1 en 1: $C_{6,1} = 6$

Tomándolas de 2 en 2: $C_{6,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Tomándolas de 3 en 3: $C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

Tomándolas de 4 en 4: $C_{6,4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

Tomándolas de 5 en 5: $C_{6,5} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$

Tomándolas de 6 en 6: $C_{6,6} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$

El número total de pesadas diferentes es:

$$6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

SOLUCIÓN: **S = 63**

76. RESOLUCIÓN

Con las vocales: $C_{5,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Con las consonantes: $C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

Número de palabras: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

El número total de palabras que puede formarse será:

$$10 \cdot 20 \cdot 120 = 24\,000$$

SOLUCIÓN: **S = 24 000**

77. RESOLUCIÓN

Los grupos que se pueden formar son:

$$C_{18,4} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,060$$

Un alumno entra en un grupo determinado:

$$C_{17,3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 680 \text{ veces}$$

No entra dicho alumno:

$$C_{17,4} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2380 \text{ veces}$$

SOLUCIÓN: **S = 3 060 ; 680 ; 2380**

78. RESOLUCIÓN

Encendiendo un foco: $C_{5,1} = 5$

Encendiendo dos focos: $C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Encendiendo tres focos: $C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

El número total de señales luminosas es:

$$5 + 10 + 10 = 25$$

SOLUCIÓN: **S = 25**

79. RESOLUCIÓN

Tomando los 5 factores negativos: $C_{5,5} = 1$

Tomando un factor negativo y 4 positivos: $C_{5,1} \cdot C_{5,4} = 5 \cdot 5 = 25$

Tomando 3 factores negativos y 2 positivos:

$$C_{5,3} \cdot C_{5,2} = 10 \cdot 10 = 100$$

El número total de productos negativos de 5 factores distintos será:

$$1 + 25 + 100 = 126$$

SOLUCIÓN: **S = 126**

80. RESOLUCIÓN

Se puede hacer el reparto, dando 2 juguetes a uno de los niños y 1 juguete a cada uno de los otros dos niños:

$$C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

El número de maneras distintas de repartir los juguetes son:

$$6 \cdot 6 = 36$$

SOLUCIÓN: **S = 36**

81. RESOLUCIÓN

$$C_{9,4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ maquinistas}$$

$$C_{3,1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ capitanes}$$

El número de tripulaciones que se puede obtener será:

$$126 \cdot 3 = 378$$

SOLUCIÓN: **S = 378**

82. RESOLUCIÓN

En la primera urna: $C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$

Quedan para distribuir: $10 - 5 = 5$ *bolas*

En la segunda urna: $C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Quedan para distribuir: $5 - 3 = 2$ *bolas*

En la tercera urna: $C_{2,2} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 1$

El número total de distribuciones será:

$$252 \cdot 10 \cdot 1 = 2\,520$$

SOLUCIÓN: **S = 2 520**

83. RESOLUCIÓN

I)

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

También:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\binom{8}{3} = 56}$

II)

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

También:

$$\binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\binom{6}{5} = 6}$

III)

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

También:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\binom{10}{4} = 210}$

84. RESOLUCIÓN

I)

$$\left.\begin{aligned} \binom{5}{2} &= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \\ \binom{5}{3} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

SOLUCIÓN I): $\boldsymbol{\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10}$

II)

$$\left.\begin{aligned} \binom{8}{5} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \\ \binom{8}{3} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$$

SOLUCIÓN II): $\boldsymbol{\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56}$

III)

$$\left.\begin{aligned} \binom{9}{4} &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \\ \binom{9}{5} &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126$$

SOLUCIÓN III): $\boldsymbol{\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126}$

85. RESOLUCIÓN

I)

$$\binom{25}{22} = \binom{25}{25-22} = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,300$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\binom{25}{22} = 2\,300}$

II)

$$\binom{100}{99} = \binom{100}{100-99} = \binom{100}{1} = 100$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\binom{100}{99} = 100}$

III)

$$\binom{324}{323} = \binom{324}{324-323} = \binom{324}{1} = 324$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\binom{324}{323} = 324}$

IV)

$$\binom{195}{193} = \binom{195}{195-193} = \binom{195}{2} = \frac{195 \cdot 194}{2 \cdot 1} = 18\,915$$

SOLUCIÓN IV): $\boxed{\binom{195}{193} = 18\,915}$

86. RESOLUCIÓN

I)

$$\left.\begin{array}{l}\binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \\ \binom{4}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 \\ \binom{5}{3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3} = 10}$

II)

$$\left.\begin{array}{l}\binom{7}{4} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \\ \binom{7}{5} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56 \\ \binom{8}{5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = 56$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = 56}$

III)

$$\left.\begin{array}{l}\binom{11}{5} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462 \\ \binom{11}{6} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\binom{11}{5} + \binom{11}{6} = 462 + 462 = 924 \\ \binom{12}{6} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924\end{array}\right\} \Rightarrow \binom{11}{5} + \binom{11}{6} = \binom{12}{6} = 924$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\binom{11}{5} + \binom{11}{6} = \binom{12}{6} = 924}$

87. RESOLUCIÓN

Para que dos números combinatorios del tipo $\binom{m}{n}$ y $\binom{m}{n'}$ sean iguales, es necesario que se verifique: $m = n + n'$ para que se cumpla que:

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n'!\,(m-n')!}$$

I) $3 + 2 = x \Rightarrow x = 5$

SOLUCIÓN I): $\boxed{x = 5}$

II) $7 + 4 = x \Rightarrow x = 11$

SOLUCIÓN II): $\boxed{x = 11}$

III) $2 + 8 = x \Rightarrow x = 10$

SOLUCIÓN III): $\boxed{x = 10}$

88. RESOLUCIÓN

I) $x + x + 6 = 40 \Rightarrow 2x + 6 = 40 \Rightarrow 2x = 34 \Rightarrow x = 17$

SOLUCIÓN I): $\boxed{x = 17}$

II) $x + x + 2 = 10 \Rightarrow 2x + 2 = 10 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

SOLUCIÓN II): $\boxed{x = 4}$

III) $x + x - 3 = 15 \Rightarrow 2x - 3 = 15 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$

SOLUCIÓN III): $\boxed{x = 9}$

89. RESOLUCIÓN

I) Teniendo en cuenta la propiedad:

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$$

Resulta:

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{x}{2} \quad ; \text{ luego: } x = 5$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{x = 5}$

II)

$$\binom{x}{5} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5} \quad ; \text{ resulta: } x = 7$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{x = 7}$

III)

$$\binom{10}{4} = \binom{x}{3} + \binom{9}{4} \quad ; \text{ resulta: } x = 9$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{x = 9}$

IV)

$$\binom{9}{3} = \binom{8}{3} + \binom{8}{x} \quad ; \text{ resulta: } x = 2 \; ; \; x = 6$$

SOLUCIÓN IV): **x = 2 ; x = 6**

V)

$$\binom{10}{x} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} \quad ; \text{ resulta: } x = 3$$

SOLUCIÓN VI): **x = 3**

VI)

$$\binom{6}{5} = \binom{5}{x} + \binom{5}{5} \quad ; \text{ resulta: } x = 4 \; ; \; x = 1$$

SOLUCIÓN VI): **x = 4 ; x = 1**

90. RESOLUCIÓN

I)

$$\binom{7}{3} - x = \binom{6}{3} \Rightarrow \binom{7}{3} = x + \binom{6}{3} \Rightarrow x = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

SOLUCIÓN I): **x = 15**

II)

$$\binom{7}{4} - \binom{6}{4} = x \Rightarrow \binom{7}{4} = x + \binom{6}{4} \Rightarrow x = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

SOLUCIÓN II) **x = 20**

III)

$$\binom{6}{3} = x + \binom{5}{3} \Rightarrow x = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

SOLUCIÓN III): **x = 10**

91. RESOLUCIÓN

I)

$$\binom{x}{2} = 36 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 36 \Rightarrow x(x-1) = 72 \Rightarrow x = 9$$

SOLUCIÓN I) **x = 9**

II)

$$\binom{x}{3} = x \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = x \Rightarrow (x-1)(x-2) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \; ; \; x = 4 \; ; \; x = -1 \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN II): **x = 4**

III)

$$\binom{x}{4} = 20\binom{x}{2} \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \cdot \frac{x(x-1)}{2}$$

$$(x-2)(x-3) = 240 \Rightarrow x^2 - 5x - 234 = 0$$

$$x = 18 \; ; \; x = -13 \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN III): **x = 18**

IV)

$$\binom{x}{5} : \binom{x}{6} = 1 \Rightarrow \binom{x}{5} = \binom{x}{6} \Rightarrow 5 + 6 = x \Rightarrow x = 11$$

SOLUCIÓN IV) **x = 11**

V)

$$4\binom{2x}{x} = 15\binom{2x-2}{x-1}$$

$$4 \cdot \frac{(2x)!}{x!\,(2x-x)!} = 15 \cdot \frac{(2x-2)!}{(x-1)!\,[2x-2-(x-1)]!}$$

$$4 \cdot \frac{(2x)!}{x!\,x!} = 15 \cdot \frac{(2x-2)!}{(x-1)!\,(x-1)!}$$

Transponiendo términos queda:

$$4 \cdot \frac{(2x)!}{x!\,x!} \cdot \frac{(x-1)!\,(x-1)!}{(2x-2)!} = 15$$

Y operando resulta:

$$4 \cdot \frac{2x(2x-1)}{x \cdot x} = 15$$

Recordar que:

$(2x)! = 2x(2x-1)(2x-2)!$

$x! = x(x-1)!$

$$8x(2x-1) = 15x^2 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ no sirve} \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

SOLUCIÓN V): **x = 8**

VI)

$$\frac{\binom{x}{3}}{\binom{x}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\binom{x}{3} = \binom{x}{4}$$

$$2 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x-3}{24} \Rightarrow 8 = x - 3 \Rightarrow x = 11$$

SOLUCIÓN VI): **x = 11**

VII)

$$18\binom{x}{2} + 24\binom{x}{3} = 125x$$

$$18 \cdot \frac{x(x-1)}{2} + 24 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 125x$$

$$9(x-1) + 4(x-1)(x-2) = 125$$

$$4x^2 - 3x - 126 = 0 \; ; \; x = 6 \; ; \; x = -\frac{21}{4} \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN VII): **x = 6**

VIII)

$$3\binom{x+2}{3} = 4\binom{x+1}{2}$$

$$3 \cdot \frac{(x+2)(x+1)x}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot \frac{(x+1)x}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{x+2}{2} = 2 \Rightarrow x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

SOLUCIÓN VIII): **x = 2**

92. RESOLUCIÓN

I)

$$1 + x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2} = \frac{x(x^2+6)}{6}$$

$$6 + 6x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = x(x^2+6)$$

$$6 + 6x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + 6x$$

$$6 - x = 0 \Rightarrow x = 6$$

SOLUCIÓN I): **x = 6**

II)

$$\frac{x(x-1)}{2}+\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}=136$$

$$x(x-1)+(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)=272$$

$$x^2-x+x^2-3x+2+x^2-5x+6=272$$

$$3x^2-9x-264=0$$

$$x^2-3x-88=0$$

$$x=11\ ;\ x=-8 \text{ no sirve}$$

SOLUCIÓN II): **x = 11**

93. RESOLUCIÓN

De la ecuación primera se deduce:

$$y+y+1=x \Rightarrow 2y+1=x \qquad (1)$$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación, resulta:

$$7\binom{2y+1}{y+1}=8\binom{2y+1}{y-1}$$

de donde:

$$7\cdot\frac{(2y+1)!}{(y+1)!\,[2y+1-(y+1)]!}=8\cdot\frac{(2y+1)!}{(y-1)!\,[2y+1-(y-1)]!}$$

$$7\cdot\frac{(2y+1)!}{(y+1)!\,y!}=8\cdot\frac{(2y+1)!}{(y-1)!\,(y+2)!}$$

Simplificando:

$$\frac{7}{y}=\frac{8}{y+2}\Rightarrow y=14$$

Sustituyendo este valor de $y=14$ *en (1); resulta* $x=29$

SOLUCIÓN: **x = 29 ; y = 14**

94. RESOLUCIÓN

$$\binom{x}{y-1}=\binom{x}{y}\Rightarrow y-1+y=x\Rightarrow x=2y-1 \qquad (1)$$

Luego:

$$4\binom{2y-1}{y}=5\binom{2y-1}{y-2}$$

$$4\cdot\frac{(2y-1)!}{y!\,[2y-1-y]!}=5\cdot\frac{(2y-1)!}{(y-2)!\,[2y-1-(y-2)]!}$$

$$4\cdot\frac{(2y-1)!}{y!\,(y-1)!}=5\cdot\frac{(2y-1)!}{(y-2)!\,(y+1)!}$$

Simplificando:

$$\frac{4}{y-1}=\frac{5}{y+1}\Rightarrow y=9$$

Sustituyendo este valor en (1); resulta $x=17$

SOLUCIÓN: **x = 17 ; y = 9**

95. RESOLUCIÓN

$$3\binom{x}{5}=2\binom{x}{6}\Rightarrow 3\cdot\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=$$

$$=2\cdot\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

Simplificando:

$$3=\frac{2\cdot(x-5)}{6}\Rightarrow 9=x-5\Rightarrow x=14$$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación, resulta:

$$\binom{14}{y-2}=\binom{14}{y}\Rightarrow\quad y-2+y=14\Rightarrow 2y=16\Rightarrow\quad y=8$$

SOLUCIÓN: **x = 14 ; y = 8**

96. RESOLUCIÓN

$$5\binom{y}{2}=3\binom{y}{3}\Rightarrow 5\cdot\frac{y(y-1)}{2}=3\cdot\frac{y(y-1)(y-2)}{3\cdot2}$$

Simplificando: $5=y-2\Rightarrow y=7$

Sustituyendo este valor de $y=7$ *en la segunda ecuación resulta:*

$$\binom{x}{6}=\binom{x}{7}\Rightarrow 6+7=x\Rightarrow x=13$$

SOLUCIÓN: **x = 13 ; y = 7**

97. RESOLUCIÓN

$$\binom{x}{y+1}=\binom{x}{2y-1}\Rightarrow y+1+2y-1=x\Rightarrow 3y=x$$

Sustituyendo este valor en la otra ecuación, resulta:

$$\binom{3y}{y}=\frac{2}{3}\binom{3y}{y+2}$$

$$\frac{(3y)!}{y!\,(2y)!}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(3y)!}{(y+2)!\,[3y-(y+2)]!}$$

$$\frac{(3y)!}{y!\,(2y)!}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(3y)!}{(y+2)!\,(2y-2)!}$$

Teniendo en cuenta:

$$(2y)!=(2y)(2y-1)(2y-2)!$$

$$(y+2)!=(y+2)(y+1)\,y!$$

resulta:

$$\frac{(3y)!}{y!\,(2y)(2y-1)(2y-2)!}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(3y)!}{(y+2)(y+1)\,y!\,(2y-2)!}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{(2y)(2y-1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(y+2)(y+1)}$$

Efectuando operaciones: $5y^2-13y-6=0$;

$$y=3\ ;\ y=-2/5 \text{ no sirve}$$

Sustituyendo $y=3$ *en (1); resulta:* $x=9$

SOLUCIÓN: **x = 9 ; y = 3**

98. RESOLUCIÓN

1.ª parte:

$$\text{para } n=1 \text{ es: } 1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$$

2.ª parte:

para $n=m$ es:

$$1+2+3+\ldots+m=\frac{1}{2}m(m+1) \quad (1)$$

Sumando $m+1$ *a los dos miembros de (1), resulta:*

$$1+2+3+\ldots+m+m+1=\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)$$

o sea:

$$1+2+3+\ldots+m+m+1=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

El valor m + 1 *que hemos sumado a los dos miembros de (1) ha sido de hacer* n = m + 1 *en la igualdad dada.*

Si la igualdad es cierta para n = 1, *también es cierta para* n = m + 1, *y por tanto, para todo* n.

SOLUCIÓN: **para todo n**

99. RESOLUCIÓN

1.ª parte:

$$\text{para } n = 1 \text{ es: } 2 = 1 \cdot 2$$

2.ª parte:

$$\text{para } n = m \text{ es: } 2 + 4 + 6 + \ldots + 2m = m(m+1) \qquad (1)$$

Sumando 2 (m + 1) a los dos miembros de (1), resulta:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2m + 2(m+1) = m(m+1) + 2(m+1)$$

o sea:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2m + 2(m+1) = (m+1)(m+2)$$

La igualdad dada se verifica para n = 1, *también para* n = m + 1, *y, por tanto, para todo* n.

SOLUCIÓN: **para todo n**

100. RESOLUCIÓN

1.ª parte:

$$\text{para } n = 1 \text{ es: } 1 = 1^2$$

2.ª parte:

$$\text{para } n = m \text{ es: } 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2m-1) = m^2 \qquad (1)$$

Sumando a los dos miembros de (1) el número 2m + 1, *inmediato número impar positivo, resulta:*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2m-1) + (2m+1) = m^2 + 2m + 1$$

o sea:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2m+1) = (m+1)^2$$

La igualdad dada se verifica para n = 1, *también para* n = m + 1, *y, por tanto, para todo* n.

SOLUCIÓN: **para todo n**

101. RESOLUCIÓN

1.ª parte:

$$\text{para } n = 1 \text{ es: } 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

2.ª parte:

para n = m es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots m^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) \qquad (1)$$

Sumando $(m+1)^2$ a los dos miembros de (1), resulta:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 + (m+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2$$

Efectuando operaciones en el segundo miembro, resulta:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 + (m+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{1}{6}(m+1)[2m^2 + 7m + 6]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$$

La igualdad dada se verifica para todo n = 1 *y también para* n = m + 1, *y, por tanto, es cierta para todo* n.

SOLUCIÓN: **para todo n**

102. RESOLUCIÓN

I)

$$(a+2b)^2 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3 2b + \binom{4}{2}a^2(2b)^2 + \binom{4}{3}a(2b)^3 + \binom{4}{4}(2b)^4 =$$

$$= 1a^4 + 4a^3 2b + 6a^2 4b^2 + 4a\,8b^3 + 1 \cdot 16b^4 =$$

$$= a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{(a + 2b)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4}$

II)

$$(x+\sqrt{2})^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot \sqrt{2} + \binom{5}{2}x^3(\sqrt{2})^2 + \binom{5}{3}x^2(\sqrt{2})^3 +$$

$$\binom{5}{4}x(\sqrt{2})^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{2})^5 = 1 \cdot x^5 + 5x^4\sqrt{2} + 10x^3 \cdot 2 + 10x^2 \cdot 2\sqrt{2} +$$

$$+ 5x \cdot 4 + 1 \cdot 4\sqrt{2} = x^5 + 5\sqrt{2}x^4 + 20x^3 + 20\sqrt{2}x^2 +$$

$$+ 20x + 4\sqrt{2}$$

SOLUCION:

$\mathbf{(x + \sqrt{2})^5 = x^5 + 5\sqrt{2}x^4 + 20x^3 + 20\sqrt{2}x^2 + 20x + 4\sqrt{2}}$

III)

$$(a^{1/3} + b^{1/3})^5 = \binom{5}{0}(a^{1/3})^5 + \binom{5}{1}(a^{1/3})^4(b^{1/3}) + \binom{5}{2}(a^{1/3})^3(b^{1/3})^2 +$$

$$+ \binom{5}{3}(a^{1/3})^2(b^{1/3})^3 + \binom{5}{4}(a^{1/3})(b^{1/3})^4 + \binom{5}{5}(b^{1/3})^5 =$$

$$= a^{5/3} + 5a^{4/3}b^{1/3} + 10ab^{2/3} + 10a^{2/3}b + 5a^{1/3}b^{4/3} + b^{5/3}$$

SOLUCIÓN

$\mathbf{(a^{1/3} + b^{1/3})^5 = a^{5/3} + 5a^{4/3}b^{1/3} + 10ab^{2/3} + 10a^{2/3}b + 5a^{1/3}b^{4/3} + b^{5/3}}$

103. RESOLUCIÓN

I)

$$\left(2x + \frac{1}{4}y^3\right)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4\left(\frac{1}{4}y^3\right) + \binom{5}{2}(2x)^3\left(\frac{1}{4}y^3\right)^2 +$$

$$+ \binom{5}{3}(2x)^2\left(\frac{1}{4}y^3\right)^3 + \binom{5}{4}(2x)\left(\frac{1}{4}y^3\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}y^3\right)^5 =$$

$$= 32x^5 + 20x^4y^3 + 5x^3y^6 + \frac{5}{8}x^2y^9 + \frac{5}{128}xy^{12} + \frac{1}{1\,024}y^{15}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\left(2x + \frac{1}{4}y^3\right)^5 = 32x^5 + 20x^4y^3 + 5x^3y^6 + \frac{5}{8}x^2y^9 + \frac{5}{128}xy^{12} + \frac{1}{1\,024}y^{15}}$

II)

$$(x^2+y^2)^5 = \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4(y)^2 + \binom{5}{2}(x^2)^3(y^2)^2 +$$

$$+ \binom{5}{3}(x^2)^2(y^2)^3 + \binom{5}{4}(x^2)(y^2)^4 + \binom{5}{5}(y^2)^5 =$$

$$= x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10}$$

SOLUCION:

$\mathbf{(x^2 + y^2)^5 = x^{10} + 5x^8y^2 + 10^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10}}$

III)

$$(2xy + y^3)^4 = \binom{4}{0}(2xy)^4 + \binom{4}{1}(2xy)^3(y^3) + \binom{4}{2}(2xy)^2(y^3)^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}(2xy)(y^3)^3 + \binom{4}{4}(y^3)^4 =$$

$$= 16x^4y^4 + 32x^3y^6 + 24x^2y^8 + 8xy^{10} + y^{12}$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{(2xy + y^3)^4 = 16x^4y^4 + 32x^3y^6 + 24x^2y^8 + 8xy^{10} + y^{12}}$$

104. RESOLUCIÓN

I)

$$(3x^2 + 2y^3)^4 = \binom{4}{0}(3x^2)^4 + \binom{4}{1}(3x^2)^3(2y^3) + \binom{4}{2}(3x^2)^2(2y^3)^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}(3x^2)(2y^3)^3 + \binom{4}{4}(2y^3)^4 =$$

$$= 81x^8 + 216x^6y^3 + 216x^4y^6 + 96x^2y^9 + 16y^{12}$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{(3x^2 + 2y^3)^4 = 81x^8 + 261x^6y^3 + 216x^4y^6 + 96x^2y^9 + 16y^{12}}$$

II)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10} = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) +$$

$$+ \binom{10}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{2} + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{7}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{3} +$$

$$+ \binom{10}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{4} + \binom{10}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{5} +$$

$$+ \binom{10}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{6} + \binom{10}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{7} +$$

$$+ \binom{10}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{8} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{9} +$$

$$+ \binom{10}{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10} = \frac{1}{32} + \frac{5}{8x} + \frac{45}{8x^2} + \frac{30}{x^3} + \frac{105}{x^4} +$$

$$+ \frac{252}{x^5} + \frac{420}{x^6} + \frac{480}{x^7} + \frac{360}{x^8} + \frac{160}{x^9} + \frac{32}{x^{10}}$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10} = \frac{1}{32} + \frac{5}{8x} + \frac{45}{8x^2} + \frac{30}{x^3} + \frac{105}{x^4} + \frac{252}{x^5} + \frac{420}{x^6} + \frac{480}{x^7} + \frac{360}{x^8} + \frac{160}{x^9} + \frac{32}{x^{10}}}$$

III)

$$\left(2x + \frac{y}{3}\right)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3\left(\frac{y}{3}\right) + \binom{4}{2}(2x)^2\left(\frac{y}{3}\right)^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}(2x)\left(\frac{y}{3}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{y}{3}\right)^4 = 16x^4 + \frac{32}{3}x^3y + \frac{24}{9}x^2y^2 +$$

$$+ \frac{8}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\left(2x + \frac{y}{3}\right)^4 = 16x^4 + \frac{32}{3}x^3y + \frac{24}{9}x^2y^2 + \frac{8}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4}$$

105. RESOLUCIÓN

I)

$$(a - 1)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7(-1) + \binom{8}{2}a^6(-1)^2 + \binom{8}{3}a^5(-1)^3 +$$

$$+ \binom{8}{4}a^4(-1)^4 + \binom{8}{5}a^3(-1)^5 + \binom{8}{6}a^2(-1)^6 + \binom{8}{7}a(-1)^7 + \binom{8}{8}(-1)^8 =$$

$$= a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{(a - 1)^8 = a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1}$$

II)

$$(3x - 2y)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3(-2y) + \binom{4}{2}(3x)^2(-2y)^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}(3x)(-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4 =$$

$$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{(3x - 2y)^4 = 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4}$$

III)

$$\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^3\left(-\sqrt{x}\right) +$$

$$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(-\sqrt{x}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{x}\right)\left(-\sqrt{x}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(-\sqrt{x}\right)^4 =$$

$$\frac{16}{x^4} - \frac{32}{x^3}\sqrt{x} + \frac{24}{x} - 8\sqrt{x} + x^2$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^4 = \frac{16}{x^4} - \frac{32}{x^3}\sqrt{x} + \frac{24}{x} - 8\sqrt{x} + x^2}$$

106. RESOLUCIÓN

I)

$$(\sqrt{x} - \sqrt{2})^5 = \binom{5}{0}(\sqrt{x})^5 + \binom{5}{1}(\sqrt{x})^4(-\sqrt{2}) + \binom{5}{2}(\sqrt{x})^3(-\sqrt{2})^2 +$$

$$\binom{5}{3}(\sqrt{x})^2(-\sqrt{2})^3 + \binom{5}{4}(\sqrt{x})(-\sqrt{2})^4 + \binom{5}{5}(-\sqrt{2})^5 =$$

$$= x^2\sqrt{x} - 5x^2\sqrt{2} + 20x\sqrt{x} - 20x\sqrt{2} + 20\sqrt{x} - 4\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{(\sqrt{x} - \sqrt{2})^5 = x^2\sqrt{x} - 5x^2\sqrt{2} + 20x\sqrt{x} - 20x\sqrt{2} + 20\sqrt{x} - 4\sqrt{2}}$$

II)

$$(x^{3/5} - x^2)^4 = \binom{4}{0}(x^{3/5})^4 + \binom{4}{1}(x^{3/5})^3(-x^2) + \binom{4}{2}(x^{3/5})^2(-x^2)^2 +$$

$$\binom{4}{3}(x^{3/5})(-x^2)^3 + \binom{4}{4}(-x^2)^4 =$$

$$= x^{12/5} - 4x^{19/5} + 6x^{26/5} - 4x^{33/5} + x^8$$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x^{3/5} - x^2)^4 = x^{12/5} - 4x^{19/5} + 6x^{26/5} - 4x^{33/5} + x^8}$

III)

$$\left(\frac{x^2}{2}-3y\right)^6=\binom{6}{0}\left(\frac{x^2}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^5(-3y)+$$

$$+\binom{6}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4(-3y)^2+\binom{6}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3(-3y)^3+\binom{6}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2(-3y)^4+$$

$$+\binom{6}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)(-3y)^5+\binom{6}{6}(-3y)^6=\frac{x^{12}}{64}-\frac{9}{16}x^{10}y+$$

$$\frac{135}{16}x^8y^2-\frac{135}{2}x^6y^3+\frac{1\,215}{4}x^4y^4-729x^2y^5+729y^6$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\left(\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}}-\mathbf{3y}\right)^6=\frac{\mathbf{x^{12}}}{\mathbf{64}}-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}\mathbf{x^{10}y}+\frac{\mathbf{135}}{\mathbf{16}}\mathbf{x^8y^2}-\frac{\mathbf{135}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^6y^3}+\frac{\mathbf{1\,215}}{\mathbf{4}}\mathbf{x^4y^4}-\mathbf{729x^2y^5}+\mathbf{729y^6}}$$

107. RESOLUCIÓN

II)

$$(x+y)^5-(x-y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+$$

$$+\binom{5}{4}xy^4+\binom{5}{5}y^5-\left[\binom{5}{0}x^5-\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2-\binom{5}{3}x^2y^3+\right.$$

$$\left.+\binom{5}{4}xy^4-\binom{5}{5}y^5\right]=2\binom{5}{1}x^4y+2\binom{5}{3}x^2y^3+2\binom{5}{5}y^5=$$

$$=10x^4y+20x^2y^3+2y^5$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x+y)^5-(x-y)^5=10x^4y+20x^2y^3+2y^5}}$

108. RESOLUCIÓN

$$(1+\sqrt{y})^5+(1-\sqrt{y})^5=$$

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}\sqrt{y}+\binom{5}{2}(\sqrt{y})^2+\binom{5}{3}(\sqrt{y})^3+\binom{5}{4}(\sqrt{y})^4+\binom{5}{5}(\sqrt{y})^5+$$

$$+\left[\binom{5}{0}-\binom{5}{1}\sqrt{y}+\binom{5}{2}(\sqrt{y})^2-\binom{5}{3}(\sqrt{y})^3+\binom{5}{4}(\sqrt{y})^4-\binom{5}{5}(\sqrt{y})^5\right]=$$

$$=2\binom{5}{0}+2\binom{5}{2}(\sqrt{y})^2+2\binom{5}{4}(\sqrt{y})^4=2+20y+10y^2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(1+\sqrt{y})^5+(1-\sqrt{y})^5=2+20y+10y^2}}$

109. RESOLUCIÓN

$$(3-2\sqrt{3})^3-(3+2\sqrt{3})^3=$$

$$\binom{3}{0}3^3-\binom{3}{1}3^2(2\sqrt{3})+\binom{3}{2}3(2\sqrt{3})^2-\binom{3}{3}(2\sqrt{3})^3-$$

$$-\left[\binom{3}{0}3^3+\binom{3}{1}3^2(2\sqrt{3})+\binom{3}{2}3(2\sqrt{3})^2+\binom{3}{3}(2\sqrt{3})^3\right]=$$

$$=-2\binom{3}{1}3^2(2\sqrt{3})-2\binom{3}{3}(2\sqrt{3})^3=-156\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(3-2\sqrt{3})^3-(3+2\sqrt{3})^3=-156\sqrt{3}}}$

110. RESOLUCIÓN

I)

$$(0,99)^3=(1-0,01)^3=\left(1-\frac{1}{10^2}\right)^3=\binom{3}{0}-\binom{3}{1}\frac{1}{10^2}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^2-$$

$$-\binom{3}{3}\left(\frac{1}{10^2}\right)^3=1-\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^4}-\frac{1}{10^6}=$$

$$=1-0,03+0,0003-0,000001=1,0003-0,030001=$$

$$=0,970299\simeq0,970$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{(0,99)^3\simeq0,970}}$

II)

$$(3,01)^4=(3+0,01)^4=$$

$$=\left(3+\frac{1}{10^2}\right)^4=\binom{4}{0}3^4+\binom{4}{1}3^3\frac{1}{10^2}+\binom{4}{2}3^2\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\binom{4}{3}3\left(\frac{1}{10^2}\right)^3+$$

$$+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{10^2}\right)^4\simeq82,085$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\mathbf{(3,01)^4\simeq82,085}}$

III)

$$(1,98)^5=(2-0,02)^5=$$

$$=\left(2-\frac{2}{10^2}\right)^5=\binom{5}{0}2^5-\binom{5}{1}2^4\left(\frac{2}{10^2}\right)+\binom{5}{2}2^3\left(\frac{2}{10^2}\right)^2-\binom{5}{3}2^2\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+$$

$$+\binom{5}{4}2\left(\frac{2}{10^2}\right)^4-\binom{5}{5}\left(\frac{2}{10^2}\right)^5\simeq30,432$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\mathbf{(1,98)^5\simeq30,432}}$

111. RESOLUCIÓN

I)

$$T_{5+1}=T_6=\binom{9}{5}(3a)^{9-5}(b)^5=\binom{9}{5}(3a)^4(b)^5=10\,206a^4b^5$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{T_6=10\,206\,a^4b^5}}$

II)

$$T_{2+1}=T_3=\binom{5}{2}\left(\frac{a\sqrt{x}}{3}\right)^{5-2}\left(\frac{1}{a}\right)^2=\binom{5}{2}\left(\frac{a\sqrt{x}}{3}\right)^3\left(\frac{1}{a}\right)^2=$$

$$=\frac{10}{27}ax\sqrt{x}$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\mathbf{T_3=\frac{10}{27}ax\sqrt{x}}}$

III)

$$T_{7+1}=T_8=\binom{12}{7}(2a)^{12-7}(-y)^7=\binom{12}{7}(2a)^5(-y)^7=-25\,344a^5y^7$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\mathbf{T_8=-25\,344\,a^5y^7}}$

112. RESOLUCIÓN

I)

$$T_{5+1}=T_6=\binom{8}{5}(x)^{8-5}(-2y)^5=\binom{8}{5}x^3(-2y)^5=-1\,792x^3y^5$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{T_6=-1\,792\,x^3y^5}}$

II)

$$T_{13+1}=T_{14}=\binom{17}{13}(x)^{17-13}(3y)^{13}=\binom{17}{13}x^4(3y)^{13}=2\,380\,x^4(3y)^{13}$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{T_{14}=2\,380\,x^4(3y)^{13}}}$

III)

$$T_{22+1}=T_{23}=\binom{25}{22}(x)^{25-22}\left(\frac{b}{x}\right)^{22}=\binom{25}{22}x^3\left(\frac{b}{x}\right)^{22}=2\,300\,\frac{b^{22}}{x^{19}}$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{T_{23}=2\,300\,\frac{b^{22}}{x^{19}}}}$

113. RESOLUCIÓN

I)

Es el 6.° término: $\binom{10}{5} x^{10-5} y^5 = 252\,x^5 y^5$

SOLUCIÓN I): $\boxed{T_6 = 252\,x^5 y^5}$

II)

Es el 6.° término: $-\binom{10}{5} x^{10-5}\left(\frac{y}{2}\right)^5 = -\frac{63}{8}x^5y^5$

SOLUCIÓN II): $\boxed{T_6 = -\frac{63}{8}\,x^5 y^5}$

III)

Es el 8.° término:

$$-\binom{14}{7}\left(\frac{a-2}{3}\right)^{14-7}\left(\frac{2}{b-2}\right)^7 = -\frac{146\,432}{729}\cdot\frac{(a-2)^7}{(b-2)^7}$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{T_8 = -\frac{146\,432}{729}\;\frac{(a-2)^7}{(b-2)^7}}$

114. RESOLUCIÓN

I)

Son el 3.° y 4.° términos:

$$\binom{5}{2}(3x^2y)^{5-2}(b^2)^2 = \binom{5}{2}(3x^2y)^3 b^4 = 270\,b^4x^6y^3$$

$$\binom{5}{3}(3x^2y)^{5-3}(b^2)^3 = \binom{5}{3}(3x^2y)^2 b^6 = 90\,b^6x^4y^2$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{T_3 = 270\,b^4x^6y^3 \quad T_4 = 90\,b^6x^4y^2}$

II)

Son el 3.° y 4.° términos:

$$\binom{5}{2}2^{5-2}(\sqrt{3})^2 = \binom{5}{2}2^3\,3 = 240$$

$$-\binom{5}{3}2^{5-3}(\sqrt{3})^3 = -\binom{5}{2}2^2\,3\sqrt{3} = -120\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{T_3 = 240 \quad T_4 = -120\sqrt{3}}$

115. RESOLUCIÓN

I)

$\binom{10}{n}3^{10-n}\cdot 4^n x^{10-n}$ *Luego:* $x^{10-n} = x^4 \Rightarrow 10-n=4 \Rightarrow n=6$

$$\binom{10}{6}(3x)^{10-6}(4)^6 = \binom{10}{6}3^4\cdot 4^6\cdot x^4 = 69\,672\,960\,x^4$$

SOLUCIÓN I): **Su coeficiente es: 69 672 960**

II)

$$\binom{7}{n}(2x)^{7-n}\left(\frac{5}{x}\right)^n = \binom{7}{n}2^{7-n}\cdot x^{7-n}5^n\cdot\frac{1}{x^n} = \binom{7}{n}2^{7-n}\cdot 5^n x^{7-2n}$$

Luego:

$x^{7-2n} = x \Rightarrow 7-2n=1 \Rightarrow n=3$

SOLUCIÓN II): **Su coeficiente es:** $\boxed{\binom{7}{3}2^4\cdot 5^3 = 70\,000}$

III)

$$\binom{10}{n}(x^2)^{10-n}(2x)^n = \binom{10}{n}2^n\cdot x^{20-2n}\cdot x^n = \binom{10}{n}2^n\cdot x^{20-n}$$

Luego:

$x^{20-n} = x^{12} \Rightarrow 20-n=12 \Rightarrow n=8$

SOLUCIÓN III): **Su coeficiente es:** $\boxed{\binom{10}{8}2^8 = 11\,520}$

IV)

$$\binom{11}{n}(x^2)^{11-n}\left(\frac{2}{x}\right)^n = \binom{11}{n}2^n\cdot x^{22-3n}$$

Luego:

$x^{22-3n} = x^4 \Rightarrow 22-3n=4 \Rightarrow n=6$

SOLUCIÓN IV): **Su coeficientes es:** $\boxed{\binom{11}{6}2^6 = 29\,568}$

116. RESOLUCIÓN

I)

$$(-1)^n\binom{7}{n}(3x)^{7-n}\left(\frac{1}{x}\right)^n = (-1)^n\binom{7}{n}3^{7-n}x^{7-2n}$$

Luego:

$x^{7-2n} = x^5 \Rightarrow 7-2n=5 \Rightarrow n=1$

SOLUCIÓN I):

El término es: $\boxed{(-1)^1\binom{7}{1}3^6x^5 = -7\cdot 3^6\cdot x^5 = -5\,103x^5}$

II)

$$\binom{10}{n}(x^2)^{10-n}(2x)^n = \binom{10}{n}x^{20-2n}\cdot 2^n\cdot x^n = \binom{10}{n}2^n x^{20-n}$$

Luego:

$x^{20-n} = x^{12} \Rightarrow 20-n=12 \Rightarrow n=8$

SOLUCIÓN II): **El término es:** $\boxed{\binom{10}{8}2^8\cdot x^{12} = 11\,520x^{12}}$

III)

$$(-1)^n\binom{15}{n}(x^3)^{15-n}(\sqrt{x})^n = (-1)^n\binom{15}{n}x^{45-3n}\cdot x^{n/2} =$$

$$= (-1)^n\binom{15}{n}x^{45-3n+n/2}$$

$$x^{45-3n+n/2} = x^{30} \Rightarrow 45-3n+\frac{n}{2} = 30 \Rightarrow n=6$$

SOLUCIÓN III): **El término es:** $\boxed{(-1)^6\binom{15}{6}x^{30} = 5\,005x^{30}}$

IV)

$$\binom{5}{n}\left(\frac{2}{3}x\right)^{5-n}(x^2)^n = \binom{5}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-n}x^{5-n}\cdot x^{2n} = \binom{5}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-n}x^{5+n}$$

Luego:

$x^{5+n} = x^7 \Rightarrow 5+n=7 \Rightarrow n=2$

SOLUCIÓN IV): **El término es:** $\boxed{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3x^7 = \left(\frac{80}{27}\right)x^7}$

117. RESOLUCIÓN

$$\binom{n}{n-1}2(ax)^{n-1} = 40x^3 \Rightarrow \binom{n}{n-1}2a^{n-1}x^{n-1} = 40x^3$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l}\binom{n}{n-1}2a^{n-1} = 40\\[6pt] x^{n-1} = x^3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}n-1=3 \Rightarrow n=4\\[6pt] \binom{4}{3}2a^3 = 40 \Rightarrow a = \sqrt[3]{5}\end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a = \sqrt[3]{5}\;;\; n=4}$

118. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l}\binom{x}{1}2y = 16 \\ \binom{x}{2}(2y)^2 = 96\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot 2y = 16 \\ \dfrac{x(x-1)}{2} \cdot 4y^2 = 96\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 8 \\ x(x-1)\,y^2 = 48\end{array}\right\}$$

$y = \dfrac{8}{x}$ luego: $x(x-1)\dfrac{64}{x^2} = 48 \Rightarrow (x-1)\,64 = 48x \Rightarrow x = 4$

para $x = 4 \Rightarrow y = \dfrac{8}{4} = 2$

SOLUCIÓN: **x = 4 ; y = 2**

119. RESOLUCIÓN

Los términos 5.° y 7.° son: $\binom{n}{4}(2x)^4$ y $\binom{n}{6}(2x)^6$

Los coeficientes de «x» en dichos términos serán: $\binom{n}{4}2^4$ y $\binom{n}{6}2^6$

Teniendo en cuenta el enunciado será:

$$\left.\begin{array}{l}\binom{n}{4}2^4 = 1\,120 \\ \binom{n}{6}2^6 = 1\,792\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot 2^4 = 1\,120 \qquad (1) \\ \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot 2^6 = \\ = 1\,792 \qquad (2)\end{array}$$

Dividiendo (2) entre (1), se tendrá:

$\dfrac{(n-4)(n-5)}{6\cdot5}\cdot 2^2 = \dfrac{1\,792}{1\,120} \Rightarrow (n-4)(n-5) = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \quad ; \quad n = 8 \quad ; \quad n = 1$ no sirve

SOLUCIÓN: **n = 8**

120. RESOLUCIÓN

I)

$(x^2 + 2x + 1)^3 = [(x^2 + 2x) + 1]^3 =$

$= \binom{3}{0}(x^2 + 2x)^3 + \binom{3}{1}(x^2 + 2x)^2 + \binom{3}{2}(x^2 + 2x) + \binom{3}{3} =$

$= (x^2 + 2x)^3 + 3(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) + 1 =$

$= x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3 + 3(x^4 + 4x^3 + 4x^2) + 3(x^2 + 2x) + 1 =$

$= x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3 + 3x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 3x^2 + 6x + 1 =$

$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

SOLUCIÓN I):

$\mathbf{(x^2 + 2x + 1)^3 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$

II)

$(3x - 2y + 1)^3 = [(3x - 2y) + 1]^3 =$

$= \binom{3}{0}(3x - 2y)^3 + \binom{3}{1}(3x - 2y)^2 + \binom{3}{2}(3x - 2y) + \binom{3}{3} =$

$= (3x - 2y)^3 + 3(3x - 2y)^2 + 3(3x - 2y) + 1 =$

$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 + 3(9x^2 - 12xy + 4y^2) + 9x -$

$- 6y + 1 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 + 27x^2 - 36xy + 9x$

$+ 12y^2 - 6y + 1 = 27x^3 - 54x^2y + 27x^2 + 36xy^2 - 36xy + 9x -$

$- 8y^3 + 12y^2 - 6y + 1$

SOLUCIÓN II):

$\mathbf{(3x - 2y + 1)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 27x^2 + 36xy^2 - 36xy + 9x - 8y^3 + 12y^2 - 6y + 1}$

121. RESOLUCIÓN

I)

$(1 + 2x + 3x^2)^2 =$

$= 1 + (2x)^2 + (3x^2)^2 + 2(2x) + 2(3x^2) + 2(2x)(3x^2) =$

$= 1 + 4x^2 + 9x^4 + 4x + 6x^2 + 12x^3 =$

$= 1 + 4x + 10x^2 + 12x^3 + 9x^4$

SOLUCIÓN I): $\mathbf{(1 + 2x + 3x^2)^2 = 1 + 4x + 10x^2 + 12x^3 + 9x^4}$

II)

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 =$

$= 1 + 4x^2 + 9x^4 + 16x^6 + 25x^8 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + 10x^4 +$

$+ 12x^3 + 16x^4 + 20x^5 + 24x^5 + 30x^6 + 40x^7 =$

$= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 44x^5 + 46x^6 + 40x^7 + 25x^8$

SOLUCIÓN II):

$\mathbf{(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 =}$
$\mathbf{= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 44x^5 + 46x^6 + 40x^7 + 25x^8}$

122. RESOLUCIÓN

I)

$(x + y + z + t)^2 =$

$= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt$

II)

$(x - y + z - t)^2 =$

$= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy + 2xz - 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$

123. RESOLUCIÓN

$(1 + x + x^2)^3 = [(1 + x) + x^2]^3 =$

$= \binom{3}{0}(1 + x)^3 + \binom{3}{1}(1 + x)^2 x^2 + \binom{3}{2}(1 + x)(x^2)^2 + \binom{3}{3}(x^2)^3 =$

$= \binom{3}{0}(1 + 3x + 3x^2 + x^3) + \binom{3}{1}(1 + 2x + x^2)x^2 + \binom{3}{2}(1 + x)x^4 +$

$+ \binom{3}{3}x^6 = (1 + 3x + 3x^2 + x^3) + 3(x^2 + 2x^3 + x^4) + 3(x^4 + x^5) +$

$+ x^6 = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$

SOLUCIÓN: $\mathbf{(1 + x + x^2)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6}$

124. RESOLUCIÓN

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z +$

$+ 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$

Bloque 2

- ✔ Operaciones con potencias y radicales
- ✔ Operaciones con fracciones algebraicas
- ✔ Operaciones con fracciones algebraicas
- ✔ Regla de Ruffini

OPERACIONES CON POTENCIAS Y RADICALES

Potencias de exponente natural

Si $a \in \mathbf{R}$ *y* $n \in \mathbf{N}$ *siendo* $n > 1$. *Se define:*

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{\text{n veces}} \begin{cases} a^n \text{ es la potencia n-ésima} \\ a \text{ es la base} \\ n \text{ es el exponente} \end{cases}$$

Por convenio: $a^0 = 1$ *y* $a^1 = a$

Propiedades de las potencias de exponente natural

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(m > n)$

III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

IV. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$

Potencias de exponente entero

Si $a \in \mathbf{R}$ *y* $n \in \mathbf{Z}$, *siendo* $n > 0$ *y* $a \neq 0$. *Se define:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades de las potencias de exponente entero

Además de las propiedades anteriores, se verifican:

I. $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$

II. $\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m-(-n)} = a^{-m+n}$

III. $(a^{-m})^{-n} = a^{m \cdot n}$

IV. $(a \cdot b)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$; $b \neq 0$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}}$; $b \neq 0$

Raíz n-ésima

Si $a \in \mathbf{R}$ *y* $n \in \mathbf{N}$ *siendo* $n \neq 0$. *Se define:*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \begin{cases} \sqrt[n]{a} \text{ es la raíz n-ésima de a} \\ a \text{ es el radicando} \\ n \text{ es el índice} \end{cases}$$

Propiedades de los radicales

I. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

II. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

III. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

IV. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Transformación de radicales

I. *Teorema fundamental:*

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ *o* $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

II. *Simplificación de radicales:*

Para simplicar lo más posible un radical se dividen el índice y el exponente del radicando por el m.c.d. de ambos.

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}}$ *siendo m.c.d.* $(n, m) = p$

Extracción de factores de un radical

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nc+r}} = \sqrt[n]{a^{nc} \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^{nc}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$

siendo $m = n \cdot c + r$

Introducción de factores bajo el signo radical

Para introducir un factor en un radical se multiplica su exponente por el índice de la raíz.

$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a}$

Radicales semejantes

Son los que tienen el mismo índice e igual radicando.

$b\sqrt{a}$; $c\sqrt{a}$

Suma algebraica de radicales

Es necesario que sean semejantes:

$a\sqrt{a} + b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (a + b + c)\sqrt{a}$

Reducción de radicales a índice común

Se halla el m.c.m. de los índices y se multiplica el exponente de cada uno de ellos por el cociente que resulta al dividir dicho m.c.m. entre el índice respectivo.

$$\sqrt[m]{a^p} \;;\; \sqrt[q]{b^s} \;\; \textit{m.c.m.}\ (m, q) = n \begin{cases} \dfrac{n}{m} = r \\ \\ \dfrac{n}{q} = t \end{cases}$$

$\sqrt[n]{a^{pr}}$, $\sqrt[n]{b^{st}}$

Multiplicación y división de radicales

I. *Para multiplicar o dividir radicales del mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos y se deja el mismo índice.*

II. *Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, se reduce a índice común y se aplica* **I**.

Racionalización de denominadores

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarla en otra equivalente cuyo denominador sea un número racional.

1.^{er} CASO: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

2.º CASO: $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$

3.^{er} CASO: $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

Se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador.

$\sqrt{b} \pm \sqrt{c}$ *será* $\sqrt{b} \mp \sqrt{c}$

Exponente fraccionario

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$; $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{1}{a^{m/n}} = a^{-m/n}$

Propiedades de las potencias de exponente fraccionario

I. $a^{m/n} \cdot a^{p/q} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$

II. $a^{m/n} : a^{p/q} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$

III. $(a^{m/n})^{p/q} = a^{\frac{mp}{nq}}$

IV. $(a \cdot b)^{m/n} = a^{m/n} \cdot b^{m/n}$

V. $(a : b)^{m/n} = a^{m/n} : b^{m/n}$

VI. $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{m/n}} = a^{\frac{m}{n} : \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{np}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: 3^0

SOLUCIÓN: 1

2. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $8x^0$

SOLUCIÓN: 8

3. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(8x)^0$

SOLUCIÓN: 1

4. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: 7^1

SOLUCIÓN: 7

5. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(3x)^1$

SOLUCIÓN: $3x$

6. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: 5^{-3}

SOLUCIÓN: $\frac{1}{125}$

7. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(-2)^{-4}$

SOLUCIÓN: $\frac{1}{16}$

8. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: 10^{-2}

SOLUCIÓN: $\frac{1}{100}$

9. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $3^2 \cdot 3^3$

SOLUCIÓN: 243

10. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $x^{-3} \cdot x^{-4} \cdot x^{-5}$

SOLUCIÓN: $\frac{1}{x^{12}}$

11. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $6^4 : 6^3$

SOLUCIÓN: 6

12. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $16^{-2} : 16^{-4}$

SOLUCIÓN: 256

13. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(2^3)^2$

SOLUCIÓN: 64

14. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(x^3)^4$

SOLUCIÓN: x^{12}

15. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(2 \cdot 3)^3$

SOLUCIÓN: 216

16. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(x^{2m} \cdot x^{3n})^4$

SOLUCIÓN: $x^{8m} \cdot x^{12n}$

17. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(a^{-4})^{-3/4}$

SOLUCIÓN: a^3

18. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN: $\frac{9}{4}$

19. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$

SOLUCIÓN: -5

20. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN: $\frac{4}{9}$

21. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(-6)^2 : (-6)^2$

SOLUCIÓN: 1

22. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(2^{-6})^{2/3}$

SOLUCIÓN: $\frac{1}{16}$

23. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $a^{-2/3} : a^{-2/3}$

SOLUCIÓN: 1

24. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(-45)^4 : 9^4$

SOLUCIÓN: 625

25. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $60^3 : 15^3$

SOLUCIÓN: 64

26. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $[(-5)^2]^3$

SOLUCIÓN: $15\,625$

27. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4$

SOLUCIÓN: **512**

28. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $(3^2)^5 : 3^5$

SOLUCIÓN: **243**

29. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-4}$

SOLUCIÓN: **3**

30. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{243}{32}}$

31. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{4}{3}\right)\right]^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{27}}$

32. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left[\frac{(-2)^3 \cdot (-3)}{4}\right]^2$

SOLUCIÓN: **36**

33. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $[(2^2)^3]^{-4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{2^{24}}}$

34. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(5 - \frac{1}{5}\right)^{-1}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{5}{24}}$

35. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(\frac{1}{2} - 5\right)^{-2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{4}{81}}$

36. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{3}\right)(-3)\right]^{-2}$

SOLUCIÓN: **9**

37. Efectuar la siguiente operación simplificando el resultado todo lo posible: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{2}}$

38. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt{4}$

SOLUCIÓN: **± 2**

39. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt{\frac{36}{4}}$

SOLUCIÓN: **± 3**

40. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[3]{8}$

SOLUCIÓN: **2**

41. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[3]{343}$

SOLUCIÓN: **7**

42. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[4]{81}$

SOLUCIÓN: **± 3**

43. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[4]{625}$

SOLUCIÓN: **± 5**

44. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{5}{3}}$

45. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[5]{\frac{3\,125}{32}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{5}{2}}$

46. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[6]{1\ 000\ 000}$

SOLUCIÓN: **± 10**

47. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[7]{-128}$

SOLUCIÓN: **−2**

48. Calcular la siguiente raíz: $\sqrt[8]{-256}$

SOLUCIÓN: **No tiene**

49. Hallar el valor aritmético de la siguiente raíz: $\sqrt{121}$

SOLUCIÓN: **11**

50. Hallar el valor aritmético de la siguiente raíz: $\sqrt[3]{27}$

SOLUCIÓN: **3**

51. Hallar el valor aritmético de la siguiente raíz: $\sqrt[4]{81}$

SOLUCIÓN: **3**

52. Hallar el valor aritmético de la siguiente raíz: $\sqrt[5]{-32}$

SOLUCIÓN: **− 2**

53. Hallar el valor aritmético de la siguiente raíz: $\sqrt{\frac{9}{16}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{3}{4}}$

54. Hallar el valor aritmético de la siguiente raíz: $\sqrt[4]{-81}$

SOLUCIÓN: **No tiene**

55. Expresar mediante un solo radical: $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[6]{5}$

56. Expresar mediante un solo radical: $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[10]{a}$

57. Expresar mediante un solo radical: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[15]{7}$

58. Expresar mediante un solo radical: $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[24]{5}$

59. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[4]{4}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{2}$

60. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[6]{125}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{5}$

61. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[18]{a^{12}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{a^2}$

62. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[6]{625}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{5^2}$

63. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[12]{27}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[4]{3}$

64. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[4]{a^2b^6}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{ab^3}$

65. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{a^2}$

66. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[9]{27a^3b^6}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{3ab^2}$

67. Simplificar el siguiente radical: $\sqrt[10]{4a^6b^4}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[5]{2a^3b^2}$

68. Simplificar el siguiente radical. $\sqrt[14]{128x^7y^{21}}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{2xy^3}$

69. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{8}$

SOLUCIÓN: $2\sqrt{2}$

70. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{16a}$

SOLUCIÓN: $4\sqrt{a}$

71. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{a^3}$

SOLUCIÓN: $a\sqrt{a}$

72. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt[3]{81}$

SOLUCIÓN: $3\sqrt[3]{3}$

73. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt[4]{128}$

SOLUCIÓN: $2\sqrt[4]{8}$

74. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{4x^3}$

SOLUCIÓN: $2x\sqrt{x}$

75. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt[3]{a^5}$

SOLUCIÓN: $a\sqrt[3]{a^2}$

76. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt[4]{a^2b^6}$

SOLUCIÓN: $b\sqrt{ab}$

77. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{(a+b)^2x}$

SOLUCIÓN: $(a+b)\sqrt{x}$

78. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{(a-b)^3x^2}$

SOLUCIÓN: $(a-b)x\sqrt{a-b}$

79. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{27(a-b)^3}$

SOLUCIÓN: $3(a-b)\sqrt{3(a-b)}$

80. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt[4]{32a^7b^9}$

SOLUCIÓN: $2ab^2\sqrt[4]{2a^3b}$

81. Extraer factores del siguiente radical: $\sqrt{12a^3b^5}$

SOLUCIÓN: $2ab^2\sqrt{3ab}$

82. Introducir dentro del radical el factor: $4\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{32}$

83. Introducir dentro del radical todos los factores: $3a\sqrt{2b}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{18a^2b}$

84. Introducir dentro del radical todos los factores: $3a\sqrt[3]{a^2b}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{27a^5b}$

85. Introducir dentro del radical el factor: $2\sqrt{a+1}$

SOLUCIÓN: $\sqrt{4(a+1)}$

86. Introducir dentro del radical todos los factores: $5x^2\sqrt[7]{y^3z^3}$

SOLUCIÓN: $\sqrt[7]{5^7x^{14}y^3z^3}$

87. Introducir dentro del radical todos los factores: $a^2b^3\sqrt[5]{bc^4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[5]{a^{10}b^{16}c^4}}$

88. Introducir dentro del radical todos los factores: $\sqrt{a\sqrt{5b}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[4]{5a^2b}}$

89. Averiguar si los radicales siguientes son semejantes: $3\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{80}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

90. Averiguar si los radicales siguientes son semejantes: $5\sqrt{3}$, $\sqrt{48}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

91. Averiguar si los radicales siguientes son semejantes: $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{18}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

92. Averiguar si los radicales siguientes son semejantes: $a\sqrt{9b}$, $\sqrt{a^2b}$, $3\sqrt{b}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

93. Averiguar si los radicales siguientes son semejantes: $\sqrt{48ab^2}$, $b\sqrt{75a}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

94. Efectuar la siguiente suma algebraica: $8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{10\sqrt{2}}$

95. Efectuar la siguiente suma algebraica:

$6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{7}{4}\sqrt{2}}$

96. Efectuar la siguiente suma algebráica: $\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{300}$

SOLUCIÓN: $\boxed{11\sqrt{3}}$

97. Efectuar la siguiente suma algebraica: $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{98}$

SOLUCIÓN: $\boxed{12\sqrt{2}}$

98. Efectuar la siguiente suma algebraica: $\sqrt{45} - \sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{180}$

SOLUCIÓN: $\boxed{3\sqrt{5}}$

99. Efectuar la siguiente suma algebraica: $5\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{8ab}$

SOLUCIÓN: $\boxed{7\sqrt[3]{ab}}$

100. Efectuar la siguiente suma algebraica: $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}$

SOLUCIÓN: $\boxed{6\sqrt[3]{2}}$

101. Efectuar la siguiente suma algebraica: $\sqrt{a^5b} + \sqrt{ab^5} - \sqrt{4a^3b^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{(a - b)^2\sqrt{ab}}$

102. Calcular el siguiente producto: $3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{32}$

SOLUCIÓN: $\boxed{24\sqrt{6}}$

103. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{a^2bc^2}}$

104. Calcular el siguiente producto: $\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a + b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{a^2 - b^2}}$

105. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{5ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^4b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{ab\sqrt[3]{20a^2}}$

106. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[5]{a^4b^3c^2d} \cdot \sqrt[5]{a^3b^4c^2} \cdot \sqrt[5]{ab^3c^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{ab^2c\sqrt[5]{a^3c^2d}}$

107. Calcular el siguiente producto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}}$

108. Calcular el siguiente producto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}}$

109. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3}}$

110. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{10}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[12]{5^3 \cdot 10^2}}$

111. Calcular el siguiente producto: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[12]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^3}}$

112. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{a^2bc^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}}$

113. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[5]{a^2b^4c}$

SOLUCIÓN: $\boxed{b\sqrt[15]{a^{11}b^7c^3}}$

114. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{a^2b^3c} \cdot \sqrt[8]{ab^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{ab\sqrt[24]{a^7b^8c^6}}$

115. Calcular el siguiente producto: $5a\sqrt{a} \cdot ab\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[5]{c^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{5a^2b\sqrt[30]{a^{15}b^{20}c^{12}}}$

116. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[3]{a^2bc^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}}$

117. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{2a^2} \cdot 3\sqrt[4]{8a^3} \cdot 5\sqrt[12]{16a^5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{30\,a^2\,\sqrt[4]{8a}}}$

118. Calcular el siguiente producto: $\sqrt[3]{4x^2y^3z} \cdot \sqrt[3]{xz^2} \cdot \sqrt[6]{4x^2yz}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2xyz\,\sqrt[6]{x^2yz}}}$

119. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4}}$

120. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{81}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{11}{9}}}$

121. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{16}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{5}{2}}}$

122. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3}}$

123. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2}}$

124. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{6\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{12}}$

125. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt{x}^3}{\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x}}$

126. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{8\sqrt{x^5y^3}}{\sqrt{x^3y}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8xy}}$

127. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt{a - b}}}$

128. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[3]{a^6b^4}}{\sqrt[3]{a^2b}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{ab\sqrt[3]{a}}}$

129. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[3]{a}^2}{\sqrt{a}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[6]{a}}}$

130. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt{5}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[4]{\dfrac{4}{5}}}}$

131. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[6]{\dfrac{125}{4}}}}$

132. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt{ab}^3}{\sqrt[4]{a^2b^2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{b}}$

133. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[6]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[6]{ab^5}}}$

134. Calcular el siguiente cociente: $\dfrac{\sqrt[5]{3a^3b}}{\sqrt[3]{ab^2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[15]{\dfrac{27a^4}{b^7}}}}$

135. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción: $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{5\sqrt{3}}{3}}}$

136. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción: $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{5\sqrt{2}}{6}}}$

137. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción: $\dfrac{7}{4\sqrt{11}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{7\sqrt{11}}{44}}}$

138. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}}}$

139. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción: $\dfrac{3}{\sqrt[5]{4}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{3\sqrt[5]{4^4}}{4}}}$

140. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción: $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[6]{3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{\sqrt[6]{7^3 \cdot 3^5}}{3}}}$

141. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:

$\dfrac{2}{6 + \sqrt{3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{2\,(6 - \sqrt{3})}{33}}}$

142. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:

$\dfrac{\sqrt{5}}{3 + \sqrt{7}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\dfrac{3\sqrt{5} - \sqrt{35}}{2}}}$

143. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:

$\dfrac{6}{\sqrt{11} + 3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3\,(\sqrt{11} - 3)}}$

144. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{5}{4-\sqrt{13}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{5(4+\sqrt{13})}{3}}$

145. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{7}{\sqrt{15}-2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{7(\sqrt{15}+2)}{11}}$

146. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{2-\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{2\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{30}}$

147. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{4}}$

148. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

149. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}}$

150. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{11}{\sqrt{19}+\sqrt{7}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{11(\sqrt{19}-\sqrt{7})}{12}}$

151. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

152. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{11}-\sqrt{8}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{\sqrt{13}(\sqrt{11}+\sqrt{8})}{3}}$

153. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{5+2\sqrt{6}}$

154. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}}$

155. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{5}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{6}}$

156. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{2-\sqrt{3}}$

157. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{5-3\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{43-30\sqrt{2}}{7}}$

158. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{x+2}}$

159. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{3(2-x)}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{3\sqrt[3]{2-x}}$

160. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}}$

161. Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:
$$\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x-2\sqrt{x}}{x(x-4)}}$

162. Efectuar la siguiente operación: $100^{1/2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{10}$

163. Efectuar la siguiente operación: $81^{3/4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{27}$

164. Efectuar la siguiente operación: $4^{-5/2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{32}}$

165. Efectuar la siguiente operación: $64^{1/6}$

SOLUCIÓN: $\boxed{2}$

166. Efectuar la siguiente operación: $125^{-2/3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{25}}$

167. Efectuar la siguiente operación: $25^{1/4} \cdot 25^{1/4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{5}$

168. Efectuar la siguiente operación: $x^{1/4} \cdot x^{1/5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{x^{9/20}}$

169. Efectuar la siguiente operación: $a^{-3} \cdot a^{5} \cdot a^{3/4}$

$\boxed{a^2 \sqrt[4]{a^3}}$

170. Efectuar la siguiente operación: $a^{7/4} \cdot a^{-1/2} \cdot a^{-1/5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a\sqrt[20]{a}}$

171. Efectuar la siguiente operación: $a^{-2/3} : a^{-2/3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{1}$

172. Efectuar la siguiente operación: $5^{-1/3} \cdot 5^{3/4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[12]{5^5}}$

173. Efectuar la siguiente operación: $a^{3/4} \cdot b^{2/5} : a^{7/8} \cdot b^{-1/2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a^{-1/8} \cdot b^{9/10}}$

174. Efectuar la siguiente operación: $(a^{3/4})^{8/3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a^2}$

175. Efectuar la siguiente operación: $(x^{1/4})^{-1/5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{\sqrt[20]{x}}}$

176. Efectuar la siguiente operación: $(2^{-6})^{2/3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{16}}$

177. Efectuar la siguiente operación: $(b^{-5/6})^{12}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{b^{10}}}$

178. Efectuar la siguiente operación: $(a^{-4})^{-3/4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a^3}$

179. Efectuar la siguiente operación: $(2a^{-1/2} \cdot b^{3/4})^6$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{64b^4\sqrt{b}}{a^3}}$

180. Efectuar la siguiente operación: $(a^{2/3})^{1/2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{a}}$

181. Efectuar la siguiente operación: $\dfrac{30\, a^2 \cdot b \cdot c^{2/3}}{5\, a^{3/4} \cdot b^{1/2} \cdot c^{1/3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{6\, a^{5/4} \cdot b^{1/2} \cdot c^{1/3}}$

182. Efectuar la siguiente operación: $\dfrac{[(81)^{3/4}]^{1/3}}{(25^{-2})^{-2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{3}{5^8}}$

183. Efectuar la siguiente operación: $\sqrt{a^{3/2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[4]{a^3}}$

184. Efectuar la siguiente operación: $\sqrt{a^{-2/3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}}$

185. Efectuar la siguiente operación: $\sqrt{16a^{2/5}b^{2/3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{4a^{3/10} \cdot b^{1/3}}$

186. Efectuar la siguiente operación: $\sqrt{a^{1/3}\sqrt[3]{a}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{a}}$

187. Efectuar la siguiente operación: $\sqrt[3]{27a^{1/4}b^{2/5}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{3a^{1/12} \cdot b^{2/15}}$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Expresión algebraica

Se llama expresión algebraica a todo conjunto de números y letras ligados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas.

Monomios de una indeterminada

Se llama monomio de una indeterminada x a una expresión algebraica de la forma:

$$ax^n \text{ siendo } a \in \mathbb{R} \begin{cases} a \text{ es el coeficiente} \\ x^n \text{ la parte literal} \\ n \text{ es un n.º natural} \end{cases}$$

Operaciones con monomios

I. $ax^n + bx^n = (a + b)\,x^n$

II. $a\,(bx^n) = (a \cdot b)\,x^n = abx^n$

III. $ax^m \cdot bx^n = (a \cdot b)\,x^{m+n}$

IV. $ax^m : bx^n = (a : b)\,x^{m-n}$

Polinomios de una indeterminada

Son expresiones de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

siendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *los coeficientes,* $n \in \mathbb{N}$ *y x la variable o indeterminada.*

Igualdad de polinomios

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + bx^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Polinomios opuestos

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

el opuesto es:

$$-P(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n$$

Adición y sustracción de polinomios

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \end{aligned}\right\}$$

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + \cdots + (a_n + b_n)\,x^n$$

$$P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\,x + \cdots + (a_n - b_n)\,x^n$$

Producto de polinomios

I. *Producto de un polinomio por un número real:*

$$P(x) \cdot k = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \cdot k = a_0k + a_1kx + \cdots + a_nkx^n$$

II. *Producto de un polinomio por un monomio:*

$$P(x) \cdot bx^m = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\,bx^m = a_0bx^m + a_1bx^{m+1} + \cdots + a_nbx^{m+n}$$

III. *Producto de dos polinomios:*

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del multiplicador por cada uno del multiplicando y luego se reducen los monomios semejantes obtenidos.

Productos notables

I. *Cuadrado de un binomio:*

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

II. *Cubo de un binomio:*

$$(a + b)^3 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = (a - b)\,(a - b)\,(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

III. *Producto de una suma por su diferencia:*

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

IV. *Cuadrado de un polinomio:*

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)\,(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

División de polinomios

I. *División exacta:*

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline \underline{0} & C(x) \end{array} \Leftrightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x)$$

II. *División entera:*

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \Leftrightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

siendo
- P(x) *el polinomio dividendo*
- Q(x) *el polinomio divisor*
- C(x) *el polinomio cociente*
- R(x) *el polinomio resto*

El grado de R(x) < *grado de* Q(x)

Descomposición de una expresión algebraica en producto de factores

Las fórmulas:

I. $ab + ac + ad = a\,(b + c + d)$

II. $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

III. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

IV. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

V. $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

VI. $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

VII. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

VIII. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

IX. $ac + ad + bc + bd = (a + b)\,(c + d)$

X. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

nos permiten muchas veces descomponer una expresión algebraica en producto de factores.

EJERCICIOS PROPUESTOS

188. Efectuar la siguiente operación con monomios: $5x^2 + 7x^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{12x^2}}$

189. Efectuar la siguiente operación con monomios: $3x^6 + \frac{1}{3}x^6$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{10}{3}x^6}}$

190. Efectuar la siguiente operación con monomios: $x^3 + 5x^3 - 2x^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4x^3}}$

191. Efectuar la siguiente operación con monomios:
$\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{7}{10}x^5$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{7}{20}x^5}}$

192. Efectuar la siguiente operación con monomios:
$\frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^4$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{7}{6}x^4}}$

193. Efectuar la siguiente operación con monomios: $5\,(4x^3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{20x^3}}$

194. Efectuar la siguiente operación con monomios: $3\left(\frac{5}{6}x^2\right)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{5}{2}x^2}}$

195. Efectuar la siguiente operación con monomios: $7\,(3x^n)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{21x^n}}$

196. Efectuar la siguiente operación con monomios: $(2x^2)\,(3x^3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{6x^5}}$

197. Efectuar la siguiente operación con monomios:
$(5x^3)\left(\frac{2}{5}x^6\right)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x^9}}$

198. Efectuar la siguiente operación con monomios:
$(5x^0)\left(\frac{7}{5}x^3\right)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{7x^3}}$

199. Sumar los siguientes polinomios:
$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ y $Q(x) = 6x^3 - 4x + 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^3 - 4x^2 - 7x + 9}}$

200. Sumar los siguientes polinomios:
$P(x) = 12x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{15x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x}}$

201. Sumar los siguientes polinomios:
$P(x) = 5x^2 - 4x + 1$; $Q(x) = 7x^3 - 24x$; $R(x) = -7x^2 + 21$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{7x^3 - 2x^2 - 28x + 22}}$

202. Restar los siguientes polinomios:
$P(x) = 18x^2 - 28x - 24x^3$ y $Q(x) = -30x^3 - 14x^2 + 10x$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{6x^3 + 32x^2 - 38x}}$

203. Restar los siguientes polinomios:
$P(x) = 5x^3 - 7x^4 + 9x^2 + 10$ y $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 7$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{-7x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 2x + 17}}$

204. Restar los siguientes polinomios:
$P(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$ y $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3x^3 - 4x^2 + 6x + 1}}$

205. Dados los polinomios:
$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$
$Q(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$
$R(x) = 5x^3 - 3x^2 + 3x - 5$
$S(x) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

efectuar las siguientes operaciones simplificando los resultados lo más posible:

I. $P(x) + Q(x) + R(x) + S(x)$
II. $P(x) - [Q(x) + R(x) + S(x)]$
III. $2P(x) + 3Q(x)$
IV. $P(x) - 2Q(x) + 3R(x) - 4S(x)$
V. $Q(x) + R(x) - [S(x) - P(x)]$
VI. $2R(x) - [S(x) + P(x)]$
VII. $P(x) - [S(x) + 2R(x)]$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{7x^3 + x^2 + x - 3}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{-5x^3 - 5x^2 + 3x + 1}}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{8x^3 - x^2 + 7x + 4}}$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{16x^3 - 33x^2 + 29x - 24}}$

SOLUCIÓN V: $\boxed{\mathbf{9x^3 - 9x^2 + 11x - 5}}$

SOLUCIÓN VI: $\boxed{\mathbf{10x^3 - 9x^2 + 9x - 10}}$

SOLUCIÓN VII: $\boxed{\mathbf{-8x^3 - x^2 + x + 8}}$

206. Efectuar el siguiente producto: $(x - 3) \cdot 5x^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{5x^4 - 15x^3}}$

207. Efectuar el siguiente producto: $(6x^2 - 8x + 2) \cdot 2x$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{12x^3 - 16x^2 + 4x}}$

208. Efectuar el siguiente producto: $\left(2x^2 - 8x + \frac{1}{2}\right) \cdot 4x^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^4 - 32x^3 + 2x^2}}$

209. Efectuar el siguiente producto: $(3x^2 - 4x + 1) \cdot (-2x^3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{-6x^5 + 8x^4 - 2x^3}}$

210. Efectuar el siguiente producto: $(3a^2x^3 + 4ax^2 + x) \cdot (-4ax^2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{-12a^3x^5 - 16a^2x^4 - 4ax^3}}$

211. Efectuar el siguiente producto: $(x + 5)(x - 6)$

SOLUCIÓN: $\boxed{x^2 - x - 30}$

212. Efectuar el siguiente producto: $(2x - 4)(8x + 5)$

SOLUCIÓN: $\boxed{16x^2 - 22x - 20}$

213. Efectuar el siguiente producto: $(2x^2 - 3x + 1)(4x + 3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{8x^3 - 6x^2 - 5x + 3}$

214. Efectuar el siguiente producto:
$(2x^3 - 6x^2 + 2x)\left(2x - \frac{1}{4}\right)$

SOLUCIÓN: $\boxed{4x^4 - \frac{25}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}$

215. Efectuar el producto de los siguientes polinomios:
$P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ y $Q(x) = x^3 + 5x + 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{x^6 - x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 13x^2 + x - 2}$

216. Efectuar el producto de los siguientes polinomios:
$P(x) = 3x^2 - 2x + 6$ y $Q(x) = 4x^2 - 5 + 3x$

SOLUCIÓN: $\boxed{12x^4 + x^3 + 3x^2 + 28x - 30}$

217. Efectuar el producto de los siguientes polinomios:
$P(x) = (3x^5 - 7x^4 + x^2 - 4)$ y $Q(x) = 2x^2 - 5x + 6$

SOLUCIÓN: $\boxed{6x^7 - 29x^6 + 53x^5 - 40x^4 - 5x^3 - 2x^2 + + 20x - 24}$

218. Efectuar el producto de los siguientes polinomios:
$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ y $Q(x) = 2x^2 - 3x + 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{6x^5 - 19x^4 + 33x^3 - 26x^2 + 9x + 2}$

219. Efectuar el producto de los siguientes polinomios:
$P(x) = 4x^3 + 6x - 5$ y $Q(x) = 3x^2 - 2x + 7$

SOLUCIÓN: $\boxed{12x^5 - 8x^4 + 46x^3 - 27x^2 + 52x - 35}$

220. Efectuar la siguiente división de un polinomio por un monomio: $(16x^4 - 8x^2 + 4x) : 2x$

SOLUCIÓN: $\boxed{8x^3 - 4x + 2}$

221. Efectuar la siguiente división de un polinomio por un monomio: $(12x^3 - 8x^2 - 16x) : 4x$

SOLUCIÓN: $\boxed{3x^2 - 2x - 4}$

222. Efectuar la siguiente división de un polinomio por un monomio: $(12a^2x^3 + 7ax^2 - 8a^3x) : (-4a^2x)$

SOLUCIÓN: $\boxed{-3x^2 - \frac{7x}{4a} + 2a}$

223. Efectuar la siguiente división de un polinomio por un monomio: $(8a^3x^2 - 6a^5x + 12a^2x^3) : (2ax)$

SOLUCIÓN: $\boxed{4a^2x - 3a^4 + 6ax^2}$

224. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) : (2x^2 - 3x + 1)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $x^2 - x - 2$ **Resto:** 0

225. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(4x^5 + x^3 + 19x^2 + 5x + 17) : (2x^2 - x + 3)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $2x^3 + x^2 - 2x + 7$ **Resto:** $18x - 4$

226. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(6x^4 + 11x^3 - 9x^2 - 2x + 24) : (3x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $2x^2 + 7x + 6$ **Resto:** 0

227. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x - 1)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $x^3 - x^2 - 2x + 4$ **Resto:** $-4x + 3$

228. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(2x^5 - 3x^4 + 3x^2 - x - 1) : (x^2 - 3x + 2)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $2x^3 + 3x^2 + 5x + 12$ **Resto:** $25x - 25$

229. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(6x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 2) : (2x^3 - 6x^2 + 1)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $3x^2 + 9x + 25$ **Resto:** $153x^2 - 9x - 27$

230. Efectuar la siguiente división de polinomios:
$(x^6 - 3x^4 + 2x) : (x^3 - 2x^2 + 1)$

SOLUCIÓN: **Cociente:** $x^3 + 2x^2 + x + 1$ **Resto:** $x - 1$

231. Desarrollar la siguiente potencia: $(2x + y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{4x^2 + 4xy + y^2}$

232. Desarrollar la siguiente potencia: $(3x - 2y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{9x^2 - 12xy + 4y^2}$

233. Desarrollar la siguiente potencia: $(2a + 3b)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{4a^2 + 12ab + 9b^2}$

234. Desarrollar la siguiente potencia: $(2ax + b)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{4a^2x^2 + 4abx + b^2}$

235. Desarrollar la siguiente potencia: $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}}$

236. Desarrollar la siguiente potencia: $\left(\frac{2}{5}x^2 - 2y\right)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{4}{25}x^4 - \frac{8}{5}x^2y + 4y^2}$

237. Desarrollar la siguiente potencia: $(2x + y)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3}}$

238. Desarrollar la siguiente potencia: $(1 + 2x)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1 + 6x + 12x^2 + 8x^3}}$

239. Desarrollar la siguiente potencia: $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}}}$

240. Desarrollar la siguiente potencia: $\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x^3}{64} - \frac{3x^2y}{80} + \frac{3xy^2}{100} - \frac{y^3}{125}}}$

241. Desarrollar la siguiente potencia: $(3x - 2y)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3}}$

242. Desarrollar la siguiente potencia: $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{8}{27}x^3 - x^2y + \frac{9}{8}xy^2 - \frac{27}{64}y^3}}$

243. Desarrollar la siguiente potencia: $\left(1 - \frac{x}{3}\right)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}}}$

244. Desarrollar la siguiente potencia: $(ax - 2by)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a^3x^3 - 6a^2bx^2y + 12ab^2xy^2 - 8b^3y^3}}$

245. Desarrollar la siguiente potencia: $(1 - x + x^2)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}$

246. Desarrollar la siguiente potencia: $(1 + 2x - 3y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1 + 4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y - 12xy}}$

247. Desarrollar la siguiente potencia: $(2a + b + 3c)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4a^2 + b^2 + 9c^2 + 4ab + 12ac + 6bc}}$

248. Desarrollar la siguiente potencia: $(ax^2 + bx + c)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)\,x^2 + 2bcx + c^2}}$

249. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $6x - 2x^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x\,(3 - x)}}$

250. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $2x^2 - 8xy$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x\,(x - 4y)}}$

251. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $20a^2 - 10ab$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{10a\,(2a - b)}}$

252. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $3x\,(x - 2y) - 4y\,(x - 2y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x - 2y)\,(3x - 4y)}}$

253. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $x^2 + 6xy + 9y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x + 3y)^2}}$

254. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $a^2 - 4ab + 4b^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(a - 2b)^2}}$

255. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $9x^2 - 12xy + 4y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(3x - 2y)^2}}$

256. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $25a^2 + 10ab + b^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(5a + b)^2}}$

257. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $4x^2 - y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(2x + y)\,(2x - y)}}$

258. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $4a^2 - 9b^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(2a + 3b)\,(2a - 3b)}}$

259. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $25x^2 - 36y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(5x + 6y)\,(5x - 6y)}}$

260. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x + y)^3}}$

261. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $4a^4 - 8a^2 + 4$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4\,(a^2 - 1)^2}}$

262. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $a\,(3x - 1) + b\,(3x - 1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(3x - 1)\,(a + b)}}$

263. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $3ax + 3ay + 5bx + 5by$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x + y)\,(3a + 5b)}}$

264. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(2x - y)^3}}$

265. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $3x^2 - 12xy + 12y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3\,(x - 2y)^2}}$

266. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $1 + 2x + x^2 - 4y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{(1 + x + 2y)(1 + x - 2y)}$

267. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $x^4 - y^4$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}$

268. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $x^4 - 81y^4$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)}$

269. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2xy(x^2 - y^2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x + y)(x - y)^3}$

270. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $x^2 - ax - bx + ab$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x - a)(x - b)}$

271. Descomponer en producto de factores la siguiente expresión: $ax^3 + bx^2 + bx + a$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a]}$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Fracciones algebraicas

Se llaman fracciones algebraicas a todas las expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \; ; \; Q(x) \neq 0 \text{ siendo } \begin{cases} P(x) \text{ el polinomio numerador} \\ Q(x) \text{ el polinomio denominador} \end{cases}$$

Fracciones equivalentes

Dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *y* $\frac{M(x)}{N(x)}$, *son equivalentes* cuando se verifica:

$$P(x) \cdot N(x) = Q(x) \cdot M(x) \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M(x)}{N(x)}$$

Transformación de fracciones algebraicas

Si se multiplican o dividen el numerador y denominador de una fracción algebraica por un mismo número o expresion algebraica se obtiene otra fracción equivalente.

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en otra equivalente, pero de términos más sencillos (fracción irreducible).
Para ello es necesario descomponer el numerador y denominador en producto de factores, usando las diversas técnicas de descomposición vistas anteriormente.

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Reducir varias fracciones algebraicas a común denominador es hallar otras fracciones que sean equivalentes a las dadas, y que tengan el mismo denominador:

1.° Se hallan las fracciones equivalentes (irreducibles).
2.° Se halla el m.c.m. de los denominadores y se adopta como denominador común.
3.° Se halla el numerador de cada fracción, dividiendo el m.c.m. por cada denominador y el cociente obtenido se multiplica por su numerador respectivo.

Operaciones con fracciones algebraicas

I. *Adición y sustracción:*
 a) Mismo denominador: *Se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.*
 b) Distinto denominador: *Se reducen a común denominador y luego se procede como en a).*

II. *Multiplicación:*
El producto de fracciones algebraicas es el producto de los numeradores partido por el producto de sus denominadores.

III. *División:*
El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda.

IV. *Potenciación:*
Para elevar una fracción algebraica a una potencia se elevan el numerador y denominador a dicha potencia.

EJERCICIOS PROPUESTOS

272. Calcular el valor numérico de la fracción:

$\dfrac{x^3 + 1}{x + 2}$ para x = 2 y x = −2

SOLUCIÓN: **Para x = 2 es $\dfrac{9}{4}$**
Para x = −2, carece de valor numérico

273. Calcular el valor numérico de la fracción:

$\dfrac{x^2 + y}{x + y^2}$ para x = 2 e y = 3

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{7}{11}}$

274. Calcular el valor numérico de la fracción:

$\dfrac{x^5 - xy + 2}{x^2 + 3 + 2y}$ para x = 1 e y = 3

SOLUCIÓN: **0**

275. Calcular el valor numérico de la fracción:

$\dfrac{5ab^2c - 6abc}{a^2bc^2}$ para a = 1 , b = 2 y c = $\dfrac{3}{5}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{20}{3}}$

276. Calcular el valor numérico de la fracción:

$\dfrac{a^2 + b^2 - 3ab}{a^2 + b}$ para a = $-\dfrac{1}{2}$ y b = $-\dfrac{2}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{11}{15}}$

277. Calcular el valor numérico de la fracción:

$\dfrac{(a + b)^3 (a - b) - (a - b)^2}{4 + (a + b)^2 - 3a^2}$ para a = 3 y b = 2

SOLUCIÓN: **62**

278. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{60x^5y^4z}{48x^4yz^3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{5xy^3}{4z^2}}$

279. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{-33x^3y^2}{11x^2y^2z}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{-3x}{z}}$

280. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{-14a^4b^2c^3d}{28a^2b^3c^3d^3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{-a^2}{2bd^2}}$

281. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{3a^2b - ab}{9ab - 3b}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{a}{3}}$

282. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{2x^2y - xy}{12x^3y - 3xy}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{1}{3(2x + 1)}}$

283. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{5x^3y^2 - 10xy^3}{15x^3y^3 + 10x^3y^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{x^2 - 2y}{x^2(3y + 2)}}$

284. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{9x^2 - 25y^2}{3xy + 5y^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{3x - 5y}{y}}$

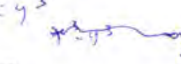
285. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{2a^3 - 8a}{4a^2 - 16a + 16}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{a(a + 2)}{2(a - 2)}}$

286. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - y^2}$



SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{(x - y)^2}{x + y}}$

287. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{6x^2 - 6y^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{x - y}{2(x + y)}}$

288. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{6a^2 + 2a}{15a^3 + 5a^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{2}{5a}}$

289. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{8x^3 - 2xy^2}{4x^2 - 4xy + y^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{2x(2x + y)}{2x - y}}$

290. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{8a^2 - 2ab}{12ab - 3b^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{2a}{3b}}$

291. Simplificar la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{4x - 2y}{16x^2 - 4y^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{1}{2(2x + y)}}$

292. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{45x^2 - 60xy + 20y^2}{180x^2 - 80y^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{3x - 2y}{4(3x + 2y)}}$

293. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$\dfrac{a + 4}{(2a + 5)^2 - (a + 1)^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{1}{3a + 6}}$

294. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{1 - y^2}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{1}{1 - x^2}}}$

295. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{(2x + 5)^2 - (x + 4)(2x + 5)}{x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{2x + 5}{x - 1}}}$

296. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}{x^2 - y^2 + z^2 + 2xz}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x + y - z}{x + z - y}}}$

297. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{xy - 3x - 5y + 15}{xy - 3x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x - 5}{x}}}$

298. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3y - xy^3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x^2 + y^2}{xy}}}$

299. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{xy + x - 2y - 2}{xy - 5y + x - 5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x - 2}{x - 5}}}$

300. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{a^3 - a}{(a + 1)^2 (a - 1)}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{a}{a + 1}}}$

301. Simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4)}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x + 1}{(x - 1)(x + 2)}}}$

302. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{x}{y}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{bdx}{bdy}, \frac{ady}{bdy}, \frac{bcy}{bdy}}}$

303. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{xyz}, \frac{y^2}{xyz}, \frac{z^2}{xyz}}}$

304. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{a}{x^2y}, \frac{b}{3xy}, \frac{c}{6xy^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{6ay^2}{6x^2y^3}, \frac{2bxy^2}{6x^2y^3}, \frac{cx}{6x^2y^3}}}$

305. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{x}{2a^2c}, \frac{y}{4bc}, \frac{z}{6ab}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{6bx}{12a^2bc}, \frac{3a^2y}{12a^2bc}, \frac{2acz}{12a^2bc}}}$

306. Reducir las siguientes fracciones albgebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{7a}{4a - 4}, \frac{a}{9a^2 - 9}, \frac{3a}{2a + 2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{63a(a + 1)}{36(a^2 - 1)}, \frac{4a}{36(a^2 - 1)}, \frac{54a(a - 1)}{36(a^2 - 1)}}}$

307. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{1}{3x - 3y}, \frac{1}{2x + 2y}, \frac{1}{x^2 - y^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{2(x + y)}{6(x^2 - y^2)}, \frac{3(x - y)}{6(x^2 - y^2)}, \frac{6}{6(x^2 - y^2)}}}$

308. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{1}{a + b}, \frac{1}{a - b}, \frac{1}{a^2 - b^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{a - b}{a^2 - b^2}, \frac{a + b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{a^2 - b^2}}}$

309. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{a^2}{a^2 + a}, \frac{2a}{a - 1}, \frac{a + 3}{a^2 - 1}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{a^2(a - 1)}{a(a^2 - 1)}, \frac{2a^2(a + 1)}{a(a^2 - 1)}, \frac{a(a + 3)}{a(a^2 - 1)}}}$

310. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{x + a}{x - a}, \frac{x - a}{x + a}, \frac{4ax}{x^2 - a^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{(x + a)^2}{x^2 - a^2}, \frac{(x - a)^2}{x^2 - a^2}, \frac{4ax}{x^2 - a^2}}}$

311. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\frac{1}{x - 1}, \frac{x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)}, \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)}, \frac{x(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)}}}$

312. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador:

$$\frac{x^2 + y^2}{xy}, \frac{x^2}{x - y}, \frac{y^2}{x + y}, \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x^4 - y^4}{xy(x^2 - y^2)}, \frac{x^3y(x + y)}{xy(x^2 - y^2)}, \frac{xy^3(x - y)}{xy(x^2 - y^2)}, \frac{x^2 \cdot y^2}{xy(x^2 - y^2)}}}$

313. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador:

$$\frac{3x}{x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3}, \quad \frac{2y}{4x^2 - 16y^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{12x\,(x + 2y)}}{\mathbf{4\,(x - 2y)^3\,(x + 2y)}}, \ \dfrac{\mathbf{2y\,(x - 2y)^2}}{\mathbf{4\,(x - 2y)^3\,(x + 2y)}}}$

314. Reducir las siguientes fracciones algebraicas a su mínimo común denominador: $\dfrac{2xy}{4x^2 - 24xy + 36y^2}, \ \dfrac{5}{6x^2 - 54y^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{6xy\,(x + 3y)}}{\mathbf{12\,(x - 3y)^2\,(x + 3y)}}, \ \dfrac{\mathbf{10\,(x - 3y)}}{\mathbf{12\,(x - 3y)^2\,(x + 3y)}}}$

315. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{11x}}{\mathbf{12}}}$

316. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{10x}{6} - \frac{6x}{8}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{11x}}{\mathbf{12}}}$

317. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{6}{1 - x} + \frac{5}{1 + x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x + 11}}{\mathbf{1 - x^2}}}$

318. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x}{a - x} + \frac{a}{a + x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{a^2 + x^2}}{\mathbf{a^2 - x^2}}}$

319. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{4a + 5b}{6} + \frac{2a - 3b}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{32a + 7b}}{\mathbf{30}}}$

320. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{a^2}{a - b} + \frac{b^2}{b - a}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a + b}}$

321. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x\,(3x + 1)}}{\mathbf{(x - 1)^2\,(x + 1)}}}$

322. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x}{2y} + \frac{2y}{x} - 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{(x - 2y)^2}}{\mathbf{2xy}}}$

323. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{3x}{24ab} + \frac{2y}{12ac} - \frac{z}{36bc}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{9cx + 12by - 2az}}{\mathbf{72abc}}}$

324. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x}{x - y} + \frac{y}{x + y}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x - y}}}$

325. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x - y}{xy} - \frac{y - z}{yz} - \frac{z - x}{xz}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2\,(x - y)}}{\mathbf{xy}}}$

326. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}}}$

327. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x^3}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x^4 + x^2 - 2}}{\mathbf{x^2 - 1}}}$

328. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{2}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^2} + \frac{4}{1 + x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{3 - 2x}}{\mathbf{1 - x^2}}}$

329. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} + \frac{x^2}{x^2 - y^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x\,(x + 4y)}}{\mathbf{x^2 - y^2}}}$

330. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{5b^2}{2a} \cdot \frac{3a}{b}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{15b}}{\mathbf{2}}}$

331. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{5ab^2}{4x^2y} \cdot \frac{3xy}{5ab}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{3b}}{\mathbf{4x}}}$

332. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{6}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x + y}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{x - y}}}$

333. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{xy - y}{1 - 4x^2} \cdot \frac{1 + 2x}{x - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{y}{1 - 2x}}$

334. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{3x^2y}{a^2b} \cdot \frac{2ab}{5x^2y^3} \cdot 4x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{24x}{5ay^2}}$

335. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{xy - 3y}{x} \cdot \frac{3xy - 4x}{2y}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{(x - 3)(3y - 4)}{2}}$

336. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x + y}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x^2 + 2xy + y^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{1}{x + y}}$

337. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(2ab - \frac{3xy}{ab}\right) \cdot 3a^2b^2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{3ab\,(2a^2b^2 - 3xy)}$

338. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - 4}{x + 3} \cdot \frac{x^2 - 9}{x + 2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x\,(x - 2)}$

339. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{1}{x}}$

340. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{2x^2}{1 - x^4}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{1}{x^2}}$

341. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{5b^2}{2a} : \frac{4b}{3a}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{15b}{8}}$

342. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{6x^3y^3}{5a^2b} : \frac{2x^2y}{5ab^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{3bxy^2}{a}}$

343. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(x - \frac{y}{z}\right) : \left(x + \frac{y}{z}\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{xz - y}{xz + y}}$

344. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(3a - \frac{2b}{x}\right) : (3ax - 2b)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{1}{x}}$

345. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x^4 - y^4}{a + b} : \frac{x^2 - y^2}{a^2 + 2ab + b^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{(a + b)(x^2 + y^2)}$

346. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{24x - 12}{5x^2 - 5} : \frac{6x - 3}{x - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{4}{5\,(x + 1)}}$

347. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$(x^2 + y^2 - 2xy) : \frac{3x - 3y}{2x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{2x\,(x - y)}{3}}$

348. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{x}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right) : \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{x}{1 + x}\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{1}$

349. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{x^3 - x}{3x - 6} : \frac{5 + 5x}{2x - 4}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{2x\,(x - 1)}{15}}$

350. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\frac{\frac{2}{3}x^2}{2y} : \frac{\frac{1}{2}x}{y^2z}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{2}{3}\,xyz}$

351. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{x - a}{x + a} + 1\right) : \left(\frac{x + a}{x - a} - 1\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{x\,(x - a)}{a\,(x + a)}}$

352. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(x - \frac{x - y}{1 + xy}\right) : \left(1 + \frac{x^2 - xy}{1 + xy}\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{y}$

353. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{2a+b}{3x-2y}\right)^2$$

SOLUCIÓN: $$\boldsymbol{\frac{4a^2+4ab+b^2}{9x^2-12xy+4y^2}}$$

354. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{3x^2y^3z}{4a^3}\right)^3$$

SOLUCIÓN: $$\boldsymbol{\frac{27x^6y^9z^3}{64a^9}}$$

355. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{2x^2y^4z^6}{3ab^2c^3}\right)^4$$

SOLUCIÓN: $$\boldsymbol{\frac{16x^8y^{16}z^{24}}{81a^4b^8c^{12}}}$$

356. Efectuar la siguiente operación, simplificando el resultado:

$$\left(\frac{x-2y}{2x+y}\right)^3$$

SOLUCIÓN: $$\boldsymbol{\frac{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}}$$

357. Hallar los valores de a y b para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

SOLUCIÓN: $$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}\ ;\ b=-\frac{1}{2}}$$

358. Hallar los valores de a y b para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{a=2\ ;\ b=-1}$

359. Hallar los valores de a y b para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{a=-1\ ;\ b=2}$

360. Determinar los valores de a, b, y c para que se verifique la igualdad:

$$\frac{2x+4}{(x-1)\,x\,(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{a=3\ ;\ b=-4\ ;\ c=1}$

REGLA DE RUFFINI

División de un polinomio por x − a. Regla de Ruffini

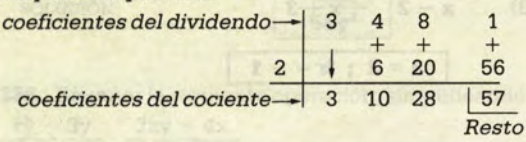
La regla de Ruffini se emplea para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio ordenado según las potencias decrecientes de la indeterminada x *por el binomio* x − a *sin efectuar la división.*

Ejemplo: Mediante la regla de Ruffini, calcular la siguiente división:

$$(3x^3 + 4x^2 + 8x + 1) : (x - 2)$$

RESOLUCIÓN:

Disposición práctica:



coeficientes del dividendo →		3	4	8	1
			+	+	+
	2	↓	6	20	56
coeficientes del cociente →		3	10	28	57
					Resto

Regla de Ruffini:

$3 = 3$

$10 = 3 \cdot 2 + 4$

$28 = 10 \cdot 2 + 8$

$57 = 28 \cdot 2 + 1$

SOLUCIÓN: **Cociente: $3x^2 + 10x + 28$**
Resto: 57

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x) *por el binomio* x − a *es el valor numérico de dicho polinomio para* x = a.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \hline R & Q(x) \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - a)\,Q(x) + R$$

Para $x = a \Rightarrow P(a) = R$

Ejemplo: Hallar el resto de la división del polinomio:

$$P(x) = 2x^5 - 5x^3 - 5x + 4 \text{ por } x - 2$$

RESOLUCIÓN:

1.er MÉTODO:

	2	0	−5	0	−5	4
2		4	8	6	12	14
	2	4	3	6	7	18

SOLUCIÓN: **P(2) = 18 = R**

2.º MÉTODO:

Sustituyendo x = 2 *en el polinomio, resulta:*

$P(2) = 2 \cdot 2^5 - 5 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 + 4 = 18 = R$

Teorema del factor

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio P(x) *sea divisible por el binomio* x − a, *es que el valor numérico del polinomio para* x = a *sea cero.*

Condición necesaria	Condición suficiente
$P(x) = (x - a)\,Q(x)$	$P(a) = 0$
⇓	⇓
$P(a) = 0$	$P(x) = (x - a)\,Q(x)$

Luego: $P(x) = (x - a)\,Q(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$

Al número «a» que verifica la relación anterior se le llama raíz o cero de **P(x) = 0**

Ejemplo: Determinar si el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 6$ es divisible por x − 2.

RESOLUCIÓN:

1.er MÉTODO:

Para $x = 2 \Rightarrow P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 6 = 0$

SOLUCIÓN: **El número 2 es un cero del polinomio**

2.º MÉTODO:

	1	−3	2	−3	6
2		2	−2	0	−6
	1	−1	0	−3	0 = R

SOLUCIÓN: **El número 2 es una raíz del polinomio**

Descomposición factorial de polinomios

Si un polinomio de grado n *admite* n *raíces reales, se puede descomponer de forma única en el producto de su coeficiente de mayor grado por* n *factores del tipo* (x − r), *donde «r» representa cada una de las* n *raíces del polinomio.*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Ejemplo: Descomponer en factores el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 2x - 5x + 6$$

RESOLUCIÓN:

Como x = 1, 3, −2 *son las raíces del polinomio, se tiene:*

$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

361. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $3x^3 + 4x^2 + 12x + 27$**
Resto: 53

362. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 15) : (x + 2)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^4 - 2x^3 + x^2$**
Resto: -15

363. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(x^5 - a^5) : (x - a)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$**
Resto: 0

364. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(x^5 + a^5) : (x + a)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$**
Resto: 0

365. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(x^4 - 81) : (x + 3)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$**
Resto: 0

366. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(x^8 + 1) : (x - 1)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$**
Resto: 2

367. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(2x^4 + 17x^3 - 68x - 32) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $2x^3 + 16x^2 - 8x - 64$**
Resto: 0

368. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $\left(x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$**
Resto: $-\frac{41}{27}$

369. Hallar, mediante la regla de Ruffini, el cociente y resto de la siguiente división: $(x^3 + 5x + 2) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{21}{4}$**
Resto: $-\frac{5}{8}$

370. Hallar «a» para que el polinomio $3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + ax + 6$ sea divisible por $x - 2$.

SOLUCIÓN: **$a = -1$**

371. Hallar «a» para que el polinomio $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x + a$ sea divisible por $x + 3$.

SOLUCIÓN: **$a = -75$**

372. Hallar «a» para que el polinomio $x^3 + 12x^2 + 9ax + 16$ sea divisible por $x - 2$.

SOLUCIÓN: **$a = -4$**

373. Hallar m y n para el polinomio $x^4 - 4x^3 + 7x^2 + mx + n$ sea divisible por $x - 2$ y por $x - 3$

SOLUCIÓN: **$m = -24$; $n = 36$**

374. Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

SOLUCIÓN: **$a = 16$; $b = 0$**

375. Hallar «a» para que el polinomio $2x^3 - x^2 + 5x - a$ sea divisible por $2x + 1$.

SOLUCIÓN: **$a = -3$**

376. Hallar «a» para que el resto de la división del polinomio $x^4 + ax^3 - 3x^2 - ax - 3$ por $x + 3$ sea $a + 1$.

SOLUCIÓN: **$a = 2$**

377. El polinomio $x^2 + ax + 2$ se divide por $x - 2$ y por $x + 2$. Hallar «a» para que los restos sean iguales.

SOLUCIÓN: **$a = 0$**

378. Hallar a y b con la condición de que el polinomio $ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $x^2 - 2x + 1$.

SOLUCIÓN: **$a = 3$; $b = -4$**

379. Hallar b de modo que el polinomio:
$2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + ba^4$ sea divisible por $x - a$.

SOLUCIÓN: **$b = 2$**

380. Hallar el valor numérico del siguiente polinomio para el valor de x que se indica: $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$. Para $x = 3$.

SOLUCIÓN: **55**

381. Hallar el valor numérico del siguiente polinomio para el valor de x que se indica: $x^3 - 2x^2 + x - 3$. Para $x = -\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN: **$-\frac{33}{8}$**

382. Hallar el valor numérico del siguiente polinomio para el valor de x que se indica: $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 2x + 5$. Para $x = -2$.

SOLUCIÓN: **-55**

383. Descomponer factorialmente el siguiente polinomio:
$P(x) = x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16$

SOLUCIÓN: **$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 4)$**

384. Descomponer factorialmente el siguiente polinomio:
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

SOLUCIÓN: **$P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x - 5)$**

385. Descomponer factorialmente el siguiente polinomio:
$P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

SOLUCIÓN: $\boxed{P(x) = (x-1)(x+1)(2x-1)}$

386. Hallar las raíces enteras del siguiente polinomio: $x^2 - 5x + 6$

SOLUCIÓN: **2 y 3**

387. Hallar las raíces enteras del siguiente polinomio:
$x^3 - x^2 - 4x + 4$

SOLUCIÓN: **1, −2 y 2**

388. Hallar un polinomio de 4.° grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 1$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN: $\boxed{x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12}$

389. Hallar un polinomio de 4.° grado que tenga por raíces: −2, 0, 3, 4.

SOLUCIÓN: $\boxed{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 24x}$

390. Hallar a para que el polinomio $ax^3 - 10x + 4$ sea divisible por $x - 2$.

SOLUCIÓN: $\boxed{a = 2}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$3^0 = 1$

SOLUCIÓN: **1**

2. RESOLUCIÓN

$8x^0 = 8 \cdot 1 = 8$

SOLUCIÓN: **8**

3. RESOLUCIÓN

$(8x)^0 = 1$

SOLUCIÓN: **1**

4. RESOLUCIÓN

$7^1 = 7$

SOLUCIÓN: **7**

5. RESOLUCIÓN

$(3x)^1 = 3x$

SOLUCIÓN: **3x**

6. RESOLUCIÓN

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{125}}$

7. RESOLUCIÓN

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{16}}$

8. RESOLUCIÓN

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{100}}$

9. RESOLUCIÓN

$3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243$

SOLUCIÓN: **243**

10. RESOLUCIÓN

$$x^{-3} \cdot x^{-4} \cdot x^{-5} = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{x^{12}}}$

11. RESOLUCIÓN

$6^4 : 6^3 = 6^1 = 6$

SOLUCIÓN: **6**

12. RESOLUCIÓN

$16^{-2} : 16^{-4} = 16^{2} = 256$

SOLUCIÓN: **256**

13. RESOLUCIÓN

$(2^{3})^{2} = 2^{6} = 64$

SOLUCIÓN: **64**

14. RESOLUCIÓN

$(x^{3})^{4} = x^{12}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^{12}}$

15. RESOLUCIÓN

$(2 \cdot 3)^{3} = 2^{3} \cdot 3^{3} = 216$

SOLUCIÓN: **216**

16. RESOLUCIÓN

$(x^{2m} \cdot x^{3n})^{4} = x^{8m} \cdot x^{12n}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^{8m} \cdot x^{12n}}$

17. RESOLUCIÓN

$(a^{-4})^{-3/4} = a^{12/4} = a^{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a^{3}}$

18. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{9}{4}}$

19. RESOLUCIÓN

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^{1}} = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5$$

SOLUCIÓN: **−5**

20. RESOLUCIÓN

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{4}{9}}$

21. RESOLUCIÓN

$(-6)^{2} : (-6)^{2} = (-6)^{0} = 1$

SOLUCIÓN: **1**

22. RESOLUCIÓN

$$(2^{-6})^{2/3} = 2^{-12/3} = 2^{-4} = \frac{1}{2^{4}} = \frac{1}{16}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{16}}$

23. RESOLUCIÓN

$a^{-2/3} : a^{-2/3} = a^{0} = 1$

SOLUCIÓN: **1**

24. RESOLUCIÓN

$$(-45)^{4} : 9^{4} = \left(-\frac{45}{9}\right)^{4} = (-5)^{4} = 625$$

SOLUCIÓN: **625**

25. RESOLUCIÓN

$60^{3} : 15^{3} = (60 : 15)^{3} = 4^{3} = 64$

SOLUCIÓN: **64**

26. RESOLUCIÓN

$[(-5)^{2}]^{3} = (-5)^{6} = 15\,625$

SOLUCIÓN: **15 625**

27. RESOLUCIÓN

$2^{3} \cdot 2^{2} \cdot 2^{4} = 2^{9} = 512$

SOLUCIÓN: **512**

28. RESOLUCIÓN

$(3^{2})^{5} : 3^{5} = 3^{10} : 3^{5} = 3^{5} = 243$

SOLUCIÓN: **243**

29. RESOLUCIÓN

$3^{3} \cdot 3^{2} \cdot 3^{-4} = 3^{1} = 3$

SOLUCIÓN: **3**

30. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5} = \frac{243}{32}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{243}{32}}$

31. RESOLUCIÓN

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{4}{3}\right)\right]^{3} = \left(\frac{4}{9} : \frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{27}}$

32. RESOLUCIÓN

$$\left[\frac{(-2)^{3} \cdot (-3)}{4}\right]^{2} = \left(\frac{24}{4}\right)^{2} = 6^{2} = 36$$

SOLUCIÓN: **36**

33. RESOLUCIÓN

$[(2^2)^3]^{-4} = 2^{-24} = \frac{1}{2^{24}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{2^{24}}}$

34. RESOLUCIÓN

$\left(5 - \frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{24}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{24}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{5}{24}}$

35. RESOLUCIÓN

$\left(\frac{1}{2} - 5\right)^{-2} = \left(-\frac{9}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{81}{4}} = \frac{4}{81}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{4}{81}}$

36. RESOLUCIÓN

$\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{3}\right)(-3)\right]^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

SOLUCIÓN: $\boxed{9}$

37. RESOLUCIÓN

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{1}{2}}$

38. RESOLUCIÓN

$\sqrt{4} = \pm 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\pm 2}$

39. RESOLUCIÓN

$\sqrt{\frac{36}{4}} = \pm \frac{6}{2} = \pm 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\pm 3}$

40. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{2}$

41. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

SOLUCIÓN: $\boxed{7}$

42. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = \pm 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\pm 3}$

43. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = \pm 5$

SOLUCIÓN: $\boxed{\pm 5}$

44. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{3^3}} = \frac{5}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{5}{3}}$

45. RESOLUCIÓN

$\sqrt[5]{\frac{3\,125}{32}} = \sqrt[5]{\frac{5^5}{2^5}} = \frac{5}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{5}{2}}$

46. RESOLUCIÓN

$\sqrt[6]{1\,000\,000} = \sqrt[6]{10^6} = \pm 10$

SOLUCIÓN: $\boxed{\pm 10}$

47. RESOLUCIÓN

$\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2$

SOLUCIÓN: $\boxed{-2}$

48. RESOLUCIÓN

$\sqrt[8]{-256} = \sqrt[8]{-2^8}$ = No tiene

Las raíces de números reales negativos de índice par, no tienen solución real: $2^8 \neq -256$; $(-2)^8 \neq -256$.

SOLUCIÓN: **No tiene**

49. RESOLUCIÓN

$\sqrt{121} = \pm 11$

SOLUCIÓN: $\boxed{11}$

50. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{3}$

51. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = \pm 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{3}$

52. RESOLUCIÓN

$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

SOLUCIÓN: $\boxed{-2}$

53. RESOLUCIÓN

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{3}{4}}$

54. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{-3^4} \neq \pm 3$ = *No tiene*

No tiene valor aritmético, pues no existe ningún número real positivo que elevado a la potencia cuarta nos dé el radicando: $3^4 \neq -81$.

SOLUCIÓN: **No tiene**

55. RESOLUCIÓN

$\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{5}}$

56. RESOLUCIÓN

$\sqrt{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[10]{a}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[10]{a}}$

57. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[15]{7}}$

58. RESOLUCIÓN

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}} = \sqrt[24]{5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[24]{5}}$

59. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{2}}$

60. RESOLUCIÓN

$\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{5}}$

61. RESOLUCIÓN

$\sqrt[18]{a^{12}} = \sqrt[3]{a^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{a^2}}$

62. RESOLUCIÓN

$\sqrt[6]{625} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{5^2}}$

63. RESOLUCIÓN

$\sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[4]{3}}$

64. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{a^2b^6} = \sqrt{ab^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{ab^3}}$

65. RESOLUCIÓN

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{a^2}}$

66. RESOLUCIÓN

$\sqrt[9]{27a^3b^6} = \sqrt[9]{3^3a^3b^6} = \sqrt[3]{3ab^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{3ab^2}}$

67. RESOLUCIÓN

$\sqrt[10]{4a^6b^4} = \sqrt[10]{2^2a^6b^4} = \sqrt[5]{2a^3b^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[5]{2a^3b^2}}$

68. RESOLUCIÓN

$\sqrt[14]{128x^7y^{21}} = \sqrt[14]{2^7x^7y^{21}} = \sqrt{2xy^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{2xy^3}}$

69. RESOLUCIÓN

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{2\sqrt{2}}$

70. RESOLUCIÓN

$\sqrt{16a} = 4\sqrt{a}$

SOLUCIÓN: $\boxed{4\sqrt{a}}$

71. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$

SOLUCIÓN: $\boxed{a\sqrt{a}}$

72. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{3\sqrt[3]{3}}$

73. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

SOLUCIÓN: $\boxed{2\sqrt[4]{8}}$

74. RESOLUCIÓN

$\sqrt{4x^3} = 2x\sqrt{x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x\sqrt{x}}}$

75. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{a^5} = a\sqrt[3]{a^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a\sqrt[3]{a^2}}}$

76. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{a^2b^6} = b\sqrt[4]{a^2b^2}$

SOLUCIÓN: $= b\sqrt{ab}$

77. RESOLUCIÓN

$\sqrt{(a+b)^2 x} = (a+b)\sqrt{x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(a+b)\sqrt{x}}}$

78. RESOLUCIÓN

$\sqrt{(a-b)^3 x^2} = (a-b)\, x\, \sqrt{(a-b)}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(a-b)\, x\, \sqrt{a-b}}}$

79. RESOLUCIÓN

$\sqrt{27\,(a-b)^3} = 3\,(a-b)\sqrt{3\,(a-b)}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3\,(a-b)\sqrt{3\,(a-b)}}}$

80. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{32a^7b^9} = 2ab^2\sqrt[4]{2a^3b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2ab^2\sqrt[4]{2a^3b}}}$

81. RESOLUCIÓN

$\sqrt{12a^3b^5} = 2ab^2\sqrt{3ab}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2ab^2\sqrt{3ab}}}$

82. RESOLUCIÓN

$4\sqrt{2} = \sqrt{4^2\cdot 2} = \sqrt{32}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt{32}}}$

83. RESOLUCIÓN

$3a\sqrt{2b} = \sqrt{3^2\cdot a^2\cdot 2b} = \sqrt{18a^2b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt{18a^2b}}}$

84. RESOLUCIÓN

$3a\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{3^3a^3a^2b} = \sqrt[3]{27a^5b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[3]{27a^5b}}}$

85. RESOLUCIÓN

$2\sqrt{a+1} = \sqrt{2^2\,(a+1)} = \sqrt{4\,(a+1)}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt{4\,(a+1)}}}$

86. RESOLUCIÓN

$5x^2\sqrt[7]{y^3z^3} = \sqrt[7]{5^7x^{14}y^3z^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[7]{5^7x^{14}y^3z^3}}}$

87. RESOLUCIÓN

$a^2b^3\sqrt[5]{bc^4} = \sqrt[5]{a^{10}b^{16}c^4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[5]{a^{10}b^{16}c^4}}}$

88. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a\sqrt{5b}} = \sqrt[4]{5a^2b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\sqrt[4]{5a^2b}}}$

89. RESOLUCIÓN

$3\sqrt{5}$; $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = 4\sqrt{5}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

90. RESOLUCIÓN

$5\sqrt{3}$; $\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = 4\sqrt{3}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

91. RESOLUCIÓN

$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$;
$\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

92. RESOLUCIÓN

$a\sqrt{9b} = 3a\sqrt{b}$; $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$; $3\sqrt{b}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

93. RESOLUCIÓN

$\sqrt{48ab^2} = \sqrt{16\cdot 3ab^2} = 4b\sqrt{3a}$
$b\sqrt{75a} = b\sqrt{25\cdot 3a} = 5b\sqrt{3a}$

SOLUCIÓN: **Son semejantes**

94. RESOLUCIÓN

$8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (8 - 5 + 7)\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{10\sqrt{2}}$

95. RESOLUCIÓN

$6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} = \left(6 - 5 + \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{7}{4}\sqrt{2}}$

96. RESOLUCIÓN

$\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{300} = \sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{100 \cdot 3} =$
$= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = (5 - 4 + 10)\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{11\sqrt{3}}$

97. RESOLUCIÓN

$\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{98} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{49 \cdot 2} =$
$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (2 + 3 + 7)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{12\sqrt{2}}$

98. RESOLUCIÓN

$\sqrt{45} - \sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{180} = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{16 \cdot 5} +$
$+ \sqrt{36 \cdot 5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} =$
$= (3 - 2 - 4 + 6)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

SOLUCIÓN: $\boxed{3\sqrt{5}}$

99. RESOLUCIÓN

$5\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{8ab} = 5\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{2^3 \cdot ab} =$
$= 5\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{ab} + 6\sqrt[3]{ab} = (5 - 4 + 6)\sqrt[3]{ab} = 7\sqrt[3]{ab}$

SOLUCIÓN: $\boxed{7\sqrt[3]{ab}}$

100. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} - \sqrt[3]{8 \cdot 2} =$
$= 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = (3 + 5 - 2)\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{6\sqrt[3]{2}}$

101. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a^5b} + \sqrt{ab^5} - \sqrt{4a^3b^3} = a^2\sqrt{ab} + b^2\sqrt{ab} - 2ab\sqrt{ab} =$
$= (a^2 + b^2 - 2ab)\sqrt{ab} = (a - b)^2\sqrt{ab}$

SOLUCIÓN: $\boxed{(a - b)^2\sqrt{ab}}$

102. RESOLUCIÓN

$3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{32} = 6\sqrt{3 \cdot 32} = 6\sqrt{3 \cdot 2^5} = 6 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3 \cdot 2} = 24\sqrt{6}$

SOLUCIÓN: $\boxed{24\sqrt{6}}$

103. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{a^2bc^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[3]{a^2bc^2}}$

104. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a + b} = \sqrt{(a - b)(a + b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{a^2 - b^2}}$

105. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{5ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^4b} = \sqrt[3]{20a^5b^3} = ab\sqrt[3]{20a^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{ab\sqrt[3]{20a^2}}$

106. RESOLUCIÓN

$\sqrt[5]{a^4b^3c^2d} \cdot \sqrt[5]{a^3b^4c^2} \cdot \sqrt[5]{ab^3c^3} = \sqrt[5]{a^8b^{10}c^7d} = ab^2c\sqrt[5]{a^3c^2d}$

SOLUCIÓN: $\boxed{ab^2c\sqrt[5]{a^3c^2d}}$

107. RESOLUCIÓN

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. $(2, 3) = 6$

$\boxed{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}}$

108. RESOLUCIÓN

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. $(2, 3, 6) = 6$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}}$

109. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. $(3, 2, 6) = 6$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3}}$

110. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 10^2}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. $(4, 6) = 12$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[12]{5^3 \cdot 10^2}}$

111. RESOLUCIÓN

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^3}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. $(2, 3, 4) = 12$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[12]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^3}}$

112. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{a^2bc^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} = \sqrt[12]{a^8b^4c^8} \cdot \sqrt[12]{a^9b^6c^3} = \sqrt[12]{a^{17}b^{10}c^{11}} = a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. $(3, 4) = 12$

SOLUCIÓN: $\boxed{a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}}$

113. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[5]{a^2b^4c} = \sqrt[15]{a^5b^{10}}\cdot\sqrt[15]{a^6b^{12}c^3} = \sqrt[15]{a^{11}b^{22}c^3} = b\sqrt[15]{a^{11}b^7c^3}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (3, 5) = 15

SOLUCIÓN: $\boxed{b\sqrt[15]{a^{11}b^7c^3}}$

114. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[4]{a^2b^3c}\cdot\sqrt[8]{ab^2} = \sqrt[24]{a^{16}b^8}\cdot\sqrt[24]{a^{12}b^{18}c^6}\cdot\sqrt[24]{a^3b^6} =$
$= \sqrt[24]{a^{31}b^{32}c^6} = ab\sqrt[24]{a^7b^8c^6}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (3, 4, 8) = 24

SOLUCIÓN: $\boxed{ab\sqrt[24]{a^7b^8c^6}}$

115. RESOLUCIÓN

$5a\sqrt{a}\cdot ab\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[5]{c^2} = 5a^2b\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[5]{c^2} =$
$= 5a^2b\sqrt[30]{a^{15}}\cdot\sqrt[30]{b^{20}}\cdot\sqrt[30]{c^{12}} = 5a^2b\sqrt[30]{a^{15}b^{20}c^{12}}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (2, 3, 5) = 30

SOLUCIÓN: $\boxed{5a^2b\sqrt[30]{a^{15}b^{20}c^{12}}}$

116. RESOLUCIÓN

$\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[3]{a^2bc^2} = \sqrt[12]{a^9b^6c^3}\cdot\sqrt[12]{a^8b^4c^8} = \sqrt[12]{a^{17}b^{10}c^{11}} = a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (4, 3) = 12

SOLUCIÓN: $\boxed{a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}}$

117. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{2a^2}\cdot 3\sqrt[4]{8a^3}\cdot 5\sqrt[6]{16a^5} = 15\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[4]{8a^3}\cdot\sqrt[6]{16a^5} =$
$= 15\sqrt[12]{2^4a^8}\cdot\sqrt[12]{8^3a^9}\cdot\sqrt[12]{16^2a^{10}} = 15\sqrt[12]{2^4\cdot a^8}\cdot\sqrt[12]{2^9a^9}\cdot\sqrt[12]{2^8a^{10}} =$
$= 15\sqrt[12]{2^4\cdot 2^8\cdot 2^9\cdot a^{27}} = 15\sqrt[12]{2^{21}\cdot a^{27}} = 30\,a^2\sqrt[12]{2^9a^3} = 30\,a^2\sqrt[4]{2^3\cdot a}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (3, 4, 12) = 12

SOLUCIÓN: $\boxed{30\,a^2\sqrt[4]{8a}}$

118. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{4x^2y^3z}\cdot\sqrt[3]{xz^2}\cdot\sqrt[6]{4x^2yz} =$
$= \sqrt[6]{4^2x^4y^6z^2}\cdot\sqrt[6]{x^2z^4}\cdot\sqrt[6]{4x^2yz} = \sqrt[6]{4^3x^8y^7z^7} =$
$= \sqrt[6]{2^6x^8y^7z^7} = 2xyz\sqrt[6]{x^2yz}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (3, 3, 6) = 6

SOLUCIÓN: $\boxed{2xyz\sqrt[6]{x^2yz}}$

119. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$

SOLUCIÓN: $\boxed{4}$

120. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{81}} = \dfrac{11}{9}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{11}{9}}$

121. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\dfrac{250}{16}} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \dfrac{5}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

122. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{108}{4}} = \sqrt[3]{27} = 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{3}$

123. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{48}{6}} = \sqrt[3]{8} = 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{2}$

124. RESOLUCIÓN

$\dfrac{6\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{\dfrac{20}{5}} = 6\sqrt{4} = 6\cdot 2 = 12$

SOLUCIÓN: $\boxed{12}$

125. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{x^3}{x}} = \sqrt{x^2} = x$

SOLUCIÓN: $\boxed{x}$

126. RESOLUCIÓN

$\dfrac{8\sqrt{x^5y^3}}{\sqrt{x^3y}} = 8\sqrt{\dfrac{x^5y^3}{x^3y}} = 8\sqrt{x^2y^2} = 8xy$

SOLUCIÓN: $\boxed{8xy}$

127. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{(a+b)\,(a-b)}{a+b}} = \sqrt{a-b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{a-b}}$

128. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt[3]{a^6b^4}}{\sqrt[3]{a^2b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^6b^4}{a^2b}} = \sqrt[3]{a^4b^3} = ab\sqrt[3]{a}$

SOLUCIÓN: $\boxed{ab\sqrt[3]{a}}$

129. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^4}{a^3}} = \sqrt[6]{a}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[6]{a}}$

130. RESOLUCIÓN

$\dfrac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{5^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{20}{25}} = \sqrt[4]{\dfrac{4}{5}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt[4]{\dfrac{4}{5}}}$

131. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{5^3}{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{125}{4}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\sqrt[6]{\frac{125}{4}}}$

132. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{ab^3}}{\sqrt[4]{a^2b^2}} = \frac{\sqrt[4]{a^2b^6}}{\sqrt[4]{a^2b^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^2b^6}{a^2b^2}} = \sqrt[4]{b^4} = b$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{b}$

133. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt[6]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} = \frac{\sqrt[6]{a^5b^7}}{\sqrt[6]{a^4b^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^5b^7}{a^4b^2}} = \sqrt[6]{ab^5}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\sqrt[6]{ab^5}}$

134. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt[5]{3a^3b}}{\sqrt[3]{ab^2}} = \frac{\sqrt[15]{3^3a^9b^3}}{\sqrt[15]{a^5b^{10}}} = \sqrt[15]{\frac{3^3a^9b^3}{a^5b^{10}}} = \sqrt[15]{\frac{27a^4}{b^7}}$$

$\boldsymbol{\sqrt[15]{\frac{27a^4}{b^7}}}$

135. RESOLUCIÓN

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$

136. RESOLUCIÓN

$$\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{6}}$

137. RESOLUCIÓN

$$\frac{7}{4\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{11}}{4\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{11}}{4\cdot 11} = \frac{7\sqrt{11}}{44}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{11}\cdot\sqrt{11} = \sqrt{121} = 11$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{7\sqrt{11}}{44}}$

138. RESOLUCIÓN

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{4}}{2}}$

139. RESOLUCIÓN

$$\frac{3}{\sqrt[5]{4}} = \frac{3\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{4^4}} = \frac{3\sqrt[5]{4^4}}{4}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{4^4} = \sqrt[5]{4^5} = 4$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{3\sqrt[5]{4^4}}{4}}$

140. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{3^5}} = \frac{\sqrt[6]{7^3\cdot 3^5}}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{7}\cdot\sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{7^3}\cdot\sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{7^3\cdot 3^5}$

$\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{\sqrt[6]{7^3\cdot 3^5}}{3}}$

141. RESOLUCIÓN

$$\frac{2}{6+\sqrt{3}} = \frac{2(6-\sqrt{3})}{(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})} = \frac{2(6-\sqrt{3})}{33}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) = 6^2 - (\sqrt{3})^2 = 36 - 3 = 33$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{2(6-\sqrt{3})}{33}}$

142. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{35}}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{5}(3-\sqrt{7}) = 3\sqrt{5} - \sqrt{35}$

$(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7}) = 9 - 7 = 2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{35}}{2}}$

143. RESOLUCIÓN

$$\frac{6}{\sqrt{11}+3} = \frac{6(\sqrt{11}-3)}{(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)} = \frac{6(\sqrt{11}-3)}{2} =$$

$$= 3(\sqrt{11}-3)$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3) = 11 - 9 = 2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{3(\sqrt{11}-3)}$

144. RESOLUCIÓN

$$\frac{5}{4-\sqrt{13}} = \frac{5(4+\sqrt{13})}{(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13})} = \frac{5(4+\sqrt{13})}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13}) = 16 - 13 = 3$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{5(4+\sqrt{13})}{3}}$

145. RESOLUCIÓN

$$\frac{7}{\sqrt{15}-2} = \frac{7(\sqrt{15}+2)}{(\sqrt{15}-2)(\sqrt{15}+2)} = \frac{7(\sqrt{15}+2)}{11}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{15}-2)(\sqrt{15}+2) = 15 - 4 = 11$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{7(\sqrt{15}+2)}{11}}$

146. RESOLUCIÓN

$$\frac{2-\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{(2-\sqrt{5})\sqrt{10}}{3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}-\sqrt{50}}{3\cdot 10} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{30}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{10}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{100} = 10$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{2\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{30}}$

147. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{4}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5-1 = 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{4}}$

148. RESOLUCIÓN

$$\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1} =$$

$$= 7(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3-2 = 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

149. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = 7-3 = 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}}$

150. RESOLUCIÓN

$$\frac{11}{\sqrt{19}+\sqrt{7}} = \frac{11(\sqrt{19}-\sqrt{7})}{(\sqrt{19}+\sqrt{7})(\sqrt{19}-\sqrt{7})} = \frac{11(\sqrt{19}-\sqrt{7})}{12}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{19}+\sqrt{7})(\sqrt{19}-\sqrt{7}) = 19-7 = 12$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{11(\sqrt{19}-\sqrt{7})}{12}}$

151. RESOLUCIÓN

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} =$$

$$= 2(\sqrt{5}+\sqrt{2})$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = 5-2 = 3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

152. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{11}-\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{13}(\sqrt{11}+\sqrt{8})}{(\sqrt{11}-\sqrt{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8})} = \frac{\sqrt{13}(\sqrt{11}+\sqrt{8})}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{11}-\sqrt{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8}) = 11-8 = 3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{\sqrt{13}(\sqrt{11}+\sqrt{8})}{3}}$

153. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{6}}{1} =$$

$$= 5+2\sqrt{6}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{6}+2 = 5+2\sqrt{6}$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3-2 = 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{5+2\sqrt{6}}$

154. RESOLUCIÓN

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}) = b-c$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}}$

155. RESOLUCIÓN

$$\frac{5}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{5(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{5(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{30} = \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{6}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}) = (5\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5})^2 =$

$= 75-45 = 30$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{6}}$

156. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} =$$

$$= \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 6-2\sqrt{12}+2 = 8-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3}$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 6-2 = 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{2-\sqrt{3}}$

157. RESOLUCIÓN

$$\frac{5-3\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}} = \frac{(5-3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} = \frac{43-30\sqrt{2}}{7}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(5-3\sqrt{2})^2 = 25-30\sqrt{2}+18 = 43-30\sqrt{2}$

$(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2}) = 25-18 = 7$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{43-30\sqrt{2}}{7}}$

158. RESOLUCIÓN

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{x+2} = \sqrt{x+2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+2} = \sqrt{(x+2)^2} = x+2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt{x+2}}$

159. RESOLUCIÓN

$$\frac{3(2-x)}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} = \frac{3(2-x)\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt[3]{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{2-x}} = \frac{3(2-x)\sqrt[3]{2-x}}{2-x} =$$

$$= 3\sqrt[3]{2-x}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{3\sqrt[3]{2-x}}$

160. RESOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) = x-4$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4}}$

161. RESOLUCIÓN

$$\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{x(x-4)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = x(x-4)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x(x-4)}}$

162. RESOLUCIÓN

$$100^{1/2} = \sqrt{100} = 10$$

SOLUCIÓN: **10**

163. RESOLUCIÓN

$$81^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$$

SOLUCIÓN: **27**

164. RESOLUCIÓN

$$4^{-5/2} = \frac{1}{4^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{4^5}} = \frac{1}{32}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{1}{32}}$

165. RESOLUCIÓN

$$64^{1/6} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

SOLUCIÓN: **2**

166. RESOLUCIÓN

$$125^{-2/3} = \frac{1}{125^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^6}} = \frac{1}{25}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{1}{25}}$

167. RESOLUCIÓN

$$25^{1/4}\cdot 25^{1/4} = 25^{2/4} = 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

SOLUCIÓN: **5**

168. RESOLUCIÓN

$$x^{1/4}\cdot x^{1/5} = x^{1/4+1/5} = x^{9/20}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^{9/20}}$

169. RESOLUCIÓN

$$a^{-3}\cdot a^5\cdot a^{3/4} = a^2\cdot a^{3/4} = a^2\sqrt[4]{a^3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a^2\sqrt[4]{a^3}}$

170. RESOLUCIÓN

$$a^{7/4}\cdot a^{-1/2}\cdot a^{-1/5} = a^{21/20} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a\sqrt[20]{a}}$

171. RESOLUCIÓN

$$a^{-2/3} : a^{-2/3} = a^0 = 1$$

SOLUCIÓN: **1**

172. RESOLUCIÓN

$$5^{-1/3}\cdot 5^{3/4} = 5^{5/12} = \sqrt[12]{5^5}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt[12]{5^5}}$

173. RESOLUCIÓN

$$a^{3/4}\cdot b^{2/5} : a^{7/8}\cdot b^{-1/2} = a^{-1/8}\cdot b^{9/10}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a^{-1/8}\cdot b^{9/10}}$

174. RESOLUCIÓN

$$(a^{3/4})^{8/3} = a^{8/4} = a^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a^2}$

175. RESOLUCIÓN

$$(x^{1/4})^{-1/5} = x^{-1/20} = \frac{1}{x^{1/20}} = \frac{1}{\sqrt[20]{x}}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt[20]{x}}}$

176. RESOLUCIÓN

$(2^{-6})^{2/3} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{16}}$

177. RESOLUCIÓN

$(b^{-5/6})^{12} = b^{-10} = \frac{1}{b^{10}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1}{b^{10}}}$

178. RESOLUCIÓN

$(a^{-4})^{-3/4} = a^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a^3}$

179. RESOLUCIÓN

$(2a^{-1/2} \cdot b^{3/4})^6 = 2^6 \cdot a^{-3} \cdot b^{9/2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{64b^4\sqrt{b}}{a^3}}$

180. RESOLUCIÓN

$(a^{2/3})^{1/2} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt[3]{a}}$

181. RESOLUCIÓN

$\frac{30a^2 \cdot b \cdot c^{2/3}}{5a^{3/4} \cdot b^{1/2} \cdot c^{1/3}} = 6a^{5/4} \cdot b^{1/2} \cdot c^{1/3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{6\,a^{5/4} \cdot b^{1/2} \cdot c^{1/3}}$

182. RESOLUCIÓN

$\frac{[(81)^{3/4}]^{1/3}}{(25^{-2})^{-2}} = \frac{81^{1/4}}{5^8} = \frac{3}{5^8}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{3}{5^8}}$

183. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a^{3/2}} = (a^{3/2})^{1/2} = a^{3/4} = \sqrt[4]{a^3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt[4]{a^3}}$

184. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a^{-2/3}} = (a^{-2/3})^{1/2} = a^{-1/3} = \frac{1}{a^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}}$

185. RESOLUCIÓN

$\sqrt{16a^{3/5} \cdot b^{2/3}} = 4\sqrt{a^{3/5} \cdot b^{2/3}} = 4\,(a^{3/5} \cdot b^{2/3})^{1/2} = 4a^{3/10} \cdot b^{1/3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{4a^{3/10} \cdot b^{1/3}}$

186. RESOLUCIÓN

$\sqrt{a^{1/3} \cdot \sqrt[3]{a}} = \sqrt{a^{1/3} \cdot a^{1/3}} = \sqrt{a^{2/3}} = (a^{2/3})^{1/2} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt[3]{a}}$

187. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{27a^{1/4} \cdot b^{2/5}} = 3\sqrt[3]{a^{1/4} \cdot b^{2/5}} = 3\,(a^{1/4} \cdot b^{2/5})^{1/3} = 3a^{1/12} \cdot b^{2/15}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{3a^{1/12} \cdot b^{2/15}}$

188. RESOLUCIÓN

$5x^2 + 7x^2 = (5 + 7)\,x^2 = 12x^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{12x^2}$

189. RESOLUCIÓN

$3x^6 + \frac{1}{3}\,x^6 = \left(3 + \frac{1}{3}\right)x^6 = \frac{10}{3}\,x^6$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{10}{3}\,x^6}$

190. RESOLUCIÓN

$x^3 + 5x^3 - 2x^3 = (1 + 5 - 2)\,x^3 = 4x^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{4x^3}$

191. RESOLUCIÓN

$\frac{2}{5}\,x^5 - \frac{3}{4}\,x^5 + \frac{7}{10}\,x^5 = \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{10}\right)x^5 = \frac{7}{20}\,x^5$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{7}{20}\,x^5}$

192. RESOLUCIÓN

$\frac{2}{3}\,x^4 + \frac{5}{6}\,x^4 - \frac{1}{3}\,x^4 = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)x^4 = \frac{7}{6}\,x^4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{7}{6}\,x^4}$

193. RESOLUCIÓN

$5\,(4x^3) = 20x^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{20x^3}$

194. RESOLUCIÓN

$3\left(\frac{5}{6}\right)x^2 = \frac{5}{2}\,x^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{5}{2}\,x^2}$

195. RESOLUCIÓN

$7\,(3x^n) = 21x^n$

SOLUCIÓN: $\mathbf{21x^n}$

196. RESOLUCIÓN

$(2x^2)(3x^5) = 6x^5$

SOLUCIÓN: $\boxed{6x^5}$

197. RESOLUCIÓN

$(5x^3)\left(\frac{2}{5}x^6\right) = 2x^9$

SOLUCIÓN: $\boxed{2x^9}$

198. RESOLUCIÓN

$(5x^0)\left(\frac{7}{5}x^3\right) = 5\left(\frac{7}{5}x^3\right) = 7x^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{7x^3}$

199. RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6 \\ Q(x) &= 6x^3 \qquad\quad - 4x + 3 \\ \hline P(x) + Q(x) &= 8x^3 - 4x^2 - 7x + 9 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{8x^3 - 4x^2 - 7x + 9}$

200. RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(x) &= 12x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ Q(x) &= 3x^4 - 2x^3 \qquad + x - 1 \\ \hline P(x) + Q(x) &= 15x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{15x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x}$

201. RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(x) &= \qquad 5x^2 - 4x + 1 \\ Q(x) &= 7x^3 \qquad - 24x \\ R(x) &= \quad - 7x^2 \qquad + 21 \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) &= 7x^3 - 2x^2 - 28x + 22 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{7x^3 - 2x^2 - 28x + 22}$

202. RESOLUCIÓN

En la resta conviene escribir el sustraendo cambiado de signo y después sumar:

$$\begin{aligned} P(x) &= -24x^3 + 18x^2 - 28x \\ -Q(x) &= 30x^3 + 14x^2 - 10x \\ \hline P(x) - Q(x) &= 6x^3 + 32x^2 - 38x \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{6x^3 + 32x^2 - 38x}$

203. RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(x) &= -7x^4 + 5x^3 + 9x^2 \qquad + 10 \\ -Q(x) &= \qquad - x^3 + 6x^2 - 2x + 7 \\ \hline P(x) - Q(x) &= -7x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 2x + 17 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{-7x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 2x + 17}$

204. RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 + x + 2 \\ -Q(x) &= x^3 - 5x^2 + 5x - 1 \\ \hline P(x) - Q(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{3x^3 - 4x^2 + 6x + 1}$

205. RESOLUCIÓN

I.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ Q(x) &= 2x^3 + x^2 + x + 2 \\ R(x) &= 5x^3 - 3x^2 + 3x - 5 \\ S(x) &= -x^3 + 5x^2 - 5x + 1 \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) + S(x) &= 7x^3 + x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{7x^3 + x^2 + x - 3}$

II.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ -Q(x) &= -2x^3 - x^2 - x - 2 \\ -R(x) &= -5x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ -S(x) &= x^3 - 5x^2 + 5x - 1 \\ \hline P(x) - [Q(x) + R(x) + S(x)] &= -5x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{-5x^3 - 5x^2 + 3x + 1}$

III.

$$\begin{aligned} 2P(x) &= 2(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\ 3Q(x) &= 3(2x^3 + x^2 + x + 2) = 6x^3 + 3x^2 + 3x + 6 \\ \hline 2P(x) + 3Q(x) &= 8x^3 - x^2 + 7x + 4 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{8x^3 - x^2 + 7x + 4}$

IV.

$$\begin{aligned} 2Q(x) &= 2(2x^3 + x^2 + x + 2) = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \\ 3R(x) &= 3(5x^3 - 3x^2 + 3x - 5) = 15x^3 - 9x^2 + 9x - 15 \\ 4S(x) &= 4(-x^3 + 5x^2 - 5x + 1) = -4x^3 + 20x^2 - 20x + 4 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ -2Q(x) &= -4x^3 - 2x^2 - 2x - 4 \\ 3R(x) &= 15x^3 - 9x^2 + 9x - 15 \\ -4S(x) &= 4x^3 - 20x^2 + 20x - 4 \\ \hline P(x) - 2Q(x) + 3R(x) - 4S(x) &= 16x^3 - 33x^2 + 29x - 24 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{16x^3 - 33x^2 + 29x - 24}$

V.

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 + x^2 + x + 2 \\ R(x) &= 5x^3 - 3x^2 + 3x - 5 \\ -S(x) &= x^3 - 5x^2 + 5x - 1 \\ P(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ \hline Q(x) + R(x) - [S(x) - P(x)] &= 9x^3 - 9x^2 + 11x - 5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN V: $\boxed{9x^3 - 9x^2 + 11x - 5}$

VI.

$$\begin{aligned} 2R(x) &= 10x^3 - 6x^2 + 6x - 10 \\ -S(x) &= x^3 - 5x^2 + 5x - 1 \\ -P(x) &= -x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2R(x) - [S(x) + P(x)] &= 10x^3 - 9x^2 + 9x - 10 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN VI: $\boxed{10x^3 - 9x^2 + 9x - 10}$

VII.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ -S(x) &= x^3 - 5x^2 + 5x - 1 \\ -2R(x) &= -10x^3 + 6x^2 - 6x + 10 \\ \hline P(x) - [S(x) + 2R(x)] &= -8x^3 - x^2 + x + 8 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN VII: $\boxed{-8x^3 - x^2 + x + 8}$

206. RESOLUCIÓN

$(x - 3) \cdot 5x^3 = 5x^4 - 15x^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{5x^4 - 15x^3}$

207. RESOLUCIÓN

$(6x^2 - 8x + 2) \cdot 2x = 12x^3 - 16x^2 + 4x$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{12x^3 - 16x^2 + 4x}}$

208. RESOLUCIÓN

$\left(2x^2 - 8x + \frac{1}{2}\right) \cdot 4x^2 = 8x^4 - 32x^3 + 2x^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^4 - 32x^3 + 2x^2}}$

209. RESOLUCIÓN

$(3x^2 - 4x + 1) \cdot (-2x^3) = -6x^5 + 8x^4 - 2x^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{-6x^5 + 8x^4 - 2x^3}}$

210. RESOLUCIÓN

$(3a^2x^3 + 4ax^2 + x) \cdot (-4ax^2) = -12a^3x^5 - 16a^2x^4 - 4ax^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{-12a^3x^5 - 16a^2x^4 - 4ax^3}}$

211. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} x + 5 \\ x - 6 \\ \hline -6x - 30 \\ x^2 + 5x \quad\quad \\ \hline x^2 - x - 30 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 - x - 30}}$

212. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 2x - 4 \\ 8x + 5 \\ \hline 10x - 20 \\ 16x^2 - 32x \quad\quad \\ \hline 16x^2 - 22x - 20 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{16x^2 - 22x - 20}}$

213. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 1 \\ 4x + 3 \\ \hline 6x^2 - 9x + 3 \\ 8x^3 - 12x^2 + 4x \quad\quad \\ \hline 8x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^3 - 6x^2 - 5x + 3}}$

214. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 6x^2 + 2x \\ 2x - \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\ 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 \quad\quad\quad \\ \hline 4x^4 - \frac{25}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4x^4 - \frac{25}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}}$

215. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{rr} P(x) = & x^3 - x^2 + 3x - 1 \\ Q(x) = & x^3 \quad\quad + 5x + 2 \\ \hline & 2x^3 - 2x^2 + 6x - 2 \\ & 5x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x \quad\quad \\ & x^6 - x^5 + 3x^4 - x^3 \quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline P(x) \cdot Q(x) = & x^6 - x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 13x^2 + x - 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^6 - x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 13x^2 + x - 2}}$

216. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{rr} P(x) = & 3x^2 - 2x + 6 \\ Q(x) = & 4x^2 + 3x - 5 \\ \hline & -15x^2 + 10x - 30 \\ & 9x^3 - 6x^2 + 18x \quad\quad \\ & 12x^4 - 8x^3 + 24x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline P(x) \cdot Q(x) = & 12x^4 + x^3 + 3x^2 + 28x - 30 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{12x^4 + x^3 + 3x^2 + 28x - 30}}$

217. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{rr} P(x) = & 3x^5 - 7x^4 \quad + x^2 \quad - 4 \\ Q(x) = & 2x^2 - 5x + 6 \\ \hline & 18x^5 - 42x^4 \quad + 6x^2 \quad - 24 \\ & -15x^6 + 35x^5 \quad - 5x^3 \quad + 20x \quad\quad \\ & 6x^7 - 14x^6 \quad + 2x^4 \quad - 8x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline P(x) \cdot Q(x) = & 6x^7 - 29x^6 + 53x^5 - 40x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 20x - 24 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{6x^7 - 29x^6 + 53x^5 - 40x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 20x - 24}}$

218. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{rr} P(x) = & 3x^3 - 5x^2 + 6x + 1 \\ Q(x) = & 2x^2 - 3x + 2 \\ \hline & 6x^3 - 10x^2 + 12x + 2 \\ & -9x^4 + 15x^3 - 18x^2 - 3x \quad\quad \\ & 6x^5 - 10x^4 + 12x^3 + 2x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline P(x) \cdot Q(x) = & 6x^5 - 19x^4 + 33x^3 - 26x^2 + 9x + 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{6x^5 - 19x^4 + 33x^3 - 26x^2 + 9x + 2}}$

219. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{rr} P(x) = & 4x^3 \quad + 6x - 5 \\ Q(x) = & 3x^2 - 2x + 7 \\ \hline & 28x^3 \quad + 42x - 35 \\ & -8x^4 \quad - 12x^2 + 10x \quad\quad \\ & 12x^5 \quad + 18x^3 - 15x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline P(x) \cdot Q(x) = & 12x^5 - 8x^4 + 46x^3 - 27x^2 + 52x - 35 \end{array}$$

Para no tener que escribir tantas veces las potencias de x, se puede adoptar el siguiente esquema si el alumno lo considera más fácil:

		4	0	6	−5
			3	−2	7
		28	0	42	−35
	−8	0	−12	10	
12	0	18	−15		
12	−8	46	−27	52	−35

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{12x^5 - 8x^4 + 46x^3 - 27x^2 + 52x - 35}}$

220. RESOLUCIÓN

$(16x^4 - 8x^2 + 4x) : 2x = 8x^3 - 4x + 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{8x^3 - 4x + 2}}$

221. RESOLUCIÓN

$(12x^3 - 8x^2 - 16x) : 4x = 3x^2 - 2x - 4$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3x^2 - 2x - 4}}$

222. RESOLUCIÓN

$(12a^2x^3 + 7ax^2 - 8a^3x) : (-4a^2x) = -3x^2 - \dfrac{7x}{4a} + 2a$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{-3x^2 - \dfrac{7x}{4a} + 2a}}$

223. RESOLUCIÓN

$(8a^3x^2 - 6a^5x + 12a^2x^3) : (2ax) = 4a^2x - 3a^4 + 6ax^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4a^2x - 3a^4 + 6ax^2}}$

224. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -5x^3 & & +5x & -2 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +3x^3 & -x^2 & & & x^2 - x - 2 \\
\cline{1-5}
 & -2x^3 & -x^2 & +5x & -2 & \\
 & 2x^3 & -3x^2 & +x & & \\
\cline{2-5}
 & & -4x^2 & +6x & -2 & \\
 & & 4x^2 & -6x & +2 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

En lugar del esquema anterior, es mucho más sencillo emplear el siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & & 5 & -2 & 2 \; -3 \; \; 1 \\
\cline{6-6}
-2 & 3 & -1 & & & 1 \; -1 \; -2 \\
\cline{1-5}
 & -2 & -1 & 5 & -2 & \\
 & 2 & -3 & 1 & & \\
\cline{2-5}
 & & -4 & 6 & -2 & \\
 & & 4 & -6 & 2 & \\
\cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

NOTA: Emplearemos el 1.er esquema para que los alumnos practiquen.

SOLUCIÓN:

Cociente: $x^2 - x - 2$
Resto: 0

225. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & & +x^3 & +19x^2 & +5x & +17 & 2x^2 - x + 3 \\
\cline{7-7}
-4x^5 & +2x^4 & -6x^3 & & & & 2x^3 + x^2 - 2x + 7 \\
\cline{1-6}
 & 2x^4 & -5x^3 & +19x^2 & +5x & +17 & \\
 & -2x^4 & +x^3 & -3x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -4x^3 & +16x^2 & +5x & +17 & \\
 & & 4x^3 & -2x^2 & +6x & & \\
\cline{3-6}
 & & & 14x^2 & +11x & +17 & \\
 & & & -14x^2 & +7x & -21 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 18x & -4 &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN:

Cociente: $2x^3 + x^2 - 2x + 7$
Resto: $18x - 4$

226. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +11x^3 & -9x^2 & -2x & +24 & 3x^2 - 5x + 4 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +10x^3 & -8x^2 & & & 2x^2 + 7x + 6 \\
\cline{1-5}
 & 21x^3 & -17x^2 & -2x & +24 & \\
 & -21x^3 & +35x^2 & -28x & & \\
\cline{2-5}
 & & 18x^2 & -30x & +24 & \\
 & & -18x^2 & +30x & -24 & \\
\cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN:

Cociente: $2x^2 + 7x + 6$
Resto: 0

227. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & -4x^3 & +3x^2 & +2x & -1 & x^2 + x - 1 \\
\cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & +x^3 & & & & x^3 - x^2 - 2x + 4 \\
\cline{1-6}
 & -x^4 & -3x^3 & +3x^2 & +2x & -1 & \\
 & x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -2x^3 & +2x^2 & +2x & -1 & \\
 & & 2x^3 & +2x^2 & -2x & & \\
\cline{3-6}
 & & & 4x^2 & & -1 & \\
 & & & -4x^2 & -4x & +4 & \\
\cline{4-6}
 & & & & -4x & +3 &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN:

Cociente: $x^3 - x^2 - 2x + 4$
Resto: $-4x + 3$

228. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -3x^4 & & +3x^2 & -x & -1 & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{7-7}
-2x^5 & +6x^4 & -4x^3 & & & & 2x^3 + 3x^2 + 5x + 12 \\
\cline{1-6}
 & 3x^4 & -4x^3 & +3x^2 & -x & -1 & \\
 & -3x^4 & +9x^3 & -6x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & 5x^3 & -3x^2 & -x & -1 & \\
 & & -5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\
\cline{3-6}
 & & & 12x^2 & -11x & -1 & \\
 & & & -12x^2 & +36x & -24 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 25x & -25 &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN:

Cociente: $2x^3 + 3x^2 + 5x + 12$
Resto: $25x - 25$

229. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & & -4x^3 & +6x^2 & & -2 & 2x^3 - 6x^2 + 1 \\
\cline{7-7}
-6x^5 & +18x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2 + 9x + 25 \\
\cline{1-6}
 & 18x^4 & -4x^3 & +3x^2 & & -2 & \\
 & -18x^4 & +54x^3 & & -9x & & \\
\cline{2-6}
 & & 50x^3 & +3x^2 & -9x & -2 & \\
 & & -50x^3 & +150x^2 & & -25 & \\
\cline{3-6}
 & & & 153x^2 & -9x & -27 &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN:

Cociente: $3x^2 + 9x + 25$
Resto: $153x^2 - 9x - 27$

230. RESOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rl}
x^6 \quad - 3x^4 \qquad\qquad + 2x & \underline{| x^3 - 2x^2 + 1} \\
\underline{-x^6 + 2x^5 \quad - x^3 \qquad\quad} & x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
2x^5 - 3x^4 - x^3 \qquad + 2x & \\
\underline{-2x^5 + 4x^4 \qquad - 2x^2 \quad} & \\
x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x & \\
\underline{-x^4 + 2x^3 \qquad - x} & \\
x^3 - 2x^2 + x & \\
\underline{-x^3 + 2x^2 \quad - 1} & \\
x - 1 &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^3 + 2x^2 + x + 1$**
Resto: $x - 1$

231. RESOLUCIÓN

$(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{4x^2 + 4xy + y^2}$

232. RESOLUCIÓN

$(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{9x^2 - 12xy + 4y^2}$

233. RESOLUCIÓN

$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{4a^2 + 12ab + 9b^2}$

234. RESOLUCIÓN

$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{4a^2x^2 + 4abx + b^2}$

235. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} =$$
$$= \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}}$

236. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{2}{5}x^2 - 2y\right)^2 = \frac{4}{25}x^4 - 2 \cdot \frac{2}{5}x^2 \cdot 2y + 4y^2 =$$
$$= \frac{4}{25}x^4 - \frac{8}{5}x^2y + 4y^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{4}{25}x^4 - \frac{8}{5}x^2y + 4y^2}$

237. RESOLUCIÓN

$(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3\,(2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2xy^2 + y^3 =$
$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3}$

238. RESOLUCIÓN

$(1 + 2x)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \cdot (2x)^2 + (2x)^3 =$
$= 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{1 + 6x + 12x^2 + 8x^3}$

239. RESOLUCIÓN

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$
$$= 8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}}$

240. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)^3 = \left(\frac{x}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot \frac{y}{5} +$$
$$+ 3 \cdot \frac{x}{4} \cdot \left(\frac{y}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^3 =$$
$$= \frac{x^3}{64} - \frac{3x^2y}{80} + \frac{3xy^2}{100} - \frac{y^3}{125}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^3}{64} - \frac{3x^2y}{80} + \frac{3xy^2}{100} - \frac{y^3}{125}}$

241. RESOLUCIÓN

$(3x - 2y)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3}$

242. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}x\right)^2 \cdot \frac{3}{4}y +$$
$$+ 3 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \left(\frac{3}{4}y\right)^2 - \left(\frac{3}{4}y\right)^3 =$$
$$= \frac{8}{27}x^3 - x^2y + \frac{9}{8}xy^2 - \frac{27}{64}y^3$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{8}{27}x^3 - x^2y + \frac{9}{8}xy^2 - \frac{27}{64}y^3}$

243. RESOLUCIÓN

$$\left(1 - \frac{x}{3}\right)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{x^2}{9} - \left(\frac{x}{3}\right)^3 =$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}}$

244. RESOLUCIÓN

$(ax - 2by)^3 = (ax)^3 - 3\,(ax)^2\,2by + 3 \cdot ax\,(2by)^2 - (2by)^3 =$
$= a^3x^3 - 6a^2bx^2y + 12ab^2xy^2 - 8b^3y^3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a^3x^3 - 6a^2bx^2y + 12ab^2xy^2 - 8b^3y^3}$

245. RESOLUCIÓN

$(1 - x + x^2)^2 = 1 + x^2 + x^4 - 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot x^2 =$
$= 1 + x^2 + x^4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$

246. RESOLUCIÓN

$(1 + 2x - 3y)^2 = 1 + (2x)^2 + (-3y)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x + 2 \cdot 1\,(-3y) +$
$+ 2 \cdot 2x\,(-3y) = 1 + 4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y - 12xy =$
$= 1 + 4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y - 12xy$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1 + 4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y - 12xy}}$

247. RESOLUCIÓN

$(2a + b + 3c)^2 = (2a)^2 + b^2 + (3c)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + 2 \cdot 2a \cdot 3c +$
$+ 2 \cdot b \cdot 3c = 4a^2 + b^2 + 9c^2 + 4ab + 12ac + 6bc$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4a^2 + b^2 + 9c^2 + 4ab + 12ac + 6bc}}$

248. RESOLUCIÓN

$(ax^2 + bx + c)^2 = (ax^2)^2 + (bx)^2 + c^2 + 2 \cdot ax^2 \cdot bx + 2 \cdot ax^2 \cdot c +$
$+ 2bx \cdot c = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)\,x^2 + 2bcx + c^2}}$

249. RESOLUCIÓN

$6x - 2x^2 = 2x\,(3 - x)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x\,(3 - x)}}$

250. RESOLUCIÓN

$2x^2 - 8xy = 2x\,(x - 4y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x\,(x - 4y)}}$

251. RESOLUCIÓN

$20a^2 - 10ab = 10a\,(2a - b)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{10a\,(2a - b)}}$

252. RESOLUCIÓN

$3x\,(x - 2y) - 4y\,(x - 2y) = (x - 2y)\,(3x - 4y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x - 2y)\,(3x - 4y)}}$

253. RESOLUCIÓN

$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x + 3y)^2}}$

254. RESOLUCIÓN

$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(a - 2b)^2}}$

255. RESOLUCIÓN

$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(3x - 2y)^2}}$

256. RESOLUCIÓN

$25a^2 + 10ab + b^2 = (5a + b)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(5a + b)^2}}$

257. RESOLUCIÓN

$4x^2 - y^2 = (2x + y)\,(2x - y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(2x + y)\,(2x - y)}}$

258. RESOLUCIÓN

$4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)\,(2a - 3b)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(2a + 3b)\,(2a - 3b)}}$

259. RESOLUCIÓN

$25x^2 - 36y^2 = (5x + 6y)\,(5x - 6y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(5x + 6y)\,(5x - 6y)}}$

260. RESOLUCIÓN

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x + y)^3}}$

261. RESOLUCIÓN

$4a^4 - 8a^2 + 4 = 4\,(a^4 - 2a + 1) = 4\,(a - 1)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{4\,(a^2 - 1)^2}}$

262. RESOLUCIÓN

$a\,(3x - 1) + b\,(3x - 1) = (3x - 1)\,(a + b)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(3x - 1)\,(a + b)}}$

263. RESOLUCIÓN

$3ax + 3ay + 5bx + 5by = 3a\,(x + y) + 5b\,(x + y) =$
$= (x + y)\,(3a + 5b)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(x + y)\,(3a + 5b)}}$

264. RESOLUCIÓN

$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(2x - y)^3}}$

265. RESOLUCIÓN

$3x^2 - 12xy + 12y^2 = 3\,(x^2 - 4xy + 4y^2) = 3\,(x - 2y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3\,(x - 2y)^2}}$

266. RESOLUCIÓN

$1 + 2x + x^2 - 4y^2 = (1 + x)^2 - 4y^2 = (1 + x + 2y)\,(1 + x - 2y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(1 + x + 2y)\,(1 + x - 2y)}}$

267. RESOLUCIÓN

$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}$

268. RESOLUCIÓN

$x^4 - 81y^4 = (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2) = (x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)}$

269. RESOLUCIÓN

$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2xy(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)[(x^2 + y^2) - 2xy] =$
$= (x^2 - y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 - y^2)(x - y)^2 = (x + y)(x - y)^3$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x + y)(x - y)^3}$

270. RESOLUCIÓN

$x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a) = (x - a)(x - b)$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x - a)(x - b)}$

271. RESOLUCIÓN

$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) =$
$= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)[a(x^2 - x + 1) +$
$+ bx] = (x + 1)[ax^2 - ax + a + bx] =$
$= (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a]$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a]}$

272. RESOLUCIÓN

Para $x = 2$ será: $\dfrac{2^3 + 1}{2 + 2} = \dfrac{9}{4}$

Para $x = -2$ será: $\dfrac{(-2)^3 + 1}{2 - 2} = \dfrac{-7}{0}$

SOLUCIÓN: **Para x = 2 es $\dfrac{9}{4}$**
Para x = −2, carece de valor numérico

273. RESOLUCIÓN

Para $x = 2$; $y = 3$ será: $\dfrac{2^2 + 3}{2 + 3^2} = \dfrac{7}{11}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{7}{11}}$

274. RESOLUCIÓN

Para $x = 1$; $y = 3$ será: $\dfrac{1 - 3 + 2}{1 + 3 + 6} = \dfrac{0}{10} = 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{0}$

275. RESOLUCIÓN

Para $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \dfrac{3}{5} \end{cases}$ será: $\dfrac{5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dfrac{3}{5} - 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{3}{5}}{1 \cdot 2 \cdot \dfrac{9}{25}} =$

$= \dfrac{12 - \dfrac{36}{5}}{\dfrac{18}{25}} = \dfrac{\dfrac{24}{5}}{\dfrac{18}{25}} = \dfrac{20}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{20}{3}}$

276. RESOLUCIÓN

Para $a = -\dfrac{1}{2}$; $b = -\dfrac{2}{3}$ será:

$$\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)} = \dfrac{-\dfrac{11}{36}}{-\dfrac{5}{12}} = \dfrac{11}{15}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{11}{15}}$

277. RESOLUCIÓN

Para $a = 3$; $b = 2$ será:

$$\dfrac{(3 + 2)^3(3 - 2) - (3 - 2)^2}{4 + (3 + 2)^2 - 3 \cdot 9} = \dfrac{125 - 1}{4 + 25 - 27} = \dfrac{124}{2} = 62$$

SOLUCIÓN: $\boxed{62}$

278. RESOLUCIÓN

$$\dfrac{60x^5y^4z}{48x^4yz^3} = \dfrac{(60x^5y^4z) : (12x^4yz)}{(48x^4yz^3) : (12x^4yz)} = \dfrac{5xy^3}{4z^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Se divide numerador y denominador por el m. c. d. de ambos: $12x^4yz$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{5xy^3}{4z^2}}$

279. RESOLUCIÓN

$$\dfrac{-33x^3y^2}{11x^2y^2z} = \dfrac{(-33x^3y^2) : (11x^2y^2)}{(11x^2y^2z) : (11x^2y^2)} = \dfrac{-3x}{z}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. d. es: $11x^2y^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{-3x}{z}}$

280. RESOLUCIÓN

$$\dfrac{-14a^4b^2c^3d}{28a^2b^3c^3d^3} = \dfrac{(-14a^4b^2c^3d) : (14a^2b^2c^3d)}{(28a^2b^3c^3d^3) : (14a^2b^2c^3d)} = \dfrac{-a^2}{2bd^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. d. es: $14a^2b^2c^3d$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{-a^2}{2bd^2}}$

281. RESOLUCIÓN

$$\dfrac{3a^2b - ab}{9ab - 3b} = \dfrac{ab(3a - 1)}{3b(3a - 1)} = \dfrac{a}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Se descomponen numerador y denominador en producto de factores:

$3a^2b - ab = ab(3a - 1)$
$9ab - 3b = 3b(3a - 1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{a}{3}}$

282. RESOLUCIÓN

$$\frac{2x^2y - xy}{12x^3y - 3xy} = \frac{xy\,(2x-1)}{3xy\,(2x-1)\,(2x+1)} = \frac{1}{3\,(2x+1)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$2x^2y - xy = xy\,(2x-1)$

$12x^3y - 3xy = 3xy\,(4x^2-1) = 3xy\,(2x-1)\,(2x+1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3\,(2x+1)}}}$

283. RESOLUCIÓN

$$\frac{5x^3y^2 - 10xy^3}{15x^3y^3 + 10x^3y^2} = \frac{5xy^2\,(x^2-2y)}{5x^3y^2\,(3y+2)} = \frac{x^2-2y}{x^2\,(3y+2)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5x^3y^2 - 10xy^3 = 5xy^2\,(x^2-2y)$

$15x^3y^3 + 10x^3y^2 = 5x^3y^2\,(3y+2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x^2-2y}}{\mathbf{x^2\,(3y+2)}}}$

284. RESOLUCIÓN

$$\frac{9x^2 - 25y^2}{3xy + 5y^2} = \frac{(3x-5y)\,(3x+5y)}{y\,(3x+5y)} = \frac{3x-5y}{y}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$9x^2 - 25y^2 = (3x-5y)\,(3x+5y)$

$3xy + 5y^2 = y\,(3x+5y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{3x-5y}}{\mathbf{y}}}$

285. RESOLUCIÓN

$$\frac{2a^3 - 8a}{4a^2 - 16a + 16} = \frac{2a\,(a-2)\,(a+2)}{4\,(a-2)\,(a-2)} = \frac{a\,(a+2)}{2\,(a-2)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$2a^3 - 8a = 2a\,(a^2-4) = 2a\,(a-2)\,(a+2)$

$4a^2 - 16a + 16 = 4\,(a^2-4a+4) = 4\,(a-2)^2 = 4\,(a-2)\,(a-2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{a\,(a+2)}}{\mathbf{2\,(a-2)}}}$

286. RESOLUCIÓN

$$\frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{(x-y)^3}{(x-y)\,(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{x+y}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$

$x^2 - y^2 = (x-y)\,(x+y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{(x-y)^2}}{\mathbf{x+y}}}$

287. RESOLUCIÓN

$$\frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{6x^2 - 6y^2} = \frac{3\,(x-y)^2}{6\,(x-y)\,(x+y)} = \frac{x-y}{2\,(x+y)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3\,(x^2-2xy+y^2) = 3\,(x-y)^2$

$6x^2 - 6y^2 = 6\,(x^2-y^2) = 6\,(x-y)\,(x+y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x-y}}{\mathbf{2\,(x+y)}}}$

288. RESOLUCIÓN

$$\frac{6a^2 + 2a}{15a^3 + 5a^2} = \frac{2a\,(3a+1)}{5a^2\,(3a+1)} = \frac{2}{5a}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$6a^2 + 2a = 2a\,(3a+1)$

$15a^3 + 5a^2 = 5a^2\,(3a+1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5a}}}$

289. RESOLUCIÓN

$$\frac{8x^3 - 2xy^2}{4x^2 - 4xy + y^2} = \frac{2x\,(2x-y)\,(2x+y)}{(2x-y)^2} = \frac{2x\,(2x+y)}{2x-y}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$8x^3 - 2xy^2 = 2x\,(4x^2-y^2) = 2x\,(2x-y)\,(2x+y)$

$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x-y)^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2x\,(2x+y)}}{\mathbf{2x-y}}}$

290. RESOLUCIÓN

$$\frac{8a^2 - 2ab}{12ab - 3b^2} = \frac{2a\,(4a-b)}{3b\,(4a-b)} = \frac{2a}{3b}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$8a^2 - 2ab = 2a\,(4a-b)$

$12ab - 3b^2 = 3b\,(4a-b)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2a}}{\mathbf{3b}}}$

291. RESOLUCIÓN

$$\frac{4x - 2y}{16x^2 - 4y^2} = \frac{2\,(2x-y)}{4\,(2x-y)\,(2x+y)} = \frac{1}{2\,(2x+y)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$4x - 2y = 2\,(2x-y)$

$16x^2 - 4y^2 = 4\,(4x^2-y^2) = 4\,(2x-y)\,(2x+y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\,(2x+y)}}}$

292. RESOLUCIÓN

$$\frac{45x^2 - 60xy + 20y^2}{180x^2 - 80y^2} = \frac{5\,(3x-2y)^2}{20\,(3x-2y)\,(3x+2y)} = \frac{3x-2y}{4\,(3+2y)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$45x^2 - 60xy + 20y^2 = 5\,(9x^2-12xy+4y^2) = 5\,(3x-2y)^2$

$180x^2 - 80y^2 = 20\,(9x^2-4y^2) = 20\,(3x-2y)\,(3x+2y)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{3x-2y}}{\mathbf{4\,(3x+2y)}}}$

293. RESOLUCIÓN

$$\frac{a+4}{(2a+5)^2 - (a+1)^2} = \frac{a+4}{(a+4)\,(3a+6)} = \frac{1}{3a+6}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(2a+5)^2 - (a+1)^2 = (2a+5-a-1)\,(2a+5+a+1) =$

$= (a+4)\,(3a+6)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3a+6}}}$

294. RESOLUCIÓN

$$\frac{1-y^2}{(1+xy)^2-(x+y)^2}=\frac{1-y^2}{(1-y^2)(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(1+xy)^2-(x+y)^2=1+2xy+x^2y^2-x^2-2xy-y^2=$
$=1-y^2-x^2+x^2y^2=(1-y^2)-x^2(1-y^2)=(1-y^2)(1-x^2)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{1}{1-x^2}}$

295. RESOLUCIÓN

$$\frac{(2x+5)^2-(x+4)(2x+5)}{x^2-1}=\frac{(2x+5)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+5}{x-1}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(2x+5)^2-(x+4)(2x+5)=(2x+5)(2x+5-x-4)=$
$=(2x+5)(x+1)$
$x^2-1=(x-1)(x+1)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{2x+5}{x-1}}$

296. RESOLUCIÓN

$$\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}=\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+z+y)(x+z-y)}=\frac{x+y-z}{x+z-y}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2=(x+y+z)(x+y-z)$
$x^2-y^2+z^2+2xz=(x+z)^2-y^2=(x+z+y)(x+z-y)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x+y-z}{x+z-y}}$

297. RESOLUCIÓN

$$\frac{xy-3x-5y+15}{xy-3x}=\frac{x(y-3)-5(y-3)}{x(y-3)}=$$
$$=\frac{(y-3)(x-5)}{x(y-3)}=\frac{x-5}{x}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$xy-3x-5y+15=x(y-3)-5(y-3)=(y-3)(x-5)$
$xy-3x=x(y-3)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x-5}{x}}$

298. RESOLUCIÓN

$$\frac{x^4-y^4}{x^3y-xy^3}=\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{xy(x^2-y^2)}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x^2+y^2}{xy}}$

299. RESOLUCIÓN

$$\frac{xy+x-2y-2}{xy-5y+x-5}=\frac{(x-2)(y+1)}{(y+1)(x-5)}=\frac{x-2}{x-5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$xy+x-2y-2=y(x-2)+(x-2)=(x-2)(y+1)$
$xy-5y+x-5=x(y+1)-5(y+1)=(y+1)(x-5)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x-2}{x-5}}$

300. RESOLUCIÓN

$$\frac{a^3-a}{(a+1)^2(a-1)}=\frac{a(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)}=\frac{a}{a+1}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a^3-a=a(a^2-1)=a(a+1)(a-1)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{a}{a+1}}$

301. RESOLUCIÓN

$$\frac{x(x^2-1)-2(x^2-1)}{(x^2-2x+1)(x^2-4)}=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)(x-2)}=$$
$$=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x(x^2-1)-2(x^2-1)=(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)$
$(x^2-2x+1)(x^2-4)=(x-1)^2(x^2-4)=(x-1)^2(x+2)(x-2)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}}$

302. RESOLUCIÓN

m. c. m. (den.) $= bdy$

$$\frac{bdx}{bdy},\ \frac{ady}{bdy},\ \frac{byc}{bdy}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

1.er numerador:
$bdy : y = bd$ (1.er cociente) $\Rightarrow bdx$
2.º numerador:
$bdy : b = dy$ (2.º cociente) $\Rightarrow ady$
3.er numerador:
$bdy : d = by$ (3.er cociente) $\Rightarrow byc$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{bdx}{bdy},\ \frac{ady}{bdy},\ \frac{bcy}{bdy}}$

303. RESOLUCIÓN

$$\frac{x^2}{xyz},\ \frac{y^2}{xyz},\ \frac{z^2}{xyz}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= xyz$
$xyz : yz = x$
$x \cdot x = x^2$ (1.er numerador)
$xyz : xz = y$
$y \cdot y = y^2$ (2.º numerador)
$xyz : xy = z$
$z \cdot z = z^2$ (3.er numerador)

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x^2}{xyz},\ \frac{y^2}{xyz},\ \frac{z^2}{xyz}}$

304. RESOLUCIÓN

$$\frac{6ay^2}{6x^2y^3},\ \frac{2bxy^2}{6x^2y^3},\ \frac{cx}{6x^2y^3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= 6x^2y^3$
$6x^2y^3 : x^2y = 6y^2$
$6y^2 \cdot a = 6ay^2$; (1.er numerador)

$6x^2y^3 : 3xy = 2xy^2$
$2xy^2 \cdot b = 2bxy^2$; (2.º numerador)

$6x^2y^3 : 6xy^3 = x$
$x \cdot c = cx$; (3.er numerador)

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{6ay^2}{6x^2y^3},\ \frac{2bxy^2}{6x^2y^3},\ \frac{cx}{6x^2y^3}}$

305. RESOLUCIÓN

$\frac{6bx}{12a^2bc}, \frac{3a^2y}{12a^2bc}, \frac{2acz}{12a^2bc}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) = $12a^2bc$

Numeradores de las fracciones:

$12a^2bc : 2a^2c = 6b$
$6bx$; (1.^{er} numerador)
$12a^2bc : 4bc = 3a^2$
$3a^2y$; (2.° numerador)
$12a^2bc : 6ab = 2ac$
$2acz$; (3.^{er} numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{6bx}{12a^2bc}, \frac{3a^2y}{12a^2bc}, \frac{2acz}{12a^2bc}}$

306. RESOLUCIÓN

$\frac{7a}{4(a-1)}, \frac{a}{9(a^2-1)}, \frac{3a}{2(a+1)}$

$\frac{63a(a+1)}{36(a^2-1)}, \frac{4a}{36(a^2-1)}, \frac{54a(a-1)}{36(a^2-1)}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) = $36(a^2-1)$

$36(a^2-1) : 4(a-1) = 9(a+1)$

$9(a+1) \cdot 7a = 63a(a+1)$; (1.^{er} numerador)

$36(a^2-1) : 9(a^2-1) = 4$

$4 \cdot a = 4a$; (2.° numerador)

$36(a^2-1) : 2(a+1) = 18(a-1)$

$18(a-1) \cdot 3a = 54a(a-1)$; (3.^{er} numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{63a(a+1)}{36(a^2-1)}, \frac{4a}{36(a^2-1)}, \frac{54a(a-1)}{36(a^2-1)}}$

307. RESOLUCIÓN

$\frac{1}{3(x-y)}, \frac{1}{2(x+y)}, \frac{1}{x^2-y^2}$

$\frac{2(x+y)}{6(x^2-y^2)}, \frac{3(x-y)}{6(x^2-y^2)}, \frac{6}{6(x^2-y^2)}$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) = $6(x^2-y^2)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{2(x+y)}{6(x^2-y^2)}, \frac{3(x-y)}{6(x^2-y^2)}, \frac{6}{6(x^2-y^2)}}$

308. RESOLUCIÓN

m. c. m. (den.) = a^2-b^2

$\frac{a-b}{a^2-b^2}, \frac{a+b}{a^2-b^2}, \frac{1}{a^2-b^2}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(a^2-b^2) : (a+b) = a-b$; (1.^{er} numerador)

$(a^2-b^2) : (a-b) = a+b$; (2.° numerador)

$(a^2-b^2) : (a^2-b^2) = 1$; (3.^{er} numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{a-b}{a^2-b^2}, \frac{a+b}{a^2-b^2}, \frac{1}{a^2-b^2}}$

309. RESOLUCIÓN

$\frac{a^2}{a(a+1)}, \frac{2a}{a-1}, \frac{a+3}{a^2-1}$

m.c.m (den.) = $a(a^2-1)$

$\frac{a^2(a-1)}{a(a^2-1)}, \frac{2a^2(a+1)}{a(a^2-1)}, \frac{a(a+3)}{a(a^2-1)}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a(a^2-1) : a(a+1) = a-1$

$(a-1)a^2$; (1.^{er} numerador)

$a(a^2-1) : (a-1) = a(a+1)$

$a(a+1)2a = 2a^2(a+1)$; (2.° numerador)

$a(a^2-1) : (a^2-1) = a$

$a(a+3)$; (3.^{er} numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{a^2(a-1)}{a(a^2-1)}, \frac{2a^2(a+1)}{a(a^2-1)}, \frac{a(a+3)}{a(a^2-1)}}$

310. RESOLUCIÓN

m. c. m. (den.) = x^2-a^2

$\frac{(x+a)^2}{x^2-a^2}, \frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}, \frac{4ax}{x^2-a^2}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(x^2-a^2) : (x-a) = x+a$

$(x+a)(x+a) = (x+a)^2$; (1.^{er} numerador)

$(x^2-a^2) : (x+a) = x-a$

$(x-a)(x-a) = (x-a)^2$; (2.° numerador)

$(x^2-a^2) : (x^2-a^2) = 1$

$4ax$; (3.^{er} numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{(x+a)^2}{x^2-a^2}, \frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}, \frac{4ax}{x^2-a^2}}$

311. RESOLUCIÓN

$\frac{1}{x-1}, \frac{x}{x^2+1}, \frac{x(x+1)}{x^2(x-1)+(x-1)}$

$\frac{1}{x-1}, \frac{x}{x^2+1}, \frac{x(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}$

m. c. m. (den.) = $(x-1)(x^2+1)$

$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+1)}, \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}, \frac{x(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(x-1)(x^2+1) : (x-1) = x^2+1$; (1.^{er} numerador)

$(x-1)(x^2+1) : (x^2+1) = x-1$

$(x-1)x$; (2.° numerador)

$(x-1)(x^2+1) : (x-1)(x^2+1) = 1$

$x(x+1)$; (3.^{er} numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+1)}, \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}, \frac{x(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}}$

312. RESOLUCIÓN

m. c. m. (den.) = $xy(x^2-y^2)$

$\frac{x^4-y^4}{xy(x^2-y^2)}, \frac{x^3y(x+y)}{xy(x^2-y^2)}, \frac{xy^3(x-y)}{xy(x^2-y^2)}, \frac{x^2y^2}{xy(x^2-y^2)}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$xy(x^2-y^2) : xy = x^2-y^2$

$(x^2-y^2)(x^2+y^2) = x^4-y^4$; (1.^{er} numerador)

$xy(x^2-y^2) : (x-y) = xy(x+y)$

$xy(x+y)x^2 = x^3y(x+y)$; (2.° numerador)

$xy(x^2-y^2) : (x+y) = xy(x-y)$

$xy(x-y)y^2 = xy^3(x-y)$; (3.^{er} numerador)

$xy(x^2-y^2) : (x^2-y^2) = xy$

$xy \cdot xy = x^2y^2$; (4.° numerador)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^4-y^4}{xy(x^2-y^2)}, \frac{x^3y(x+y)}{xy(x^2-y^2)}, \frac{xy^3(x-y)}{xy(x^2-y^2)}, \frac{x^2 \cdot y^2}{xy(x^2-y^2)}}$

313. RESOLUCIÓN

$$\frac{3x}{(x-2y)^3}\ ,\ \frac{2y}{4\,(x-2y)\,(x+2y)}$$

$m.\ c.\ m.\ (den.) = 4\,(x-2y)^3\,(x+2y)$

$$\frac{12x\,(x+2y)}{4\,(x-2y)^3\,(x+2y)}\ ,\ \frac{2y\,(x-2y)^2}{4\,(x-2y)^3\,(x+2y)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = (x-2y)^3$

$4x^2 - 16y^2 = 4\,(x^2 - 4y^2) = 4\,(x-2y)\,(x+2y)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{12x\,(x+2y)}{4\,(x-2y)^3\,(x+2y)}\ ,\ \frac{2y\,(x-2y)^2}{4\,(x-2y)^3\,(x+2y)}}$

314. RESOLUCIÓN

$$\frac{2xy}{4\,(x-3y)^2}\ ,\ \frac{5}{6\,(x-3y)\,(x+3y)}$$

$m.\ c.\ m.\ (den.) = 12\,(x-3y)^2\,(x+3y)$

$$\frac{6xy\,(x+3y)}{12\,(x-3y)^2\,(x+3y)}\ ,\ \frac{10\,(x-3y)}{12\,(x-3y)^2\,(x+3y)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$4x^2 - 24xy + 36y^2 = 4\,(x^2 - 6xy + 9y^2) = 4\,(x-3y)^2$

$6x^2 - 54y^2 = 6\,(x^2 - 9y^2) = 6\,(x-3y)\,(x+3y)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{6xy\,(x+3y)}{12\,(x-3y)^2\,(x+3y)}\ ,\ \frac{10\,(x-3y)}{12\,(x-3y)^2\,(x+3y)}}$

315. RESOLUCIÓN

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{6x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{2x}{12} = \frac{6x + 3x + 2x}{12} =$$

$$= \frac{11x}{12}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.\ c.\ m.\ (den.) = 12$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{11x}{12}}$

316. RESOLUCIÓN

$$\frac{10x}{6} - \frac{6x}{8} = \frac{5x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{20x}{12} - \frac{9x}{12} =$$

$$= \frac{20x - 9x}{12} = \frac{11x}{12}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.\ c.\ m.\ (den.) = 12$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{11x}{12}}$

317. RESOLUCIÓN

$$\frac{6}{1-x} + \frac{5}{1+x} = \frac{6\,(1+x)}{1-x^2} + \frac{5\,(1-x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{6\,(1+x) + 5\,(1-x)}{1-x^2} = \frac{6 + 6x + 5 - 5x}{1-x^2} = \frac{x+11}{1-x^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.\ c.\ m.\ (den.) = (1-x)\,(1+x) = 1 - x^2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x+11}{1-x^2}}$

318. RESOLUCIÓN

$$\frac{x}{a-x} + \frac{a}{a+x} = \frac{x\,(a+x)}{a^2-x^2} + \frac{a\,(a-x)}{a^2-x^2} =$$

$$= \frac{x\,(a+x) + a\,(a-x)}{a^2-x^2} = \frac{ax + x^2 + a^2 - ax}{a^2-x^2} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.\ c.\ m.\ (den.) = (a-x)\,(a+x) = a^2 - x^2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$

319. RESOLUCIÓN

$$\frac{4a+5b}{6} + \frac{2a-3b}{5} = \frac{5\,(4a+5b)}{30} + \frac{6\,(2a-3b)}{30} =$$

$$= \frac{20a + 25b + 12a - 18b}{30} = \frac{32a+7b}{30}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.\ c.\ m.\ (den.) = 30$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{32a+7b}{30}}$

320. RESOLUCIÓN

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a} = \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)\,(a-b)}{a-b} = a+b$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{a+b}$

321. RESOLUCIÓN

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{(x-1)^2} -$$

$$- \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2\,(x+1)} + \frac{2x\,(x+1)}{(x-1)^2\,(x+1)} -$$

$$- \frac{x-1}{(x-1)^2\,(x+1)} = \frac{x^2 - 1 + 2x^2 + 2x - x + 1}{(x-1)^2\,(x+1)} =$$

$$= \frac{3x^2+x}{(x-1)^2\,(x+1)} = \frac{x\,(3x+1)}{(x-1)^2\,(x+1)}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$x^2 - 1 = (x+1)\,(x-1)$

$m.\ c.\ m.\ (den.) = (x-1)^2\,(x+1)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x\,(3x+1)}{(x-1)^2\,(x+1)}}$

322. RESOLUCIÓN

$$\frac{x}{2y} + \frac{2y}{x} - 2 = \frac{x^2}{2xy} + \frac{4y^2}{2xy} - \frac{4xy}{2xy} =$$

$$= \frac{x^2 + 4y^2 - 4xy}{2xy} = \frac{(x-2y)^2}{2xy}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.\ c.\ m.\ (den.) = 2xy$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{(x-2y)^2}{2xy}}$

323. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{3x}{24ab} + \frac{2y}{12ac} - \frac{z}{36bc} = \frac{x}{8ab} + \frac{y}{6ac} - \frac{z}{36bc} =$$

$$= \frac{9cx}{72abc} + \frac{12by}{72abc} - \frac{2az}{72abc} = \frac{9cx + 12by - 2az}{72abc}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= 72abc$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{9cx + 12by - 2az}{72abc}}$

324. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x}{x - y} + \frac{y}{x + y} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x\,(x + y)}{x^2 - y^2} +$$

$$+ \frac{y\,(x - y)}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + xy + xy - y^2}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2x\,(x + y)}{x^2 - y^2} = \frac{2x}{x - y}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= (x - y)\,(x + y) = x^2 - y^2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{2x}{x - y}}$

325. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{x - y}{xy} - \frac{y - z}{yz} - \frac{z - x}{xz} = \frac{z\,(x - y)}{xyz} - \frac{x\,(y - z)}{xyz} -$$

$$- \frac{y\,(z - x)}{xyz} = \frac{z\,(x - y) - x\,(y - z) - y\,(z - x)}{xyz} =$$

$$= \frac{xz - yz - xy + xz - yz + xy}{xyz} = \frac{2xz - 2yz}{xyz} = \frac{2z\,(x - y)}{xyz}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= xyz$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{2\,(x - y)}{xy}}$

326. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{x\,(x + 1)} - \frac{1}{x\,(x - 1)} +$$

$$+ \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{x\,(x^2 - 1)} - \frac{x + 1}{x\,(x^2 - 1)} + \frac{2x^2}{x\,(x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{x - 1 - x - 1 + 2x^2}{x\,(x^2 - 1)} = \frac{2x^2 - 2}{x\,(x^2 - 1)} = \frac{2\,(x^2 - 1)}{x\,(x^2 - 1)} = \frac{2}{x}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= x\,(x^2 - 1)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{2}{x}}$

327. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{x^3}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = \frac{x^3\,(x + 1)}{x^2 - 1} -$$

$$- \frac{x^2\,(x - 1)}{x^2 - 1} - \frac{x + 1}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{x^3\,(x + 1) - x^2\,(x - 1) - (x + 1) + (x - 1)}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x - 1 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= x^2 - 1$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}}$

328. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{2}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^2} + \frac{4}{1 + x} = \frac{2\,(1 + x)}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^2} +$$

$$+ \frac{4\,(1 - x)}{1 - x^2} = \frac{2\,(1 + x) - 3 + 4\,(1 - x)}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2 + 2x - 3 + 4 - 4x}{1 - x^2} = \frac{3 - 2x}{1 - x^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= 1 - x^2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{3 - 2x}{1 - x^2}}$

329. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} + \frac{x^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)^2}{x^2 - y^2} - \frac{(x - y)^2}{x^2 - y^2} +$$

$$+ \frac{x^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2 + x^2}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 + x^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + 4xy}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{x\,(x + 4y)}{x^2 - y^2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

m. c. m. (den.) $= x^2 - y^2$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x\,(x + 4y)}{x^2 - y^2}}$

330. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{5b^2}{2a} \cdot \frac{3a}{b} = \frac{15ab^2}{2ab} = \frac{15b}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{15b}{2}}$

331. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{5ab^2}{4x^2y} \cdot \frac{3xy}{5ab} = \frac{5ab^2 \cdot 3xy}{4x^2y \cdot 5ab} = \frac{3b}{4x}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{3b}{4x}}$

332. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{6}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x + y}{3} = \frac{6\,(x + y)}{3\,(x^2 - y^2)} = \frac{6\,(x + y)}{3\,(x + y)\,(x - y)} =$$

$$= \frac{2}{x - y}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{2}{x - y}}$

333. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{xy - y}{1 - 4x^2} \cdot \frac{1 + 2x}{x - 1} = \frac{y\,(x - 1)\,(1 + 2x)}{(1 + 2x)\,(1 - 2x)\,(x - 1)} = \frac{y}{1 - 2x}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{y}{1 - 2x}}$

334. RESOLUCIÓN

$$\frac{3x^2y}{a^2b}\cdot\frac{2ab}{5x^2y^3}\cdot 4x=\frac{24abx^3y}{5a^2bx^2y^3}=\frac{24x}{5ay^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{24x}}{\mathbf{5ay^2}}}$

335. RESOLUCIÓN

$$\frac{xy-3y}{x}\cdot\frac{3xy-4x}{2y}=\frac{y\,(x-3)\,x\,(3y-4)}{2xy}=$$
$$=\frac{(x-3)\,(3y-4)}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{(x-3)\,(3y-4)}}{\mathbf{2}}}$

336. RESOLUCIÓN

$$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{(x+y)^2}=\frac{1}{x+y}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+y}}}$

337. RESOLUCIÓN

$$\left(2ab-\frac{3xy}{ab}\right)\cdot 3a^2b^2=\frac{2a^2b^2-3xy}{ab}\cdot 3a^2b^2=(2a^2b^2-3xy)\,3ab$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3ab\,(2a^2b^2-3xy)}}$

338. RESOLUCIÓN

$$\frac{x}{x-3}\cdot\frac{x^2-4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}=\frac{x\,(x^2-4)\,(x^2-9)}{(x-3)\,(x+3)\,(x+2)}=$$
$$=\frac{x\,(x-2)\,(x+2)\,(x-3)\,(x+3)}{(x-3)\,(x+3)\,(x+2)}=x\,(x-2)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x\,(x-2)}}$

339. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)=\left(\frac{x+2}{x^2-4}\right)\left(\frac{x-2}{x}\right)=$$
$$=\frac{(x+2)\,(x-2)}{x\,(x^2-4)}=\frac{1}{x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}}$

340. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x^2}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=\frac{1+x^2}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}}}$

341. RESOLUCIÓN

$$\frac{5b^2}{2a}:\frac{4b}{3a}=\frac{5b^2}{2a}\cdot\frac{3a}{4b}=\frac{15ab^2}{8ab}=\frac{15b}{8}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{15b}}{\mathbf{8}}}$

342. RESOLUCIÓN

$$\frac{6x^3y^3}{5a^2b}:\frac{2x^2y}{5ab^2}=\frac{6x^3y^3}{5a^2b}\cdot\frac{5ab^2}{2x^2y}=\frac{3bxy^2}{a}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{3bxy^2}}{\mathbf{a}}}$

343. RESOLUCIÓN

$$\left(x-\frac{y}{z}\right):\left(x+\frac{y}{z}\right)=\frac{xz-y}{z}:\frac{xz+y}{z}=$$
$$=\frac{xz-y}{z}\cdot\frac{z}{xz+y}=\frac{xz-y}{xz+y}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{xz-y}}{\mathbf{xz+y}}}$

344. RESOLUCIÓN

$$\left(3a-\frac{2b}{x}\right):(3ax-2b)=\left(\frac{3ax-2b}{x}\right):(3ax-2b)=$$
$$=\frac{3ax-2b}{x}\cdot\frac{1}{3ax-2b}=\frac{3ax-2b}{x\,(3ax-2b)}=\frac{1}{x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}}$

345. RESOLUCIÓN

$$\frac{x^4-y^4}{a+b}:\frac{x^2-y^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{x^4-y^4}{a+b}:\frac{x^2-y^2}{(a+b)^2}=$$
$$=\frac{x^4-y^4}{a+b}\cdot\frac{(a+b)^2}{x^2-y^2}=\frac{(x^4-y^4)\,(a+b)^2}{(a+b)\,(x^2-y^2)}=(a+b)\,(x^2+y^2)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(a+b)\,(x^2+y^2)}}$

346. RESOLUCIÓN

$$\frac{24x-12}{5x^2-5}:\frac{6x-3}{x-1}=\frac{24x-12}{5x^2-5}\cdot\frac{x-1}{6x-3}=$$
$$=\frac{12\,(2x-1)\,(x-1)}{5\,(x^2-1)\,3\,(2x-1)}=\frac{4}{5\,(x+1)}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5\,(x+1)}}}$

347. RESOLUCIÓN

$$(x^2+y^2-2xy):\frac{3x-3y}{2x}=(x-y)^2:\frac{3x-3y}{2x}=$$
$$=(x-y)^2\cdot\frac{2x}{3x-3y}=\frac{2x\,(x-y)^2}{3\,(x-y)}=\frac{2x\,(x-y)}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\mathbf{2x\,(x-y)}}{\mathbf{3}}}$

348. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{x}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right):\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1+x}\right)=$$
$$=\frac{x^2+1}{1-x^2}:\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{x^2+1}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1}}$

349. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{x^3-x}{3x-6}:\frac{5+5x}{2x-4}=\frac{x^3-x}{3x-6}\cdot\frac{2x-4}{5+5x}=$$
$$=\frac{x(x^2-1)\,2(x-2)}{3(x-2)\,5(1+x)}=\frac{x(x-1)(x+1)\,2(x-2)}{3(x-2)\,5(1+x)}=$$
$$=\frac{2x(x-1)}{15}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{2x(x-1)}{15}}$

350. RESOLUCIÓN SI

$$\frac{\frac{2}{3}x^2}{2y}:\frac{\frac{x}{2}}{y^2z}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{2y}\cdot\frac{y^2z}{\frac{x}{2}}=\frac{\frac{2}{3}x^2y^2z}{xy}=\frac{2xyz}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{2}{3}xyz}$

351. RESOLUCIÓN SI

$$\left(\frac{x-a}{x+a}+1\right):\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)=\left(\frac{2x}{x+a}\right):\left(\frac{2a}{x-a}\right)=$$
$$=\frac{2x}{x+a}\cdot\frac{x-a}{2a}=\frac{2x(x-a)}{2a(x+a)}=\frac{x(x-a)}{a(x+a)}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{x(x-a)}{a(x+a)}}$

352. RESOLUCIÓN SI

$$\left(x-\frac{x-y}{1+xy}\right):\left(1+\frac{x^2-xy}{1+xy}\right)=\frac{x^2y+y}{1+xy}:\frac{1+x^2}{1+xy}=$$
$$=\frac{x^2y+y}{1+xy}\cdot\frac{1+xy}{1+x^2}=\frac{y(x^2+1)(1+xy)}{(1+xy)(1+x^2)}=y$$

SOLUCIÓN: $\boxed{y}$

353. RESOLUCIÓN SI

$$\left(\frac{2a+b}{3x-2y}\right)^2=\frac{(2a+b)^2}{(3x-2y)^2}=\frac{4a^2+4ab+b^2}{9x^2-12xy+4y^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{9x^2-12xy+4y^2}}$

354. RESOLUCIÓN SI

$$\left(\frac{3x^2y^3z}{4a^3}\right)^3=\frac{(3x^2y^3z)^3}{(4a^3)^3}=\frac{27x^6y^9z^3}{64a^9}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{27x^6y^9z^3}{64a^9}}$

355. RESOLUCIÓN SI

$$\left(\frac{2x^2y^4z^6}{3ab^2c^3}\right)^4=\frac{(2x^2y^4z^6)^4}{(3ab^2c^3)^4}=\frac{16x^8y^{16}z^{24}}{81a^4b^8c^{12}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{16x^8y^{16}z^{24}}{81a^4b^8c^{12}}}$

356. RESOLUCIÓN NO

$$\left(\frac{x-2y}{2x+y}\right)^3=\frac{(x-2y)^3}{(2x+y)^3}=\frac{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}}$

357. RESOLUCIÓN NO

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{ax+a+bx-b}{x^2-1}=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

Para que las fracciones $\frac{1}{x^2-1}$ *y* $\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$ *sean iguales se tiene que verificar:*

$$1=(a+b)x+a-b\Rightarrow\begin{cases}0=a+b\\1=a-b\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\text{ y }b=-\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ;\ b=-\dfrac{1}{2}}$

358. RESOLUCIÓN NO

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}=\frac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)}=$$
$$=\frac{ax+3a+bx-2b}{(x-2)(x+3)}=\frac{(a+b)x+(3a-2b)}{(x-2)(x+3)}$$
$$x+8=(a+b)x+(3a-2b)\Rightarrow\begin{cases}1=a+b\\8=3a-2b\end{cases}\Rightarrow a=2\ ;\ b=-1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a=2\ ;\ b=-1}$

359. RESOLUCIÓN NO

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}=$$
$$=\frac{(a+b)x+(-2a-b)}{x^3-3x+2}$$
$$x=(a+b)x+(-2a-b)\Rightarrow\begin{cases}1=a+b\\0=-2a-b\end{cases}\Rightarrow a=-1\ ;\ b=2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a=-1\ ;\ b=2}$

360. RESOLUCIÓN NO

$$\frac{2x+4}{(x-1)x(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}=$$
$$=\frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{(x-1)x(x+1)}=$$
$$=\frac{ax^2+ax+bx^2-b+cx^2-cx}{(x-1)x(x+1)}=$$
$$=\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{(x-1)x(x+1)}$$
$$2x+4=(a+b+c)x^2+(a-c)x-b$$

Resulta:

$$\left.\begin{array}{l}0=a+b+c\\2=a-c\\4=-b\end{array}\right\}\Rightarrow b=-4\ ;\ a=3\ ;\ c=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a=3\ ;\ b=-4\ ;\ c=1}$

361. RESOLUCIÓN

	3	−2	4	3	−1
2		6	8	24	54
	3	4	12	27	53

SOLUCIÓN: **Cociente: $3x^3 + 4x^2 + 12x + 27$**
Resto: 53

362. RESOLUCIÓN

	1	0	−3	2	0	−15
−2		−2	4	−2	0	0
	1	−2	1	0	0	−15

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^4 - 2x^3 + x^2$**
Resto: −15

363. RESOLUCIÓN

	1	0	0	0	0	$-a^5$
a		a	a^2	a^3	a^4	a^5
	1	a	a^2	a^3	a^4	0

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$**
Resto: 0

364. RESOLUCIÓN

	1	0	0	0	0	a^5
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$
	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	0

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$**
Resto: 0

365. RESOLUCIÓN

	1	0	0	0	−81
−3		−3	9	−27	81
	1	−3	9	−27	0

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$**
Resto: 0

366. RESOLUCIÓN

	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	2

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$**
Resto: 2

367. RESOLUCIÓN

	2	17	0	−68	−32
−1/2		−1	−8	4	32
	2	16	−8	−64	0

SOLUCIÓN: **Cociente: $2x^3 + 16x^2 - 8x - 64$**
Resto: 0

368. RESOLUCIÓN

	1	−2	0	$-\frac{4}{3}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{27}$
	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{41}{27}$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$**
Resto: $-\frac{41}{27}$

369. RESOLUCIÓN

	1	0	5	2
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{21}{8}$
	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{21}{4}$	$-\frac{5}{8}$

SOLUCIÓN: **Cociente: $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{21}{4}$**
Resto: $-\frac{5}{8}$

370. RESOLUCIÓN

	3	−4	−5	a	6
2		6	4	−2	$2a - 4$
	3	2	−1	$a - 2$	$6 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = -1$

SOLUCIÓN: **$a = -1$**

371. RESOLUCIÓN

	1	3	−2	0	−7	a
−3		−3	0	6	−18	75
	1	0	−2	6	−25	$a + 75 = 0 \Rightarrow a = -75$

SOLUCIÓN: **$a = -75$**

372. RESOLUCIÓN

	1	12	$9a$	16
2		2	28	$18a + 56$
	1	14	$9a + 28$	$16 + 18a + 56 = 0 \Rightarrow a = -4$

SOLUCIÓN: **$a = -4$**

373. RESOLUCIÓN

	1	−4	7	m	n
2		2	−4	6	$2m + 12$
	1	−2	3	$m + 6$	$n + 2m + 12 = 0$

	1	−4	7	m	n
3		3	−3	12	$3m + 36$
	1	−1	4	$m + 12$	$n + 3m + 36 = 0$

Resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{l} n+2m+12=0 \\ n+3m+36=0 \end{array}\right\}$ *se obtiene:* $m=-24$ y $n=36$

SOLUCIÓN: **m = −24 ; n = 36**

374. RESOLUCIÓN

Para que sea divisible por x^2-4 *ha de serlo por* $x+2$ y $x-2$.

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 1 & 0 & 0 & 0 & -a & b \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & 2a-32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & -a+16 & \underline{|2a-32}+b=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 1 & 0 & 0 & 0 & -a & b \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & -2a+32 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & -a+16 & \underline{|-2a+32+b}=0 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{r} 2a-32+b=0 \\ -2a+32+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=16$ y $b=0$

SOLUCIÓN: **a = 16 ; b = 0**

375. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrrl} & 2 & -1 & 5 & -a \\ -1/2 & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -2 & 6 & \underline{|-a-3}=0 \Rightarrow a=-3 \end{array}$$

SOLUCIÓN: **a = −3**

376. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & a & -3 & -a & -3 \\ -3 & & -3 & -3a+9 & 9a-18 & -24a+54 \\ \hline & 1 & a-3 & -3a+6 & 8a-18 & \underline{|-3-24a+54}= \end{array}$$

$=a+1 \Rightarrow a=2$

SOLUCIÓN: **a = 2**

377. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrl} & 1 & a & 2 \\ 2 & & 2 & 2a+4 \\ \hline & 1 & a+2 & \underline{|2a+6} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrl} & 1 & a & 2 \\ -2 & & -2 & -2a+4 \\ \hline & 1 & a-2 & \underline{|-2a+6} \end{array}$$

Para que los restos sean iguales:

$2a+6=-2a+6 \Rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0$

SOLUCIÓN: **a = 0**

378. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{ll} ax^4+bx^3 \qquad\qquad +1 & |\,x^2-2x+1 \\ -ax^4+2ax^3-ax^2 & ax^2+(2a+b)x+(3a+2b) \\ \hline (2a+b)x^3-ax^2 \qquad\qquad +1 & \\ -(2a+b)x^3+(4a+2b)x^2-(2a+b)x & \\ \hline (3a+2b)x^2-(2a+b)x+1 & \\ -(3a+2b)x^2+(6a+4b)x-(3a+2b) & \\ \hline (4a+3b)x-(3a+2b)+1 & \end{array}$$

Para que dicha división sea exacta se tiene que cumplir que:

$\left.\begin{array}{r} 4a+3b=0 \\ -(3a+2b)+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3\ ;\ b=-4$

SOLUCIÓN: **a = 3 ; b = −4**

379. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 2 & 4a & -5a^2 & -3a^3 & ba^4 \\ a & & 2a & 6a^2 & a^3 & -2a^4 \\ \hline & 2 & 6a & a^2 & -2a^3 & \underline{|ba^4-2a^4=0} \end{array}$$

Resulta:

$ba^4-2a^4=0 \Rightarrow b=2$

SOLUCIÓN: **b = 2**

380. RESOLUCIÓN

Su valor será el resto que resulta al dividir el polinomio por $x-3$.

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 60 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 20 & \underline{|55} \end{array}$$

SOLUCIÓN: **55**

381. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & -2 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{4} & \underline{|-\frac{33}{8}} \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{-\frac{33}{8}}$

382. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 1 & -3 & -3 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & & -2 & 10 & -14 & 28 & -60 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & -14 & 30 & \underline{|-55} \end{array}$$

SOLUCIÓN: **−55**

383. RESOLUCIÓN

Como $x=1, 2, -2, -4$ *son raíces del polinomio, resulta:*

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+4)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{P(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+4)}$

384. RESOLUCIÓN

Como $x = 1, -2, \frac{5}{2}$ *son las raíces del polinomio, se tiene:*

$P(x) = 2(x-1)(x+2)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P(x) = (x-1)(x+2)(2x-5)}}$

385. RESOLUCIÓN

Como $x = 1, -1, \frac{1}{2}$ *son las raíces del polinomio, se tiene:*

$P(x) = 2(x-1)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P(x) = (x-1)(x+1)(2x-1)}}$

386. RESOLUCIÓN

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores de 6 que son:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6,$

las raíces enteras son: 2 y 3

	1	−5	6
2		2	−6
	1	−3	0

	1	−5	6
3		3	−6
	1	−2	0

SOLUCIÓN: **2 y 3**

387. RESOLUCIÓN

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores de 4 que son:

$\pm 1, \pm 2, \pm 4$

las raíces enteras son: 1, −2 y 2

	1	−1	−4	4
1		1	0	−4
	1	0	−4	0

	1	−1	−4	4
2		2	2	−4
	1	1	−2	0

	1	−1	−4	4
−2		−2	6	−4
	1	−3	2	0

SOLUCIÓN: **1, −2 y 2**

388. RESOLUCIÓN

El polinomio pedido será divisible también por $x - 1$ *y por* $x - 3$.

$P(x) = (x^2 - 4)(x-1)(x-3) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12}}$

389. RESOLUCIÓN

$P(x) = (x+2)\,x\,(x-3)(x-4) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 24x$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 24x}}$

390. RESOLUCIÓN

	a	0	−10	4
2		2a	4a	8a − 20
	a	2a	4a − 10	8a − 20 + 4 = 0

$8a = 16 \Rightarrow a = 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a = 2}}$

Bloque 3

- ✔ Ecuaciones de primer grado
- ✔ Ecuaciones de segundo grado
- ✔ Inecuaciones de primer y segundo grado
- ✔ Sistemas de ecuaciones lineales
- ✔ Resoluciones de problemas mediante ecuaciones e inecuaciones
- ✔ Representación gráfica de funciones de primer y segundo grado

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Identidad y ecuaciones. Definiciones

Identidad *es una igualdad literal que se verifica para cualquier valor que se atribuya a las letras que figuran en dicha igualdad.*

Ejemplo:

I. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Para $x = 0$ *e* $y = 1 \Rightarrow (0 + 1)^2 = 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$

Para $x = 1$ *e* $y = 2 \Rightarrow (1 + 2)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 \Leftrightarrow 9 = 9$

Esta igualdad literal es una identidad que se cumple para cualquier valor que demos a las letras.

Ecuación *es una igualdad literal que únicamente se verifica al atribuir ciertos valores a las letras que figuran en dicha igualdad.*

Ejemplo:

I. $x^2 + 4 = 13$

Para $x = 3 \Rightarrow 9 + 4 = 13 \Leftrightarrow 13 = 13$

Para $x = -3 \Rightarrow (-3)^2 + 4 = 13 \Rightarrow 13 = 13$

Para $x = 2 \Rightarrow 4 + 4 \neq 13 \Leftrightarrow 8 \neq 13$

Para $x = 1 \Rightarrow 1 + 4 \neq 13 \Leftrightarrow 5 \neq 13$

. . . .

Esta igualdad literal es una ecuación, pues solamente se verifica para ciertos valores que damos a la x. *Y son* 3 y − 3.

Se llaman incógnitas *de una ecuación a las letras que figuran en dicha ecuación.*

Se llaman raíces *o* soluciones *de una ecuación a los valores numéricos que es preciso atribuir a las incógnitas para que se verifique la ecuación.*

Ejemplo:

I. $3x - 1 = x + 3$

La incógnita es x, *y su valor numérico es* 2, *porque:*

$$3 \cdot 2 - 1 = 2 + 3 \Leftrightarrow 5 = 5$$

En una ecuación se llama primer miembro *a la expresión numérica o literal que figura antes del signo igual y* segundo miembro *a la que figura después de dicho signo.*

Ejemplo:

Primer miembro → $\underbrace{3x - 1}$ = $\underbrace{x + 3}$ ← Segundo miembro

Dos o más ecuaciones son equivalentes *cuando tienen las mismas soluciones.*

Ejemplo: *Las ecuaciones:* $2x - 3 = 7$ *y* $x + 5 = 10$

son equivalentes, ya que ambas admiten la misma solución:

$$x = 5$$

Resolver *una ecuación es hallar todas sus raíces, para lo cual se va reemplazando la ecuación dada por otra equivalente, pero más sencilla, hasta llegar a una ecuación cuyas raíces resulten evidentes.*

Teoremas de equivalencia

I. *Si se suma o resta a los dos miembros de una ecuación un mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente.*

Aplicaciones:

1.ª *Si en una ecuación se pasa un término de un miembro a otro cambiándole de signo, la ecuación que resulta es equivalente a la dada.*

2.ª *Si en una ecuación figuran en los dos miembros dos términos iguales, y con el mismo signo, se pueden suprimir sin que varíen las soluciones de la ecuación.*

Ejemplos:

1. *Sea la ecuación:* $4x = 5 + 3x$

Sumando $-3x$ *a ambos miembros, resulta:*

$$4x - 3x = 5 + 3x - 3x \quad \textit{o sea,} \quad x = 5$$

ecuación equivalente a la dada, pues:

$$4 \cdot 5 = 5 + 3 \cdot 5 \Leftrightarrow 20 = 20$$

2. *Sea la ecuación:* $4x + 5 = 5 - 2x + 12$

Suprimiendo 5 *en ambos miembros, resulta:*

$$4x = -2x + 12$$

Sumando 2x *en ambos miembros, resulta:*

$$6x = 12 \quad \textit{o sea,} \quad x = 2$$

ecuación equivalente a la dada, pues:

$$4 \cdot 2 + 5 = 5 - 2 \cdot 2 + 12 \Leftrightarrow 13 = 13$$

II. *Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero o por una expresión distinta de cero, y que no contenga a la incógnita, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.*

Aplicaciones:

1.ª *En una ecuación se puede cambiar de signo a todos sus términos, pues equivale a multiplicar por* −1 *sus dos miembros.*

2.ª *Una ecuación con coeficientes racionales, se puede transformar en otra ecuación con coeficientes enteros, reduciendo, primero, al mínimo común denominador y luego multiplicando los dos miembros de dicha ecuación por el denominador común.*

Ejemplos:

1. *Sea la ecuación:* $-3x - 5x = -18 + 2$

Multiplicando por −1 *los dos miembros, resulta:*

$$3x + 5x = 18 - 2 \quad \textit{o sea,} \quad x = 2$$

ecuación equivalente a la dada, pues:

$$-3 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = -18 + 2 \Leftrightarrow -16 = -16$$

2. *Sea la ecuación:*

$$\frac{2x - 1}{4} - \frac{x}{2} = 3 + \frac{x + 1}{5}$$

Se suprimen los denominadores, hallando el m.c.m. (den) = m.c.m. (4,2,5) = 20

$$\frac{5\,(2x - 1)}{20} - \frac{10x}{20} = \frac{60}{20} + \frac{4\,(x + 1)}{20}$$

Multiplicando los dos miembros por 20, *resulta:*

$$5\,(2x - 1) - 10x = 60 + 4\,(x + 1)$$

ecuación equivalente a la dada y que carece de denominadores.

Grado de una ecuación entera

Una ecuación se dice que está preparada cuando su primer miembro es un polinomio reducido y el segundo miembro es cero. El grado *de una ecuación entera viene dado por el grado del polinomio que constituye el primer miembro de la ecuación preparada.*

Ejemplos:

I. *La ecuación:* $2x - 5 = 0$ *es de primer grado con una incógnita.*

II. *La ecuación:* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *es de segundo grado con una incógnita.*

III. *La ecuación:* $3x - 2y + 4 = 0$ *es de primer grado con dos incógnitas.*

IV. *La ecuación:* $x^2 + y - 3 = 0$ *es de segundo grado con dos incógnitas.*

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita es necesario realizar las transformaciones que a continuación se indican:

I. *Se suprimen los paréntesis.*
II. *Se suprimen los denominadores.*
III. *Se hace la transposición de términos.*
IV. *Se reducen los términos semejantes.*
V. *Se despeja la incógnita.*

Discusión de las ecuaciónes de primer grado con una incógnita

Toda ecuación de primer grado con una incógnita, después de efectuadas las transformaciones precisas, es de la forma:

$$ax = b$$

I. *Si* $a \neq 0$, *la ecuación tiene una sola raíz que es:*

$$x = \frac{b}{a}$$

II. *Si* $a = 0$ *y* $b \neq 0$, *la ecuación toma la forma* $0 \cdot x = b$. *No tiene solución (ecuación imposible).*

III. *Si* $a = 0$ *y* $b = 0$, *la ecuación toma la forma* $0 \cdot x = 0$. *Hay infinitas soluciones (ecuación indeterminada).*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el valor numérico de x, en las siguientes ecuaciones:

I. $3x = 6$ **II.** $5x = 125$ **III.** $2x = 3$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 2}$

SOLUCION II: $\mathbf{x = 25}$

SOLUCION III: $x = \frac{3}{2}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $x - 2 = 1$ **II.** $3x + 1 = 7$ **III.** $3x - 1 = 20$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 3}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 2}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x = 7}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $x + 9 = 1 + 2x$ **II.** $5x = 4x + 3$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 8}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 3}$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $60 - 5x = x - 12$ **II.** $7 - 3x = 14 + x$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 12}$

SOLUCIÓN II: $x = -\frac{7}{4}$

5. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $3(x - 2) = x + 10$ **II.** $3x + 7 = 2(x + 6)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 8}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 5}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $5(x - 8) = 3(x - 6)$ **II.** $9(13 - x) - 4x = 9x + 5(21 - 2x)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 11}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 1}$

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $\frac{2x}{3} = 6$

II. $\frac{3x}{2} = x + 4$

III. $\frac{3x}{2} + 20 = 25 + x$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 9}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 8}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x = 10}$

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $x - 10 = \frac{5}{9}(x - 6)$ SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 15}$

II. $8\left(\frac{x + 5}{3}\right) = 2x + 12$ SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = -2}$

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $\frac{1 - 3x}{2} = 2 - 2x$ SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 3}$

II. $\frac{3 + 5x}{1 - 3x} = 10$ SOLUCIÓN II: $x = \frac{1}{5}$

10. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $\frac{3(x + 1)}{2(1 + 2x)} = \frac{9}{10}$ SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 2}$

II. $\frac{x - 3}{2(x - 2)} = \frac{1}{3}$ SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 5}$

11. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $6(2x + 1) = 5(1 - 4x) - 3(4 - 2x)$

II. $2(3x - 4) + 3(9 - 2x) = 2(x + 1) - 3(5 - 2x)$

SOLUCIÓN I: $x = -\frac{1}{2}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 4}$

12. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 14$ SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 20}$

II. $\frac{3x}{4} - 12 = 1 - \frac{x}{3}$ SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 12}$

13. Resolver la ecuación:

$$\frac{5x - 2}{8} + \frac{1 - 2x}{4} = \frac{3x + 2}{8} - \frac{4 - 3x}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 1}$

14. Resolver la ecuación:

$$\frac{3 - 4x}{5} - \frac{3x - 5}{10} - \frac{2 - 3x}{2} = \frac{9}{10}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 2}$

15. Resolver la ecuación:

$$\frac{3(2x + 1)}{4} - \frac{3 + 5x}{6} + 4x + \frac{1 + x}{3} = \frac{151}{12} + x$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 3}$

16. Resolver la ecuación:

$$\frac{3x - 1}{2} - \frac{x + 3}{5} = \frac{23x - 21}{10} - (x - 1)$$

SOLUCIÓN: **x tiene infinitas soluciones**

17. Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{5}{x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 2}$

18. Resolver la ecuación:

$$\frac{15}{x - 2} - \frac{18}{x + 2} = \frac{12x + 6}{2x^2 - 8}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 7}$

19. Resolver la ecuación:

$$\frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{2x + 1} = \frac{7}{4x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 1}$

20. Resolver la ecuación:

$$\frac{30}{x - 1} - \frac{200}{x^2 + 3x - 4} = \frac{20}{x + 4}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 6}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ecuación completa de segundo grado

Una ecuación completa de segundo grado con una incógnita es del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

siendo los coeficientes a, b, c *distintos de cero y* x *la incógnita.*

Ecuaciones incompletas

Una ecuación de segundo grado se dice que es incompleta cuando uno de los coeficientes b *o* c *es nulo:*

I. *Si* c = 0 *la ecuación (1) queda de la forma:*

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

siendo las soluciones:

$$x = 0 \; ; \; x = -\frac{b}{a}$$

II. *Si* b = 0 *la ecuación (1) queda de la forma:*

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Discusión:

Si $\begin{cases} c > 0 \text{ y } a > 0 \text{ no existen soluciones} \\ c < 0 \text{ y } a < 0 \text{ no existen soluciones} \end{cases}$

Si $\begin{cases} c > 0 \text{ y } a < 0 \text{ tiene dos soluciones} \\ c < 0 \text{ y } a > 0 \text{ tiene dos soluciones} \end{cases}$

Resolución de la ecuación de segundo grado

La ecuación completa de segundo grado con una incógnita:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se resuelve, después de efectuar una serie de transformaciones, de la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_1 \\ \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_2 \end{cases}$$

siendo x_1 *y* x_2 *las raíces de la ecuación.*

Discusión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

se le llama discriminante de la ecuación

I. *Si* $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. *La ecuación tiene dos raíces reales y desiguales.*

II. *Si* $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. *La ecuación tiene dos raices reales e iguales.*

III. *Si* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. *La ecuación no tiene raíces reales.*

Propiedades de las raíces

I. Suma de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

II. Producto de las raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Determinación de una ecuación de segundo grado conocidos la suma y el producto de sus raíces

Si $S = x_1 + x_2$ *y* $p = x_1 \cdot x_2$

la ecuación de segundo grado puede escribirse de la forma:

$$x^2 - Sx + p = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

21. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $5x^2 = 45$ **II.** $x^2 - 36 = 64$ **III.** $x^2 - 4x = 0$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm 3}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = \pm 10}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 4}$

22. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $\dfrac{x^2}{3} = x$ **II.** $5x^2 - 125 = 0$ **III.** $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 3}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = \pm 5}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x = \pm 4}$

23. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $4x^2 - 9 = 0$ **II.** $x^2 - 101 = 20$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm \dfrac{3}{2}}$ SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = \pm 11}$

24. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $(x - 5)(x + 1) + 5 = 0$ **II.** $(x + 6)(x - 6) = 2(x - 18)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 4}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 2}$

25. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $(3x + 2)(3x - 2) = 77$ **II.** $\left(2x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = 9x^2 + \dfrac{25}{4}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm 3}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 2}$

26. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $\dfrac{3x^2}{4} = \dfrac{4}{27}$ **II.** $\dfrac{3x}{8 + 4x} = \dfrac{x - 2}{x}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm \dfrac{4}{9}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = \pm 4}$

27. Resolver las siguientes ecuaciones:

I. $24x^2 - 7x = 3x\left(5x - \dfrac{x}{2}\right)$

II. $43x + \dfrac{3x^2}{7} + 10x = 8x^2$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \dfrac{2}{3}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 7}$

28. Resolver la ecuación:

$$x\left(x+\frac{2x}{3}\right)+5x\left(x-\frac{x}{4}\right)=65x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=0\ ;\ x_2=12}}$

29. Resolver la ecuación:

$$x^2-5x+6=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=3\ ;\ x_2=2}}$

30. Resolver la ecuación:

$$3x^2-9x-30=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=-2\ ;\ x_2=5}}$

31. Resolver la ecuación:

$$3x^2+5x-2=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=\frac{1}{3}\ ;\ x_2=-2}}$

32. Resolver la ecuación:

$$x^2+8x+15=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=-3\ ;\ x_2=-5}}$

33. Resolver la ecuación:

$$x^2+4x-21=8x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=7\ ;\ x_2=-3}}$

34. Resolver la ecuación:

$$x^2+24x=5(3+2x)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=1\ ;\ x_2=-15}}$

35. Resolver la ecuación:

$$(x+2)^2=24-4x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=2\ ;\ x_2=-10}}$

36. Resolver la ecuación:

$$(7+x)(x-3)=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=-7\ ;\ x_2=3}}$

37. Resolver la ecuación:

$$3x^2-\frac{11}{2}x-1=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=2\ ;\ x_2=-\frac{1}{6}}}$

38. Resolver la ecuación:

$$x-5=-\frac{1}{x-3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=4\ ;\ x_2=4}}$

39. Resolver la ecuación:

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{5(x-1)}{x+1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=4\ ;\ x_2=\frac{1}{3}}}$

40. Resolver la ecuación:

$$\frac{x}{3}(x-31)=2\left(10-\frac{x^2}{3}\right)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=12\ ;\ x_2=-\frac{5}{3}}}$

41. Resolver la ecuación:

$$(x-9)^2-49=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=16\ ;\ x_2=2}}$

42. Resolver la ecuación:

$$(x+5)^2=(2x-3)^2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=-\frac{2}{3}\ ;\ x_2=8}}$

43. Resolver la ecuación:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}=\frac{1}{5}+\frac{3x}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=\frac{6}{5}\ ;\ x_2=-\frac{1}{3}}}$

44. Resolver la ecuación:

$$\frac{x+3}{2}+\frac{2}{x+3}=\frac{10}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=3\ ;\ x_2=-\frac{7}{3}}}$

45. Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{5-x}+\frac{2}{5+x}=\frac{3}{4}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=3\ ;\ x_2=-\frac{5}{3}}}$

46. Resolver la ecuación:

$$4(x-1)=\frac{15}{4}+\frac{x-1}{2x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x_1=2\ ;\ x_2=\frac{1}{16}}}$

47. Hallar la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones:

I. $x^2-5x+6=0$ **II.** $x^2+12x+32=0$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x_1+x_2=5\ ;\ x_1\cdot x_2=6}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x_1+x_2=-12\ ;\ x_1\cdot x_2=32}}$

48. Hallar la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones:

I. $5x^2-15x+18=0$ **II.** $3x^2+16x-12=0$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x_1+x_2=3\ ;\ x_1\cdot x_2=\frac{18}{5}}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x_1+x_2=-\frac{16}{3}\ ;\ x_1\cdot x_2=-4}}$

49. Hallar la ecuación de segundo grado que tenga por raíces: $x_1 = 5$ y $x_2 = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 - 8x + 15 = 0}$

50. Formar la ecuación de segundo grado que tenga por raíces: $x_1 = 7$ y $x_2 = -2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 - 5x - 14 = 0}$

51. Escribir la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

$x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{5}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{6x^2 - 19x + 15 = 0}$

52. Hallar dos números cuya suma sea -13 y el producto 36.

SOLUCIÓN: **Los números son: $x_1 = -4$; $x_2 = -9$**

53. Hallar dos números cuya suma sea 15 y el producto 56.

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 7 y 8**

54. Dada la ecuación: $x^2 - Sx - 35 = 0$, hallar el valor S, sabiendo que una raíz es $x_1 = 7$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 2}$

55. Dada la ecuación: $x^2 - 8x + p = 0$, halla el valor de p, sabiendo que una raíz es $x_2 = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p = 15}$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO Y SEGUNDO GRADO

Inecuaciones. Definiciones

Una inecuación *es una desigualdad en la que aparece alguna variable (incógnita) en uno de sus miembros o en los dos.*

Ejemplos:

I. $3 + x \leqslant 12$. *Es una inecuación de primer grado con una incógnita* x

II. $x^2 - 3x \geqslant -2$. *Es una inecuación de segundo grado con una incógnita* x

Resolver *una inecuación es hallar el conjunto de valores reales de las incógnitas que la satisfagan; a este conjunto se le llama* conjunto solución.

Ejemplo:

Resolver la inecuación $5x \leqslant 35$

$x \leqslant 7$ *satisface la inecuación*

El conjunto solución es: $S = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x \leqslant 7\}$

Dos inecuaciones se llaman equivalentes *cuando tienen el mismo conjunto solución.*

Ejemplo:

Las inecuaciones $x^3 > 27$ *y* $x > 3$ *son* equivalentes, *pues tienen el mismo conjunto solución.*

$$S = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x > 3\}$$

La forma más general para resolver una inecuación consiste en obtener otra inecuación equivalente a la dada, utilizando las propiedades de las desigualdades entre números reales.

1.º *Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta una misma expresión, resulta otra inecuación equivalente a la dada.*

2.º *Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número real positivo, resulta otra inecuación equivalente a la dada.*

3.º *Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número real negativo, resulta otra inecuación de signo contrario a la dada.*

Resolución de las inecuaciones de primer grado con una incógnita

Vamos a estudiar los distintos casos de inecuaciones de primer grado con una incógnita x.

I. *Sea la inecuación:* $ax + b < 0$ *siendo* a *y* b *números reales.*

Si $a > 0$ *tenemos:*

$$x + \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}, \text{ luego: } S_1 = \left\{x \in \mathbf{R} \ / \ x < -\frac{b}{a}\right\}$$

Si $a < 0$ *tenemos:*

$$x + \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}, \text{ luego: } S_2 = \left\{x \in \mathbf{R} \ / \ x > -\frac{b}{a}\right\}$$

Análogamente se procede cuando la inecuación es de la forma:

$$ax + b > 0$$

II. *Sea la inecuación:* $ax + b \leqslant 0$ *siendo* a *y* b *números reales.*

Si $a > 0$ *tenemos:*

$$x + \frac{b}{a} \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{b}{a}, \text{ luego: } S_1 = \left\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \leqslant -\frac{b}{a}\right\}$$

Si $a < 0$ *tenemos:*

$$x + \frac{b}{a} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{b}{a}, \text{ luego: } S_2 = \left\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \geqslant -\frac{b}{a}\right\}$$

Si $a = 0$ *tenemos:*

$$0 \cdot x + b \leqslant 0 \Rightarrow 0 \cdot x \leqslant -b \Rightarrow \begin{cases} b \leqslant 0. \text{ Infinitas soluciones} \\ b > 0. \text{ No hay solución} \end{cases}$$

Análogamente se procede cuando la inecuación es de la forma:

$$ax + b \geqslant 0$$

Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las inecuaciones de segundo grado con una incógnita son de la forma:

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$; $ax^2 + bx + c \geqslant 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c > 0$, *siendo* $a \neq 0$ *y* $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Resolución de las inecuaciones de segundo grado con una incógnita

PRIMER MÉTODO:

Para resolver la inecuación:

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

es necesario estudiar el signo del trinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Sabemos que el discriminante de la ecuación de segundo grado es $\Delta = b^2 - 4ac$

I. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, *existen dos raíces reales y distintas* x_1 *y* x_2, *luego:*

$$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

$$\textit{Si}\ a > 0\ \textit{y}\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x < x_1 \Rightarrow P(x) > 0. \textit{ No hay solución.} \\ x = x_1 \Rightarrow P(x) = 0. \textit{ Sí hay solución.} \\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow P(x) < 0. \textit{ Sí hay solución.} \\ x = x_2 \Rightarrow P(x) = 0. \textit{ Sí hay solución.} \\ x_2 < x \Rightarrow P(x) > 0. \textit{ No hay solución.} \end{cases}$$

$$\textit{Si}\ a < 0\ \textit{y}\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x < x_1 \Rightarrow P(x) < 0. \textit{ Sí hay solución.} \\ x = x_1 \Rightarrow P(x) = 0. \textit{ Sí hay solución.} \\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow P(x) > 0. \textit{ No hay solución.} \\ x = x_2 \Rightarrow P(x) = 0. \textit{ Sí hay solución.} \\ x_2 < x \Rightarrow P(x) < 0. \textit{ Sí hay solución.} \end{cases}$$

II. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, *existen dos raíces reales e iguales (una raíz doble)* $x_1 = x_2$, *luego:*

$$P(x) = a(x - x_1)^2$$

como $(x - x_1)^2 = + > 0\ \forall\ x \neq x_1$, *resulta:*

$$\textit{Si}\ a > 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x) > 0. \textit{ No hay solución.} \\ P(x) = 0. \textit{ Si } x = x_1, \textit{ sólo hay esta solución.} \end{cases}$$

Si $a < 0 \Rightarrow P(x) < 0$. *Sí hay solución.*

III. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, *existen dos raíces complejas conjugadas:* $x_1 = \alpha + \beta i$ *y* $x_2 = \alpha - \beta i$, *luego:*

$P(x) = a(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = a\,[(x - a) - \beta i\,] \cdot$

$\cdot\,[(x - a) + \beta i\,] = a\,[(x - a)^2 - \beta^2 i^2\,] = a\,[(x - a)^2 + \beta^2]$

como $[(x - a)^2 + \beta^2] > 0$, *resulta:*

Si $a > 0 \Rightarrow P(x) > 0$. *No hay solución.*

Si $a < 0 \Rightarrow P(x) < 0$. *Sí hay solución.*

SEGUNDO MÉTODO:

Una forma más cómoda para resolver la inecuación:

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

consiste en resolver la ecuación:

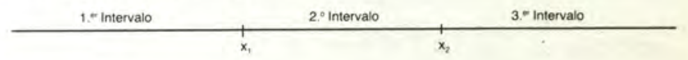
$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas raíces reales son x_1 *y* x_2, *siendo* $x_1 < x_2$

Luego:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Para conocer el signo del trinomio de segundo grado se divide la recta real en tres intervalos:



En el 1.er intervalo:

$$\textit{Si} \begin{cases} x < x_1 \Rightarrow (x - x_1) < 0 \\ \quad y \\ x < x_2 \Rightarrow (x - x_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow P(x) > 0. \textit{ No hay solución.} \\ a < 0 \Rightarrow P(x) < 0. \textit{ Sí hay solución.} \end{cases}$$

En el 2.º intervalo:

$$\text{Si}\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \quad y \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow P(x) < 0. \textit{ Sí hay solución} \\ a < 0 \Rightarrow P(x) > 0. \textit{ No hay solución} \end{cases}$$

En el 3.er intervalo:

$$\textit{Si} \begin{cases} x > x_1 \Rightarrow x - x_1 > 0 \\ \quad y \\ x > x_2 \Rightarrow x - x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow P(x) > 0. \textit{ No hay solución.} \\ a < 0 \Rightarrow P(x) < 0. \textit{ Sí hay solución.} \end{cases}$$

Como x_1 *y* x_2 *son las raíces reales de la ecuación:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

resulta:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 0. \textit{ Sí hay solución.}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

56. Resolver las siguientes inecuaciones y representar gráficamente el conjunto solución:

I. $x \geq 2$ **II.** $x < 5$ **III.** $x \leq 0$ **IV.** $x > 0$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x \geq 2 \ ; \ S = \{x \in R \ / \ x \geq 2\}}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x < 5 \ ; \ S = \{x \in R \ / \ x < 5\}}}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{x \leq 0 \ ; \ S = \{x \in R \ / \ x \leq 0\}}}$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{x > 0 \ ; \ S = \{x \in R \ / \ x > 0\}}}$

57. Resolver las siguientes inecuaciones y representar gráficamente el conjunto solución:

I. $x + 2 < 6 - 3x$ **II.** $11 - 3x < 19 - (5x + 4)$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \ / \ x < 1\}}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \ / \ x < 2\}}}$

58. Resolver las siguientes inecuaciones y representar gráficamente el conjunto solución:

I. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} > 5 - \dfrac{x}{2}$ **II.** $\dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{x-2}{4}$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \ / \ x > 5\}}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}}}$

59. Resolver las siguientes inecuaciones:

I. $\dfrac{x-1}{2} < 3(x-2)$ **II.** $5x - \dfrac{x+1}{6} < 7x - \dfrac{1-x}{2}$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{S = \left\{x \in R \ / \ \dfrac{11}{5} < x\right\}}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{S = \left\{x \in R \ / \ x > \dfrac{1}{8}\right\}}}$

60. Resolver la inecuación:

$$|2x - 5| \leq 3$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \ / \ 1 \leq x \leq 4\}}}$

61. Resolver la inecuación:

$$|x + 4| < 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \ / \ -6 < x < -2}}$

62. Resolver la inecuación:

$$\frac{x-5}{x} > 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]5, +\infty[}}$

63. Resolver la inecuación:

$$\frac{3x-9}{2x+8} > 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, -4[\, \cup \,]3, +\infty[}}$

64. Resolver la inecuación:

$$\frac{x+3}{x-2} < 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, 2[\, \cup \,]7, +\infty[}}$

65. Resolver la inecuación:

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[}}$

66. Resolver la inecuación:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, 1[\, \cup \,]3, +\infty[}}$

67. Resolver la inecuación:

$$(x-2)(x+3) \geq 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[}}$

68. Resolver la inecuación:

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \,]-\infty, -3[\, \cup [2, +\infty[}}$

69. Resolver la inecuación:

$$x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

SOLUCIÓN: **S = No tiene solución**

70. Resolver la inecuación:

$$x^2 - 6x \leq 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = [0,6]}}$

71. Resolver la inecuación:

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = S_1 \cup S_2 = \,]-\infty, -2[\, \cup \,]5, +\infty[}}$

72. Resolver la inecuación:

$$x^2 - 6x + 9 < 0$$

SOLUCIÓN: **S = No tiene solución**

73. Resolver la inecuación:

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = S_1 \cup S_2 = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]4, +\infty[}}$

74. Resolver la inecuación:

$$3x^2 + 5x - 8 < 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \left]-\dfrac{8}{3}, 1\right[}}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuación de primer grado con dos incógnitas

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas, x *e* y, *de la forma:*

$$ax + by = c$$

tiene infinitas soluciones.

Para cada valor que se de a x, *se obtiene un valor de* y, *que será una solución de la ecuación:*

Ejemplo:

$$x + y = 1$$

Para $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Para $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Se llama sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x *e* y, *en el cuerpo* **R** *de los números reales, al sistema formado por el conjunto de dos ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Equivalencia de sistemas

Se dice que dos sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo:

I. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 12 \\ 5x - 4y = 17 \end{array}\right\}$ **II.** $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 12 \\ 10x - 8y = 34 \end{array}\right\}$

SOLUCIÓN I: **x = 5 ; y = 2**

SOLUCIÓN II: **x = 5 ; y = 2**

Los sistemas I *y* II *son equivalentes.*

Métodos para la resolución de sistemas

Los métodos empleados para la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son los siguientes:

I. Método de sustitución

1.° *Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.*
2.° *Sustituimos el valor obtenido en la otra ecuación.*
3.° *Resolvemos la ecuación de primer grado que resulta.*
4.° *Sustituimos la solución obtenida en la expresión de la otra incógnita.*

II. Método de igualación

1.° *Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.*
2.° *Se igualan las expresiones obtenidas.*
3.° *Se resuelve la ecuación lineal que resulta.*
4.° *Se sustituye la solución obtenida en cualquiera de las expresiones de la otra incógnita.*

III. Método de reducción

1.° *Encontrar ecuaciones equivalentes a las dadas, tales que los coeficientes de una de las incógnitas sean los mismos.*
2.° *Se restan las ecuaciones obtenidas.*
3.° *Se resuelve la ecuación con la incógnita que resulta.*
4.° *Se sustituye la solución hallada en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para hallar el valor de la otra incógnita.*

Nota: El método más fácil y rápido es el de reducción.

Discusión de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Sea el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. *El sistema es compatible y determinado.*

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$. *El sistema es incompatible.*

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. *El sistema es compatible e indeterminado*

Resolución de sistemas de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

Para resolver un sistema de n *ecuaciones lineales con* n *incógnitas se convierte el sistema propuesto a otro equivalente de* $n - 1$ *ecuaciones con* $n - 1$ *incógnitas, eliminando una misma incógnita en una de las ecuaciones dadas y en cada una de las restantes. Se procede del mismo modo hasta obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se resuelve éste, y los valores obtenidos se sustituyen en una de las ecuaciones con tres incógnitas, de esta forma se obtiene el valor de una tercera incógnita y así sucesivamente.*

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 7 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{array}\right\}\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Resolución:

Despejamos x *en (1) y lo sustituimos en (2) y (3):*

$$x = 1 - y + z$$

$$\left.\begin{array}{r} 2(1 - y + z) - y + 2z = 7 \\ 3(1 - y + z) - 2y + z = 6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -3y + 4z = 5 \\ -5y + 4z = 3 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, resulta: $y = 1;\ z = 2$

Sustituyendo estos valores de $y = 1;\ z = 2$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$x = 1 - 1 + 2 = 2$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ; y = 1 ; z = 2**

Sistemas formados por una ecuación de primer grado y otra de segundo grado

El sistema más general de ecuaciones con dos incógnitas formado por una ecuación de primer grado y otra de segundo es de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{array}\right\}$$

El camino seguido para resolver este sistema es el siguiente:

1.° *Se despeja una de las dos incógnitas de la ecuación de primer grado.*
2.° *Se sustituye el valor de la incógnita despejada de la ecuación de primer grado en la ecuación de segundo grado, resultando una ecuación de segundo grado con una incógnita.*
3.° *Se resuelve esta ecuación de segundo grado.*
4.° *Se sustituyen los dos valores obtenidos de la ecuación de segundo grado en la ecuación de primer grado y se hallan los valores correspondientes de la otra incógnita.*

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Resolución

Despejando y *de (2):* $y = 5 - x$
Sustituyendo este valor de $y = 5 - x$ *en (1), resulta:*

$$x^2 + (5 - x)^2 = 13$$

$$x^2 + 25 + x^2 - 10x = 13$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 = x_1 \\ \frac{4}{2} = 2 = x_2 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en (2):

$$y_1 = 5 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

$$y_2 = 5 - x_2 = 5 - 2 = 3$$

SOLUCIÓN:

1.ª $x_1 = 3$; $y_1 = 2$
2.ª $x_2 = 2$; $y_2 = 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

75. Resolver los siguientes sistemas por el método de sustitución:

I. $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{array}\right|$

SOLUCION I: **x = 2 ; y = 3**

SOLUCIÓN II: **x = 1 ; y = −2**

76. Resolver el sistema por el método de sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ x - y = 3 \\ (2)\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 9 ; y = 6**

77. Resolver los siguientes sistemas por el método de sustitución:

I. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{3} = 9 + \dfrac{x-y}{2} \\ \dfrac{x}{2} - 5 = -\dfrac{x+y}{9} \end{array}\right\}$ **II.** $\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{4} - \dfrac{x}{7} = \dfrac{29}{28} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{7} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

SOLUCIÓN I: **x = 6 ; y = 12**

SOLUCIÓN II: **x = 5 ; y = 7**

78. Resolver por el método de igualación los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} 3x + 7y = 29 \\ 8x - 9y = 22 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3y}{4} = 5 \end{array}\right|$

SOLUCIÓN I: **x = 5 ; y = 2**

SOLUCIÓN II: **x = 5 ; y = 4**

79. Resolver por el método de igualación los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ \dfrac{3x}{4} - y = 2 \end{array}\right\}$ **II.** $\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x+1} = 4 \\ \dfrac{y+1}{x} = 5 \end{array}\right\}$

SOLUCIÓN I: **x = 4 ; y = 1**

SOLUCIÓN II: **x = 5 ; y = 24**

80. Resolver por el método de reducción los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = -6 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 7 \\ 2x + 7y = 11 \end{array}\right|$

SOLUCIÓN I: **x = 1 ; y = 2**

SOLUCIÓN II: **x = 2 ; y = 1**

81. Resolver por el método de reducción los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 5 \\ 3y - 2x = 11 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x}{6} - \dfrac{3y}{7} = 2 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{7} = 2 \end{array}\right\}$

SOLUCIÓN I: **x = 2 ; y = 5**

SOLUCIÓN II: **x = 6 ; y = 7**

82. Resolver los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 31 \\ 5x - 8y = -5 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} 5(x-2) = y + 2 \\ x + 5 = 3(y - 5) \end{array}\right|$

III. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{10}{3} \end{array}\right\}$

SOLUCIÓN I: **x = 7 ; y = 5**

SOLUCIÓN II: **x = 4 ; y = 8**

SOLUCIÓN III: **x = 3 ; y = 2**

83. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} 3x - 7y = 12 \\ 6x - 14y = 24 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} 5x - 10y = 14 \\ 10x - 20y = 23 \end{array}\right|$ **III.** $\left.\begin{array}{l} 6x - 11y = 4 \\ 12x + 22y = 8 \end{array}\right|$

SOLUCIÓN I: **Sistema compatible e indeterminado**

SOLUCIÓN II: **Sistema incompatible**

SOLUCIÓN III: **Sistema compatible y determinado**

84. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas:

I. $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 5x + 4y = 12 \end{array}\right|$ **II.** $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 9 \end{array}\right|$ **III.** $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14 \end{array}\right|$.

SOLUCIÓN I: **Sistema compatible y determinado**

SOLUCIÓN II: **Sistema incompatible**

SOLUCIÓN III: **Sistema compatible e indeterminado**

85. Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = -3 \\ x - 4y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 3 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = -\dfrac{1}{2}\ ;\ y = -\dfrac{3}{4}\ ;\ z = \dfrac{13}{4}}$

86. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ x - y - z = -\dfrac{1}{2} \\ x - 2y + 4z = -5 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 1\ ;\ y = 2\ ;\ z = -\dfrac{1}{2}}$

87. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 1 ; y = 1 ; z = 1**

88. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 6 \\ y + z = 8 \\ x + y = 12 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 5 ; y = 7 ; z = 1**

89. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$$

SOLUCIÓN:
1.ª $x_1 = 1$; $y_1 = 0$
2.ª $x_2 = 5$; $y_2 = 4$

90. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN:

1.ª	$\mathbf{x_1 = 4\ ;\ y_1 = 3}$
2.ª	$\mathbf{x_2 = -3;\ y_2 = -4}$

91. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right.$$

SOLUCIÓN:

1.ª	$\mathbf{x_1 = 2\ ;\ y_1 = 2}$
2.ª	$\mathbf{x_2 = -2\ ;\ y_2 = -2}$

92. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot y &= 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN:

1.ª	$\mathbf{x_1 = 3\ ;\ y_1 = 2}$
2.ª	$\mathbf{x_2 = 2\ ;\ y_2 = 3}$

93. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} y^2 + xy &= 5 \\ x^2 + xy &= 20 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN:

1.ª	$\mathbf{x_1 = 4\ ;\ y_1 = 1}$
2.ª	$\mathbf{x_2 = -4\ ;\ y_2 = -1}$

94. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 10 + \sqrt{xy} \\ xy &= 36 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN:

1.ª	$\mathbf{x_1 = 18\ ;\ y_1 = 2}$
2.ª	$\mathbf{x_2 = -2\ ;\ y_2 = -18}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES E INECUACIONES

Problemas de primer grado con una incógnita

Se llama problema algebraico a toda cuestión que consiste en calcular un número o un conjunto de números llamados incógnitas *que, junto con otros números conocidos llamados* datos, *guarden alguna o algunas relaciones con las incógnitas.*
Las relaciones que ligan a los datos y a las incógnitas aparecen fijadas en el enunciado del problema y se expresan mediante una o más ecuaciones de primer grado.

Método para la resolución de un problema de primer grado

La resolución de un problema algebraico de primer grado consta de las siguientes partes:

1.ª Planteamiento:
Consiste en la elección de la incógnita o incógnitas que, junto con los datos, se puedan expresar mediante una o más ecuaciones de primer grado, según las condiciones indicadas en el enunciado.

2.ª Resolución:
Consiste en transformar la ecuación o ecuaciones que resultan en otras equivalentes, pero más sencillas, según se indicó al estudiar las ecuaciones de primer grado.

3.ª Discusión:
La discusión o interpretación consiste en comprobar si la solución de la ecuación o ecuaciones satisface a todas las condiciones señaladas en el enunciado, debiendo rechazarse las que no lo cumplan.

Ejemplo:

95. Hallar un número que sumado con 5 unidades sea igual al triplo de dicho número disminuido en 3 unidades.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 4}$

95. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número pedido.

Número más 5 unidades: $x + 5$

Triplo del número menos 3 unidades: $3x - 3$

Luego habrá de ser:

$$x + 5 = 3x - 3$$

Que es la ecuación pedida.

RESOLUCIÓN:

$$x + 5 = 3x - 3 \Leftrightarrow 5 + 3 = 3x - x \Leftrightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo** $x = 4$ **en la ecuación** $x + 5 = 3x - 3$ **se verifica:

$$4 + 5 = 3 \cdot 4 - 3 \Leftrightarrow 9 = 9$$

el triplo de 4 es $4 \cdot 3 = 12$*, y si a este número se le resta 3 unidades, queda* $12 - 3 = 9$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 4}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

95. Hallar un número que sumado con 5 unidades sea igual al triplo de dicho número disminuido en 3 unidades.

SOLUCIÓN: **x = 4**

96. Hallar un número que al sumarle su doble y su tercera parte resulte 40.

SOLUCION: **x = 12**

97. Un padre tiene 47 años y su hijo 13. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple que la de su hijo?

SOLUCIÓN: **x = 4**

98. En una reunión de 100 personas el número de mujeres es el triple que el de hombres. ¿Cuántos hombres y mujeres asisten a dicha reunión?

SOLUCIÓN: **El número de hombres = 25**
El número de mujeres = 75

99. Hallar tres números sabiendo que son consecutivos y que su suma es 180.

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 59, 60 y 61**

100. ¿Qué número positivo hay que añadir a los dos términos de la fracción $\frac{33}{40}$ para que ésta valga $\frac{2}{3}$?

SOLUCIÓN: **No tiene solución**

101. Un capital de 46 800 pts. está constituido por billetes de 1 000 pts. y de 200 pts. ¿Cuántos billetes hay de cada clase, si en total hay 90 billetes?

SOLUCIÓN: **Hay 36 billetes de 1 000 pts. y 54 billetes de 200 pts.**

102. Dos toneles tenían la misma cantidad de vino, al primero se le sacaron 200 litros y al segundo 900 litros, de forma que al primero le queda doble cantidad de vino que al segundo. Hallar la cantidad que le queda a cada uno.

SOLUCIÓN: **1.er tonel 1 400 l, 2.° tonel 700 l**

103. Tres personas han reunido 102 000 pts. Todos ellos tienen el mismo número de billetes. El primero de 1 000 pts.; el segundo de 500 pts. y el tercero de 200 pts. Averiguar qué cantidad de dinero tiene cada uno.

SOLUCIÓN: **La 1.ª persona tiene: 60 de 1 000 = 60 000 pts.**
La 2.ª persona tiene: 60 de 500 = 30 000 pts.
La 3.ª persona tiene: 60 de 200 = 12 000 pts.

104. ¿Qué día del año marcará una hoja del almanaque de un año bisiesto cuando el número de hojas arrancadas exceda en dos unidades a los $\frac{5}{9}$ del número de hojas que quedan?

SOLUCIÓN: **El calendario marcará el 11 de mayo**

105. De un libro he leído 240 páginas y aún me quedan por leer las $\frac{3}{7}$ partes del mismo. ¿Qué fracción me quedaría aún por leer en el supuesto que hubiera leído 350 páginas?

SOLUCIÓN: $\frac{70}{420} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$ **del libro**

106. Dos personas disponen del mismo capital; la primera lo ha colocado al 10 % y la segunda al 6 %. La renta de la primera excede en 40 000 pts. a la de la segunda. ¿Cuál es el capital?

SOLUCIÓN: **El capital de cada persona es de 1 000 000 pts.**

107. Tres socios forman una sociedad; el primero aporta los $\frac{2}{5}$ del capital social; el 2.° $\frac{1}{3}$ y el 3.° 2 000 000 pts. Hallar el capital social y lo que aporta cada socio.

SOLUCIÓN: **Capital social: 7 500 000 pts.**
Parte del 1.°: 3 000 000 pts.
Parte del 2.°: 2 500 000 pts.
Parte del 3.°: 2 000 000 pts.

108. Los dos factores de una multiplicación suman 91. Si se aumenta 5 unidades al multiplicando y se disminuye 2 unidades al multiplicador, el producto aumenta en 67. Hallar el valor de cada factor.

SOLUCIÓN: **El multiplicando: 54**
El multiplicador: 37

109. Un estudiante se compromete a presentar a su padre la resolución de 5 problemas por día. El padre por cada problema bien resuelto le da 75 pts., y el hijo abona a su padre 60 pts. por cada problema que no resuelva o que esté mal resuelto. Al cabo de 15 días, el hijo ganó 2 250 pts. ¿Cuántos problemas resolvió bien?

SOLUCIÓN: **El hijo resolvió bien 50 problemas**

110. En un corral hay gallinas y conejos. El número de sus cabezas es 114 y el de sus patas 336. ¿Cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

SOLUCIÓN: **El número de gallinas es: 60**
El número de conejos es: 54

111. Hallar la base de un triángulo isósceles que tiene 10 cm de altura, y es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 y 15 cm respectivamente.

SOLUCIÓN: **La base del triángulo mide 12 cm**

112. Un grifo llena un depósito en 18 horas. Un segundo grifo lo puede llenar en 12 horas. ¿Cuánto tardarían en llenar el depósito ambos grifos a la vez?

SOLUCIÓN: **Tardarán en llenarlo 7 h 12'**

113. Se inscribe un cuadrado en un triángulo que tiene 15 cm de base y 10 cm de altura. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

SOLUCIÓN: **El cuadrado tiene de lado 6 cm**

114. Hallar un número que al restarle 2 unidades resulte tres veces mayor que si se le restase 10 unidades.

SOLUCIÓN: **El número pedido es: 14**

115. En un aula se sientan 2 alumnos por cada banco y quedan 3 alumnos sin asiento. ¿Cuántos bancos hay en el aula si es 39 el número de alumnos?

SOLUCIÓN: **El número de bancos es: 18**

116. Descomponer el número 2 000 en dos partes, de modo que la quinta parte de la mayor menos la mitad de la menor sea la décima parte de ésta.

SOLUCIÓN: **La parte mayor es: 1 500**
La parte menor es: 500

117. Una familia está compuesta por los padres y tres hijos. Las edades de los cinco suman 142 años. Averiguar la edad de cada uno sabiendo: que el 2.° hijo tiene 2 años más que el 3.° y tres menos que el 1.°, que la edad de la madre es la suma de la de los tres hijos y que el padre tenía 4 años cuando nació su esposa.

SOLUCIÓN: **Padre: 50 años; madre: 46 años; 1.er hijo: 18; 2.° hijo: 15 y 3.er hijo: 13**

118. Calcular la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro es 320 cm, siendo la altura $\frac{3}{5}$ de la base.

SOLUCIÓN: **La base mide: 100 cm**
La altura mide: 60 cm

119. Un comerciante compra varias docenas de huevos a 150 pts. la docena. Se le rompen 6 huevos y vende los que le quedan a 180 pts. la docena, con lo que gana 720 pts. en la operación. ¿Cuántas docenas de huevos compró?

SOLUCIÓN: **Compró: 27 docenas de huevos**

120. Un niño ha olvidado cierto número, pero sabe que la diferencia entre su tercio y su cuarta parte es 8. ¿Cuál es el número?

SOLUCIÓN: **El número es el 96**

121. Un vendedor de naranjas vendió la mitad de las que tenía menos 6, luego $\frac{1}{5}$ de las que le quedaban, más tarde las $\frac{3}{4}$ partes de las que aún conservaba. Le quedaron 12. ¿Cuántas tenía?

SOLUCIÓN: **Tenía 108 naranjas**

122. Hallar los números naturales cuyo triplo menos 6 unidades es mayor que su duplo más cinco.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in N^* / x > 11\}}$

123. Hallar los números naturales cuya mitad más la cuarta parte sea mayor que 3.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in N^* / x > 4\}}$

124. Hallar los números enteros cuyo triplo menos 5 unidades sea menor que 4.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in Z / x < 3\}}$

125. Se sabe que el duplo de un número más 3 unidades está comprendido entre 5 y 13. ¿Cuál es el intervalo al que pertenece dicho número?

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = x \in]\,1,5\,[}$

126. Hallar los números reales que restándoles su cuádruplo de 3 den menos de 15.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in R / x > -3\}}$

127. Hallar los números racionales que después de sumarles 2 unidades y de dividir el resultado por 3 sean menores que 4.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in Q / x < 10\}}$

128. Hallar los números racionales tales que su triplo más 4 unidades sea mayor que 6.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \left\{x \in Q / x > \frac{2}{3}\right\}}$

129. Hallar los números racionales tales que su quinta parte menos 10 sea mayor que su cuarta parte más 6.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in Q / x < -320\}}$

130. Hallar un número cuyo cuadrado más su triplo sea igual a 40.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 5 \;;\; x_2 = -8}$

131. Hallar dos números positivos cuya diferencia sea 4 y su producto 12.

SOLUCIÓN: **El número menor es: 2**
El número mayor es: 6

132. Añadiendo 5 unidades a un número natural y multiplicándolo por el mismo número disminuido en 5 unidades, el producto de ambos es 144. ¿Cuál es ese número?

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 13}$

133. Descomponer el número 864 en dos factores cuya suma sea 60.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 36 \;;\; x_2 = 24}$

134. Descomponer el número 16 en dos partes cuyo producto sea 60.

SOLUCIÓN: **Las partes son 6 y 10**

135. Hallar la base y altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 50 cm y que la base tiene 10 cm más que la altura.

SOLUCIÓN: **La altura mide: 30 cm**
La base mide: 40 cm

136. El perímetro de un rectángulo es 30 cm y su área 56 cm^2. Hallar la longitud de sus lados.

SOLUCIÓN: **Las longitudes de sus lados son: 7 y 8**

137. Hallar dos números naturales consecutivos, sabiendo que la diferencia de sus cubos es 2 107.

SOLUCIÓN: **Los números enteros consecutivos son: 26 y 27**

138. Hallar tres números naturales consecutivos, tales que su producto sea igual a 8 veces su suma.

SOLUCIÓN: **Los n.os pedidos son: 4, 5, y 6**

139. La suma de dos números es 7, y la de sus inversos $\frac{7}{12}$. Hallar el valor de estos dos números.

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 3 y 4**

140. Hallar un número que quitándole 60 unidades a su cuadrado resulte lo mismo que quitándole 4 unidades al propio número.

SOLUCIÓN: **Los números son: 8 y −7**

141. Un caño tarda 5 horas más que otro en llenar un depósito. Juntos tardarían 6 horas. ¿Cuánto tardará cada caño en llenarlo por separado?

SOLUCIÓN: **El 1.er caño tardará: 10 horas**
El 2.° caño tardará: 15 horas

142. Un padre reparte entre sus hijos 3 600 pts. en partes iguales. Si tuviese 3 hijos menos, cada uno recibiría 200 pts. más. ¿Cuántos hijos tiene ese padre?

SOLUCIÓN: **El número de hijos es 9**

143. Hallar tres números consecutivos enteros y positivos, cuyo producto sea igual a 15 veces el segundo.

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 3, 4 y 5**

144. Un comerciante quiere gratificar a sus empleados, para ello reparte cierta cantidad de dinero. Si a cada empleado le da 5 000 pts, le sobran 2 500 pts; pero si da a cada uno 5 500 pts. le faltan 1 000 pts. ¿Qué cantidad repartió y qué número de empleados tenía?

SOLUCIÓN: **Número de empleados: 7**
La cantidad que repartió era: 37 500 pts.

145. Dos compañeros, Manuel y Santiago, que trabajan juntos, el primero durante 12 días y el segundo durante 15, realizan una obra. Hallar los días que tardaría cada uno, suponiendo que trabajara solo, en realizar dicha obra, sabiendo que Manuel tardaría 6 días más que Santiago.

SOLUCIÓN: **Manuel tardaría 30 días y Santiago 24**

146. Los alumnos de un centro organizan una excursión en dos autocares; si del 1.^er^ autocar pasan 6 alumnos al 2.°, resulta que habrá igual número de alumnos en ambos autocares, pero si del 2.° pasan 6 alumnos al 1.°, serán en éste el doble que en el 2.°. ¿Cuántos alumnos van en cada autocar?

SOLUCIÓN: **En el 1.^er^ autocar van 42 alumnos**
En el 2.° autocar van 30 alumnos

147. Hallar un número de dos cifras, sabiendo que la cifra de las unidades menos la mitad de la cifra de las decenas es 8 y la cifra de las decenas menos la mitad de la cifra de las unidades es 2.

SOLUCIÓN: **El problema no tiene solución**

148. Un número tiene dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el número y se resta del primero da 27. Hallar dicho número.

SOLUCIÓN: **El número pedido es el 63**

149. Una persona compra 3 kg de cacao y 2 kg de café abonando 3 450 pts. Sabiendo que 2 kg de cacao más 1 kg de café cuestan 2 000 pts., hallar el precio del kg de cacao y del kg de café.

SOLUCIÓN: **El kg de cacao costó 550 pts.**
El kg de café costó 900 pts.

150. Dividir un segmento de 20 cm de longitud en dos partes que sean proporcionales a 4 y 6.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 8\ cm\ ;\ y = 12\ cm}$

151. En un monedero hay 64 monedas con un valor de 1 000 pts. Si las monedas son de 5 y 25 pts. ¿Cuántas monedas hay de cada clase en el monedero?

SOLUCIÓN: **Hay 30 monedas de 5 pts.**
Hay 34 monedas de 25 pts.

152. Hallar dos números cuya diferencia sea 13 y la suma de sus cuadrados sea 349.

SOLUCIÓN:

1.ª $x_1 = 18 \quad y_1 = 5$
2.ª $x_2 = -5 \quad y_2 = -18$

153. Hallar las dimensiones de un campo rectangular, sabiendo que si se aumenta la longitud en 10 m y la anchura en 5 m, el área aumenta en 2 100 m^2, mientras que si la longitud y la anchura se disminuyen en 20 m y 8 m, respectivamente, disminuye el área en 3 440 m^2.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 250\ m\ ;\ y = 80\ m}$

154. Hallar los catetos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 13 cm y que la diferencia entre sus catetos es 7 cm.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 12\ cm\ ;\ y = 5\ cm}$

155. Hallar dos números sabiendo que su diferencia es 10 y su producto −24.

SOLUCIÓN:

1.ª $x_1 = 6 \quad y_1 = -4$
2.ª $x_2 = 4 \quad y_2 = -6$

156. Hace 5 años la edad de una persona era el triplo de la de otra, y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

SOLUCIÓN: **Tienen 35 y 15 años respectivamente**

157. Un rectángulo tiene de perímetro 28 cm y de área 24 cm^2. Hallar la longitud de sus lados.

SOLUCIÓN:

1.ª $x_1 = 12 \quad y_1 = 2$
2.ª $x_2 = 2 \quad y_2 = 12$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Concepto de función de variable real

Sea **R** *el conjunto de los números reales y* $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ *un subconjunto no vacío de* **R** *(que puede ser todo* **R***).*

Se llama función real de variable real a toda aplicación **f** *de* **D** *en* **R**, *y se representa por:*

$$\mathbf{f}: \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad o \qquad \mathbf{D} \xrightarrow{\ \mathbf{f}\ } \mathbf{R}$$

El subconjunto **D** *se llama dominio de definición o campo de existencia de la función* **f**. *Se representa por:*

$$\text{Dom}\,(\mathbf{f})$$

Al número $x \in \mathbf{D}$ *se le llama variable independiente. Al número* $y \in \mathbf{R}$ *asociado por* **f** *al número* x *se le llama variable dependiente. Se designa la imagen de* x *por* **f** (x), *es decir,* $y = \mathbf{f}(x)$.

Se llama recorrido de una función **f** *al conjunto formado por las imágenes de todos los elementos del dominio de la función.*

Se representa por:

$$\text{Rec}\,(\mathbf{f})$$

Solamente nos ocuparemos de las funciones reales de variable real, a las que llamaremos, simplemente, funciones.

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\ \mathbf{f}\ } \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow \mathbf{f}(x) = y$$

Si a cada valor de x *del dominio de definición le corresponde un sólo valor de* y, *la función se sabe que es uniforme.*

Si a algún valor de x *del dominio de definición le corresponde más de un valor de* y, *la función se dice que es multiforme.*

Representación gráfica de una función

I. Grafo de una función

Se llama grafo de una **f** *real de variable real, al conjunto de todos los pares* (**x, y**), *donde* x *pertenece al dominio de la función e* y *es el correspondiente* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

II. Gráfica de una función

El conjunto de todos los puntos (x, y) *del grafo determina en un sistema de coordenadas cartesianas rectángulares una curva que se llama gráfica de la función* **f**.

Para dibujar la gráfica de una función **f** *es conveniente construir una tabla de valores de* **f**, *que consiste en elegir algunos valores de* x *y obtener los correspondientes de* y.

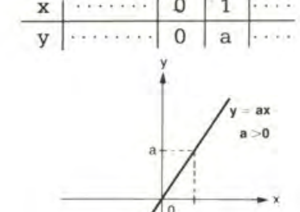
Representación gráfica de la función lineal: $y = ax$

Como $y = ax$ *es la ecuación de una recta que pasa por el origen, para representarla será suficiente con determinar las coordenadas de otro punto cualquiera de la misma:*

1.° *Si* $a > 0$

La tabla de valores es:

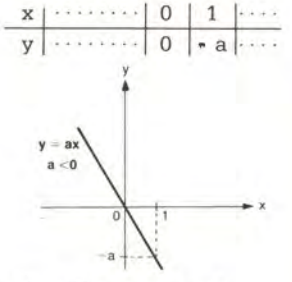
x	·······	0	1	····
y	·······	0	a	····



2.° Si $a < 0$

La tabla de valores es:

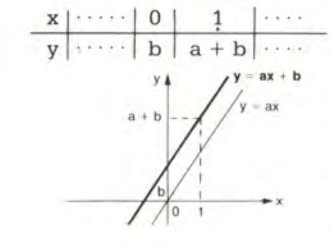
x	·······	0	1	····
y	·······	0	-a	····



Representación gráfica de la función afín: $y = ax + b$

Si $b = 0$, *resulta la función lineal* $y = ax$.
Si $b \neq 0$, *resulta la función afín* $y = ax + b$.

x	····	0	1	····
y	····	b	a + b	····



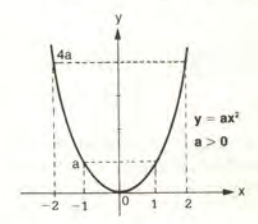
Observamos que para cada valor de x, *se obtiene un valor de* y, *que resulta de sumar* b *al valor de* ax.
La gráfica de $y = ax + b$ *es la misma que la de* $y = ax$ *pero trasladada* b *unidades.*

Representación gráfica de la función: $y = ax^2$

I. *Si* $a > 0$

La tabla de valores es:

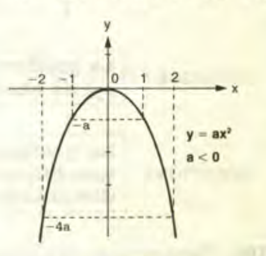
x	····	−2	−1	0	1	2
y	····	4a	a	0	a	4a



II. *Si* $a < 0$

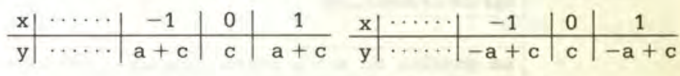
La tabla de valores es:

x	····	−2	−1	0	1	2
y	····	−4a	−a	0	−a	−4a



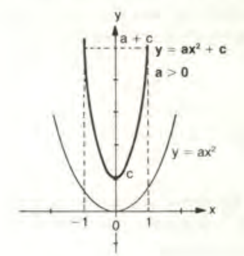
Representación gráfica de la función: $y = ax^2 + c$

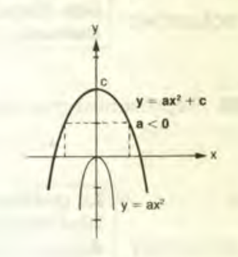
Si $c = 0$, *resulta la función* $y = ax^2$.
Si $c \neq 0$, *resulta la función* $y = ax^2 + c$ $(c > a)$



x	······	−1	0	1
y	······	a + c	c	a + c

x	······	−1	0	1
y	······	−a + c	c	−a + c





Observamos que para cada valor de x, *se obtiene un valor de* y, *que resulta de sumar* c *al valor* ax^2.

La gráfica de la función $y = ax^2 + c$ *es la misma que la de* $y = ax^2$ *pero trasladada* c *unidades.*

Representación gráfica de la función cuadrática

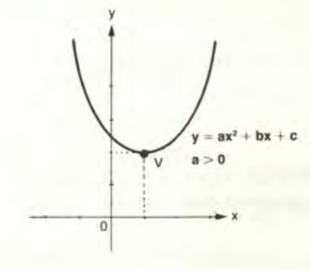
Se llama función cuadrática a la función $y = ax^2 + bx + c$.

Para representar gráficamente una función de este tipo es conveniente tener en cuenta que:

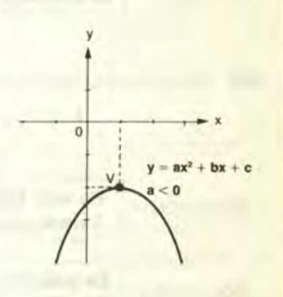
I. *La gráfica de esta función es una parábola con vértice en el punto* $V\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ *y cuyo eje es paralelo al eje de ordenadas.*

II. *Para construir la tabla de valores se debe empezar por hallar el vértice, luego se hallarán los puntos de la curva cuya abscisa sea una, dos,..., unidades inferior y superior a la abscisa del vértice.*

Si $a > 0$, *la gráfica de* $y = ax^2 + bx + c$ *es:*



Si $a < 0$, *la gráfica de* $y = ax^2 + bx + c$ *es:*



EJERCICIOS PROPUESTOS

158. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = 0$ **II.** $y = 3$

SOLUCIÓN I: **La gráfica de $y = 0$ viene representada por el eje de abscisas.**

SOLUCIÓN II: **La gráfica de $y = 3$ viene representada por una línea recta paralela al eje de abscisas y distante 3 unidades por encima de dicho eje.**

159. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $x = 0$ **II.** $x = 2$

SOLUCIÓN I: **La gráfica de $x = 0$ viene representada por el eje de ordenadas.**

SOLUCIÓN II: **La gráfica de $x = 2$ viene representada por una línea recta paralela al eje de ordenadas y distante 2 unidades por la derecha de dicho eje.**

160. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = x$ **II.** $y = 3x$

SOLUCIÓN I: **La gráfica de $y = x$ es una línea recta que es bisectriz del 1.er y 3.er cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.**

SOLUCIÓN II: **La gráfica de $y = 3x$ es una línea recta que forma un ángulo mayor con el semieje OX.**

161. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = -x$ **II.** $y = -3x$

SOLUCIÓN I: **La gráfica de $y = -x$ es una línea recta que es bisectriz del 2.° y 4.° cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.**

SOLUCIÓN II: **La gráfica de $y = -3x$ es una línea recta que forma un ángulo menor con el semieje OX.**

162. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = \frac{x}{3}$ **II.** $y = -\frac{x}{3}$

SOLUCIÓN I: **Es una línea recta cuyo ángulo con respecto al semieje OX es menor que el de $y = x$.**

SOLUCIÓN II: **Es una línea recta cuyo ángulo con respecto al semieje OX es mayor que el de $y = -x$.**

163. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = x + 3$ **II.** $y = -x - 3$

SOLUCIÓN I: **Es una línea recta paralela a $y = x$, distante 3 unidades por encima del origen.**

SOLUCIÓN II: **Es una línea recta paralela a $y = -x$, distante 3 unidades por debajo del origen.**

164. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = 2x + 1$ **II.** $y = 2x - 1$

SOLUCIÓN I: **La gráfica de $y = 2x + 1$ es una línea recta.**

SOLUCIÓN II: **La gráfica de $y = 2x - 1$ es una línea recta.**

165. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = -2x + 4$ **II.** $x + y = 1$

SOLUCIÓN I: **La gráfica de $y = -2x + 4$ es una línea recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 4) y (2, 0).**

SOLUCIÓN II: **Es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 1) y (1, 0).**

166. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = \frac{x}{2} + 3$ **II.** $x - y = 3$

SOLUCIÓN I: **Es una recta paralela a $y = \frac{x}{2}$, distante 3 unidades por encima del eje de abscisas.**

SOLUCIÓN II: **Es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, −3).**

167. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = \frac{x-3}{2}$ **II.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

SOLUCIÓN I: **La gráfica es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ y (3, 0).**

SOLUCIÓN II: **Es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 3) y (2, 0).**

168. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = x^2$ **II.** $y = -x^2$

SOLUCIÓN I: **Es una parábola cuyo vértice es el punto (0,0). Es simétrica respecto de OY.**

SOLUCIÓN II: **Es una parábola cuyo vértice es (0, 0). Es simétrica respecto de OY′.**

169. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = 2x^2$ **II.** $y = -2x^2$

SOLUCIÓN I: **Es una parábola cuyo vértice es el punto (0, 0).**
Es simétrica respecto a OY.
Es una curva más estrecha respecto a la $y = x^2$.

SOLUCIÓN II: **Parábola de V(0, 0).**
Simétrica respecto a OY′.
Curva más estrecha respecto a la $y = -x^2$.

170. Representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $y = \frac{x^2}{2}$ **II.** $y = -\frac{x^2}{2}$

SOLUCIÓN I: **Es una parábola de V (0, 0).**
Simétrica respecto de OY.
Curva más ancha respecto a la $y = x^2$.

SOLUCIÓN II: **Es una parábola de V (0, 0).**
Simétrica respecto de OY′.
Curva más ancha respecto a la $y = -x^2$.

171. Representar gráficamente la siguiente función:

$y = x^2 + 4$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (0, 4).**
Simétrica respecto de OY.
Curva igual a la $y = x^2$ pero trasladada en 4 unidades hacia arriba.

172. Representar gráficamente la siguiente función:

$$y = x^2 - 4$$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (0, −4), que corta al eje de abscisas en los puntos (2, 0) y (−2, 0). Simétrica respecto al eje de ordenadas.**

173. Representar gráficamente la siguiente función:

$$y = -x^2 + 4x$$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (2, 4), que corta el eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (4, 0).**

174. Representar gráficamente la función:

$$y = x^2 - 4x$$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (2, −4), que corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (4, 0).**

175. Representar gráficamente la función:

$$y = x^2 - 4x + 4$$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (2, 0), cuya curva corta al semieje OY en el punto (0, 4).**

176. Representar gráficamente la función:

$$y = -x^2 + 6x - 8$$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (3, 1), que corta al eje de abscisas en los puntos (2, 0) y (4, 0).**

177. Representar gráficamente la función:

$$y = x^2 + 2x - 5$$

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (−1, −6), que corta al eje de abscisas en dos puntos.**

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

I. $3x = 6$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 2}$

II. $5x = 125$

$$x = \frac{125}{5} = 25$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 25}$

III. $2x = 3$

$$x = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x = \frac{3}{2}}$

2. RESOLUCIÓN

I. $x - 2 = 1$

$$x = 1 + 2$$
$$x = 3$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 3}$

II. $3x + 1 = 7$

$$3x = 7 - 1$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 2}$

III. $3x - 1 = 20$

$$3x = 21$$
$$x = 7$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x = 7}$

3. RESOLUCIÓN

I. $x + 9 = 1 + 2x$

$$9 - 1 = 2x - x$$
$$8 = x$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 8}$

II. $5x = 4x + 3$

$$5x - 4x = 3$$
$$x = 3$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = 3}$

4. RESOLUCIÓN

I. $60 - 5x = x - 12$

$$60 + 12 = x + 5x$$
$$72 = 6x$$
$$x = \frac{72}{6} = 12$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 12}$

II. $7 - 3x = 14 + x$

$$7 - 14 = x + 3x$$
$$-7 = 4x$$
$$x = -\frac{7}{4}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = -\frac{7}{4}}$

5. RESOLUCIÓN

I. $3(x-2)=x+10$

$$3x-6=x+10$$
$$3x-x=6+10$$
$$2x=16$$
$$x=\frac{16}{2}=8$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=8}}$

II. $3x+7=2(x+6)$

$$3x+7=2x+12$$
$$3x-2x=12-7$$
$$x=5$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=5}}$

6. RESOLUCIÓN

I. $5(x-8)=3(x-6)$

$$5x-40=3x-18$$
$$5x-3x=40-18$$
$$2x=22$$
$$x=11$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=11}}$

II. $9(13-x)-4x=9x+5(21-2x)$

$$117-9x-4x=9x+105-10x$$
$$117-105=9x-10x+9x+4x$$
$$12=12x$$
$$x=1$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=1}}$

7. RESOLUCIÓN

I. $\frac{2x}{3}=6$

$$2x=18$$
$$x=9$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=9}}$

II. $\frac{3x}{2}=x+4$

$$3x=2x+8$$
$$3x-2x=8$$
$$x=8$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=8}}$

III. $\frac{3x}{2}+20=25+x$

$$3x+40=50+2x$$
$$3x-2x=50-40$$
$$x=10$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{x=10}}$

8. RESOLUCIÓN

I. $x-10=\frac{5}{9}(x-6)$

$$9x-90=5(x-6)$$
$$9x-90=5x-30$$
$$9x-5x=90-30$$
$$4x=60$$
$$x=15$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=15}}$

II. $8\left(\frac{x+5}{3}\right)=2x+12$

$$\frac{8x+40}{3}=2x+12$$
$$8x+40=6x+36$$
$$8x-6x=36-40$$
$$2x=-4$$
$$x=-2$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=-2}}$

9. RESOLUCIÓN

I. $\frac{1-3x}{2}=2-2x$

$$1-3x=4-4x$$
$$4x-3x=4-1$$
$$x=3$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=3}}$

II. $\frac{3+5x}{1-3x}=10$

$$3+5x=10-30x$$
$$30x+5x=10-3$$
$$35x=7$$
$$x=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=\frac{1}{5}}}$

10. RESOLUCIÓN

I. $\frac{3(x+1)}{2(1+2x)}=\frac{9}{10}$

$$30(x+1)=18(1+2x)$$
$$30x+30=18+36x$$
$$30-18=36x-30x$$
$$12=6x$$
$$x=2$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=2}}$

II. $\frac{x-3}{2(x-2)}=\frac{1}{3}$

$$3x-9=2(x-2)$$
$$3x-9=2x-4$$
$$3x-2x=9-4$$
$$x=5$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=5}}$

11. RESOLUCIÓN

I. $6(2x+1)=5(1-4x)-3(4-2x)$

$$12x+6=5-20x-12+6x$$
$$12x+20x-6x=5-12-6$$
$$26x=-13$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x=-\frac{1}{2}}}$

II. $2(3x-4)+3(9-2x)=2(x+1)-3(5-2x)$

$$\cancel{6x}-8+27-\cancel{6x}=2x+2-15+6x$$
$$-8+27-2+15=2x+6x$$
$$32=8x$$
$$x=4$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x=4}}$

12. RESOLUCIÓN

I. $m.c.m.\ (5, 2) = 10$

$$\frac{2x}{10} + \frac{5x}{10} = \frac{140}{10}$$
$$2x + 5x = 140$$
$$7x = 140$$
$$x = 20$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x = 20}}$

II. $m.c.m.\ (4,3) = 12$

$$\frac{9x}{12} - \frac{144}{12} = \frac{12}{12} - \frac{4x}{12}$$
$$9x - 144 = 12 - 4x$$
$$9x + 4x = 144 + 12$$
$$13x = 156$$
$$x = 12$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x = 12}}$

13. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (8, 4, 8, 2) = 8$$
$$5x - 2 + 2(1 - 2x) = 3x + 2 - 4(4 - 3x)$$
$$5x - \cancel{2} + \cancel{2} - 4x = 3x + 2 - 16 + 12x$$
$$x = 15x - 14$$
$$14 = 14x$$
$$x = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 1}}$

14. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (5, 10, 2, 10) = 10$$
$$2(3 - 4x) - (3x - 5) - 5(2 - 3x) = 9$$
$$6 - 8x - 3x + 5 - 10 + 15x = 9$$
$$-8x - 3x + 15x = 9 - 6 - 5 + 10$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 2}}$

15. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (4, 6, 3, 12) = 12$$
$$9(2x + 1) - 2(3 + 5x) + 48x + 4(1 + x) = 151 + 12x$$
$$18x + 9 - 6 - 10x + 48x + 4 + 4x = 151 + 12x$$
$$18x - 10x + 48x + 4x - 12x = 151 - 9 + 6 - 4$$
$$48x = 144$$
$$x = 3$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 3}}$

16. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (2, 5, 10) = 10$$
$$5(3x - 1) - 2(x + 3) = 23x - 21 - 10(x - 1)$$
$$15x - 5 - 2x - 6 = 23x - 21 - 10x + 10$$
$$15x - 2x - 23x + 10x = -21 + 10 + 5 + 6$$
$$0 \cdot x = 0$$

SOLUCIÓN: **x tiene infinitas soluciones**

17. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (x - 1, x + 1, x^2 - 1) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
$$x + 1 + 2(x - 1) = 5$$
$$x + 1 + 2x - 2 = 5$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 2}}$

18. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (x - 2, x + 2, 2x^2 - 8) = 2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) =$$
$$= 2(x + 2)(x - 2)$$
$$2(x + 2)15 - 2(x - 2)18 = 12x + 6$$
$$30x + 60 - 36x + 72 = 12x + 6$$
$$60 + 72 - 6 = 12x - 30x + 36x$$
$$126 = 18x$$
$$x = 7$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 7}}$

19. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (2x - 1, 2x + 1, 4x^2 - 1) = 4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$$
$$(2x + 1)3 - (2x - 1)2 = 7$$
$$6x + 3 - 4x + 2 = 7$$
$$6x - 4x = 7 - 3 - 2$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 1}}$

20. RESOLUCIÓN

$$m.c.m.\ (x - 1, x^2 + 3x - 4, x + 4) = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$
$$(x + 4)30 - 200 = (x - 1)20$$
$$30x + 120 - 200 = 20x - 20$$
$$30x - 20x = 200 - 120 - 20$$
$$10x = 60$$
$$x = 6$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 6}}$

21. RESOLUCIÓN

I. $5x^2 = 45$

$$x^2 = \frac{45}{5} = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x = \pm 3}}$

II. $x^2 - 36 = 64$

$$x^2 = 64 + 36$$
$$x^2 = 100$$
$$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x = \pm 10}}$

III. $x^2 - 4x = 0$

$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 4}}$

22. RESOLUCIÓN

I. $\dfrac{x^2}{3} = x$

$$x^2 = 3x$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 3}}$

II. $5x^2 - 125 = 0$

$$5x^2 = 125$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x = \pm 5}}$

III. $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

$$3x^2 - x^2 = 28 + 4$$
$$2x^2 = 32$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x = \pm 4}$

23. RESOLUCIÓN

I. $4x^2 - 9 = 0$

$$4x^2 = 9$$
$$x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm\frac{3}{2}}$

II. $x^2 - 101 = 20$

$$x^2 = 20 + 101$$
$$x^2 = 121$$
$$x = \pm\sqrt{121} = \pm 11$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = \pm 11}$

24. RESOLUCIÓN

I. $(x - 5)(x + 1) + 5 = 0$

$$x^2 + x - 5x - \cancel{5} + \cancel{5} = 0$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 4}$

II. $(x + 6)(x - 6) = 2(x - 18)$

$$x^2 - 36 = 2x - 36$$
$$x^2 - 2x = 36 - 36 = 0$$
$$x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 2}$

25. RESOLUCIÓN

I. $(3x + 2)(3x - 2) = 77$

$$9x^2 - 4 = 77$$
$$9x^2 = 81$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm 3}$

II. $\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 = 9x^2 + \frac{25}{4}$

$$4x^2 + 10x + \frac{\cancel{25}}{\cancel{4}} = 9x^2 + \frac{\cancel{25}}{\cancel{4}}$$
$$9x^2 - 4x^2 - 10x = 0$$
$$5x^2 - 10x = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 2}$

26. RESOLUCIÓN

I. $\frac{3x^2}{4} = \frac{4}{27}$

$$81x^2 = 16$$
$$x^2 = \frac{16}{81}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{16}{81}} = \pm\frac{4}{9}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = \pm\frac{4}{9}}$

II. $\frac{3x}{8 + 4x} = \frac{x - 2}{x}$

$$3x^2 = (8 + 4x)(x - 2)$$
$$3x^2 = \cancel{8x} - 16 + 4x^2 - \cancel{8x}$$
$$16 = 4x^2 - 3x^2$$
$$16 = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x = \pm 4}$

27. RESOLUCIÓN

I. $24x^2 - 7x = 3x\left(5x - \frac{x}{2}\right)$

$$24x^2 - 7x = 15x^2 - \frac{3x^2}{2}$$
$$48x^2 - 14x = 30x^2 - 3x^2$$
$$21x^2 - 14x = 0$$
$$3x^2 - 2x = 0$$
$$x(3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = \frac{2}{3}}$

II. $43x + \frac{3x^2}{7} + 10x = 8x^2$

$$301x + 3x^2 + 70x = 56x^2$$
$$56x^2 - 3x^2 - 301x - 70x = 0$$
$$53x^2 - 371x = 0$$
$$x^2 - 7x = 0$$
$$x(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 7 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 7}$

28. RESOLUCIÓN

$$x^2 + \frac{2x^2}{3} + 5x^2 - \frac{5x^2}{4} = 65x$$
$$m.c.m.\ (3, 4) = 12$$
$$12x^2 + 8x^2 + 60x^2 - 15x^2 = 780x$$
$$65x^2 = 780x$$
$$65x^2 - 780x = 0$$
$$x^2 - 12x = 0$$
$$x(x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ó \\ x - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = 12 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 0\ ;\ x_2 = 12}$

29. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 3\ ;\ x_2 = 2}$

30. RESOLUCIÓN

Dividiendo todos los términos por 3, resulta:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-10)}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\[2mm] \dfrac{3-7}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 2 \; ; \; x_2 = 5}$

31. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\[2mm] \dfrac{-5-7}{6} = -\dfrac{12}{6} = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = \dfrac{1}{3} \; ; \; x_2 = -2}$

32. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{-6}{2} = -3 \\[2mm] \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = -3 \; ; \; x_2 = -5}$

33. RESOLUCIÓN

$$x^2 + 4x - 21 = 8x$$

$$x^2 + 4x - 21 - 8x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} = \begin{cases} \dfrac{14}{2} = 7 \\[2mm] \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 7 \; ; \; x_2 = -3}$

34. RESOLUCIÓN

Efectuando operaciones, resulta:

$$x^2 + 24x = 15 + 10x$$

$$x^2 + 14x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{2} =$$

$$= \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-14 \pm 16}{2} = \begin{cases} \dfrac{2}{2} = 1 \\[2mm] \dfrac{-30}{2} = -15 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 1 \; ; \; x_2 = -15}$

35. RESOLUCIÓN

$$(x + 2)^2 = 24 - 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 24 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2} = \begin{cases} \dfrac{4}{2} = 2 \\[2mm] \dfrac{-20}{2} = -10 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -10}$

36. RESOLUCIÓN

$$(7 + x)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7 + x = 0 \Rightarrow x = -7 \\ \text{ó} \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = -7 \; ; \; x_2 = 3}$

37. RESOLUCIÓN

Multiplicando todos los términos por 2, resulta:

$$6x^2 - 11x - 2 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{12} =$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{11 \pm 13}{12} = \begin{cases} \dfrac{24}{12} = 2 \\[2mm] \dfrac{-2}{12} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -\dfrac{1}{6}}$

38. RESOLUCIÓN

Multiplicando los dos miembros por $(x - 3)$, resulta:

$$(x - 5)\,(x - 3) = -1$$

Efectuando operaciones, se obtiene:

$$x^2 - 3x - 5x + 15 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = \begin{cases} \dfrac{8}{2} = 4 \\[2mm] \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 4 \; ; \; x_2 = 4}$

39. RESOLUCIÓN

Efectuando operaciones, resulta:

$$(2x + 1)(x + 1) = 5(x - 1)(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 =$$

$$= 5x^2 - 10x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{6} =$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{13 \pm 11}{6} = \begin{cases} \dfrac{24}{6} = 4 \\[2mm] \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 4 \; ; \; x_2 = \dfrac{1}{3}}$

40. RESOLUCIÓN

$$\frac{x}{3}(x - 31) = 2\left(10 - \frac{x^2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{31x}{3} = 20 - \frac{2x^2}{3}$$

Multiplicando por 3 los dos miembros de la ecuación, resulta:

$$x^2 - 31x = 60 - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 31x - 60 = 0$$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{961 + 720}}{6} =$$

$$= \frac{31 \pm \sqrt{1681}}{6} = \frac{31 \pm 41}{6} = \begin{cases} \dfrac{72}{6} = 12 \\[2mm] \dfrac{-10}{6} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 12 \; ; \; x_2 = \dfrac{-5}{3}}$

41. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO:

$$(x-9)^2-49=0 \Rightarrow (x-9)^2=49 \Rightarrow x-9=\pm\sqrt{49}=\pm 7$$

luego:

$$x=9\pm 7 \Rightarrow \begin{cases} x=9+7=16 \\ \text{ó} \\ x=9-7=2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN $\boxed{x_1=16 \; ; \; x_2=2}$

SEGUNDO MÉTODO:

Teniendo en cuenta que: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, *resulta:*

$$(x-9)^2-7^2=0 \Leftrightarrow (x-9-7)(x-9+7)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-16)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-16=0 \Rightarrow x=16 \\ \text{ó} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1=16 \; ; \; x_2=2}$

42. RESOLUCIÓN

$$(x+5)^2=(2x-3)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2-(2x-3)^2=0$$

Recordando: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, *resulta:*

$$(x+5+2x-3)(x+5-2x+3)=0$$

$$(3x+2)(-x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3} \\ \text{ó} \\ -x+8=0 \Rightarrow x=8 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1=-\dfrac{2}{3} \; ; \; x_2=8}$

43. RESOLUCIÓN

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}=\frac{1+3x}{5}$$

$$\text{m.c.m. } (2, 6, 5)=30$$

$$15x^2+5x=6(1+3x)$$

$$15x^2+5x=6+18x$$

$$15x^2-13x-6=0$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169+360}}{30}=$$

$$=\frac{13\pm\sqrt{529}}{30}=\frac{13\pm 23}{30}= \begin{cases} \dfrac{36}{30}=\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{-10}{30}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1=\dfrac{6}{5} \; ; \; x_2=-\dfrac{1}{3}}$

44. RESOLUCIÓN

$$\text{m.c.m.}=2\cdot 3(x+3)=6(x+3)$$

$$3(x+3)(x+3)+12=20(x+3)$$

$$3(x^2+6x+9)+12=20x+60$$

$$3x^2+18x+27+12=20x+60$$

$$3x^2-2x-21=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{6}=$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{256}}{6}=\frac{2\pm 16}{6}= \begin{cases} \dfrac{18}{6}=3 \\ \dfrac{-14}{6}=-\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1=3 \; ; \; x_2=-\dfrac{7}{3}}$

45. RESOLUCIÓN

$$\text{m.c.m.}=(5-x)(5+x)4$$

$$4(5+x)+8(5-x)=3(5-x)(5+x)$$

$$20+4x+40-8x=3(25-x^2)$$

$$60-4x=75-3x^2$$

$$3x^2-4x-15=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{4\pm 14}{6}= \begin{cases} \dfrac{18}{6}=3 \\ \dfrac{-10}{6}=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1=3 \; ; \; x_2=-\dfrac{5}{3}}$

46. RESOLUCIÓN

$$\text{m.c.m.}=4x$$

$$16x(x-1)=15x+2(x-1)$$

$$16x^2-16x=15x+2x-2$$

$$16x^2-33x+2=0$$

$$x=\frac{33\pm\sqrt{1\,089-128}}{32}=$$

$$=\frac{33\pm\sqrt{961}}{32}=\frac{33\pm 31}{32}= \begin{cases} \dfrac{64}{32}=2 \\ \dfrac{2}{32}=\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1=2 \; ; \; x_2=\dfrac{1}{16}}$

47. RESOLUCIÓN

I. $a=1; \; b=-5; \; c=6$

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5$$

$$p=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{6}{1}=6$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x_1+x_2=5 \; ; \; x_1\cdot x_2=6}$

II. $a=1; \; b=12; \; c=32$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{12}{1}=-12$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{32}{1}=32$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{x_1+x_2=-12 \; ; \; x_1\cdot x_2=32}$

48. RESOLUCIÓN

I. $a=5; \; b=-15; \; c=18$

$$x_1+x_2=-\frac{-15}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{18}{5}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x_1+x_2=3 \, ; x_1\cdot x_2=\dfrac{18}{5}}$

II. $a=3; \; b=16; \; c=-12$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{16}{3}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-\frac{12}{3}=-4$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{x_1+x_2=-\dfrac{16}{3} \; ; \; x_1\cdot x_2=-4}$

49. RESOLUCIÓN

$$x_1+x_2=5+3=8 \quad ; \quad x_1\cdot x_2=5\cdot 3=15$$

La ecuación de segundo grado será:

$$x^2-8x+15=0$$

SOLUCIÓN: **$x^2 - 8x + 15 = 0$**

50. RESOLUCIÓN

$x_1 + x_2 = 7 + (-2) = 5 \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = 7(-2) = -14$

La ecuación de segundo grado será:

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

SOLUCIÓN: **$x^2 - 5x - 14 = 0$**

51. RESOLUCIÓN

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$$

La ecuación de segundo grado será:

$$x^2 - \frac{19}{6}x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 19x + 15 = 0$$

SOLUCIÓN: **$6x^2 - 19x + 15 = 0$**

52. RESOLUCIÓN

$x_1 + x_2 = -13 \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = 36$

La ecuación de segundo grado será:

$$x^2 + 13x + 36 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} =$$

$$= \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-8}{2} = -4 \\ \frac{-18}{2} = -9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **Los números son: $x_1 = -4$; $x_2 = -9$**

53. RESOLUCIÓN

$x_1 + x_2 = 15 \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = 56$

La ecuación de segundo grado será:

$$x^2 - 15x + 56 = 0$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2} = \frac{15 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{14}{2} = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son 7 y 8**

54. RESOLUCIÓN

$S = x_1 + x_2 = 7 + x_2 \quad ; \quad -35 = x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot x_2$

luego: $x_2 = \frac{-35}{7} = -5$; por tanto:

$$S = 7 - 5 = 2$$

SOLUCIÓN: **$S = 2$**

55. RESOLUCIÓN

$$8 = x_1 + x_2 = x_1 + 3 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = 15$$

SOLUCIÓN: **$p = 15$**

56. RESOLUCIÓN

I. $x \geq 2$; $S = \{x \in \mathbf{R} / x \geq 2\}$ (0 1 2 3 4)

II. $x < 5$; $S = \{x \in \mathbf{R} / x < 5\}$ (0 1 2 3 4 5 6)

III. $x \leq 0$; $S = \{x \in \mathbf{R} / x \leq 0\}$ (-3 -2 -1 0 1 2 3)

IV. $x > 0$; $S = \{x \in \mathbf{R} / x > 0\}$ (0 1 2 3)

57. RESOLUCIÓN

I. $x + 2 < 6 - 3x$

$$3x + x < 6 - 2$$
$$4x < 4$$
$$x < 1$$

(0 1 2 3)

SOLUCIÓN I: **$S = \{x \in R / x < 1\}$**

II. $11 - 3x < 19 - (5x + 4)$

$$11 - 3x < 19 - 5x - 4$$
$$5x - 3x < 19 - 4 - 11$$
$$2x < 4$$
$$x < 2$$

(0 1 2 3)

SOLUCIÓN II: **$S = \{x \in R / x < 2\}$**

58. RESOLUCIÓN

I. $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} > 5 - \frac{x}{2}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{2} > 5$$
$$m.c.m. = 6$$
$$2x + x + 3x > 30$$
$$6x > 30$$
$$x > 5$$

(5 6 7 8)

SOLUCIÓN I: **$S = \{x \in R / x > 5\}$**

II. $\frac{x-1}{2} \geq \frac{x-2}{4}$

$$4x - 4 \geq 2x - 4$$
$$4x - 2x \geq 0$$
$$2x \geq 0$$
$$x \geq 0$$

(-1 0 1 2)

SOLUCIÓN II: **$S = \{x \in R / x \geq 0\}$**

59. RESOLUCIÓN

I. $\frac{x-1}{2} < 3(x-2)$

$$x - 1 < 6(x - 2)$$
$$x - 1 < 6x - 12$$
$$12 - 1 < 6x - x$$
$$11 < 5x$$
$$\frac{11}{5} < x$$

SOLUCIÓN I: **$S = \left\{x \in R / \frac{11}{5} < x\right\}$**

II. $5x - \frac{x+1}{6} < 7x - \frac{1-x}{2}$

$$m.c.m. = 6$$
$$30x - (x + 1) < 42x - 3(1 - x)$$
$$30x - x - 1 < 42x - 3 + 3x$$
$$30x - x - 42x - 3x < -3 + 1$$
$$-16x < -2$$
$$-8x < -1$$
$$x > \frac{1}{8}$$

SOLUCIÓN II: **$S = \left\{x \in R / x > \frac{1}{8}\right\}$**

60. RESOLUCIÓN

$|2x - 5| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant 2x - 5 \leqslant 3 \Leftrightarrow 5 - 3 \leqslant 2x \leqslant 5 + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \leqslant 2x \leqslant 8 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 4$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \,/\, 1 \leqslant x \leqslant 4\}}}$

61. RESOLUCIÓN

$|x + 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 4 < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = \{x \in R \,/\, -6 < x < -2\}}}$

62. RESOLUCIÓN

$$Si\ \frac{x-5}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 5 \\ ó \\ \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

Luego:

$S_1 = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x > 5\}$; $S_2 = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x < 0\}$

De donde:

$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x > 5\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,/\, \mathbf{x} < 0\}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S =]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[}}$

63. RESOLUCIÓN

$$Si\ \frac{3x - 9}{2x + 8} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x - 9 > 0 \\ 2x + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow x < 3 \\ ó \\ \begin{cases} 3x - 9 < 0 \\ 2x + 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < -4 \end{cases}$$

$S_1 =]3, +\infty[$; $S_2 =]-\infty, -4[$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S =]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[}}$

64. RESOLUCIÓN

$$\frac{x + 3}{x - 2} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x + 3 - 2x + 4}{x - 2} < 0 \Rightarrow \frac{-x + 7}{x - 2} < 0$$

$$Si\ \frac{-x + 7}{x - 2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x + 7 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 2 \\ ó \\ \begin{cases} -x + 7 < 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 7 \end{cases}$$

$S_1 =]-\infty, 2[$; $S_2 =]7, +\infty[$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S =]-\infty, 2[\cup]7, +\infty[}}$

65. RESOLUCIÓN

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 3$

luego:

$P = x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 3 \\ ó \\ \begin{cases} x + 2 \leqslant 0 \\ x - 3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant -2 \end{cases}$$

$S_1 =]-\infty, -2]$; $S_2 = [3, +\infty[$

$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[}}$

66. RESOLUCIÓN

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 3$

luego:

$P = (x^2 - 4x + 3) = (x - 1)(x - 3) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \\ ó \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[}}$

67. RESOLUCIÓN

$P = (x - 2)(x + 3) \geqslant 0 \Rightarrow$

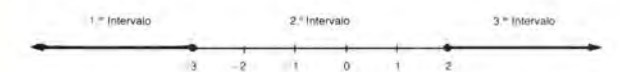
$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 2 \\ ó \\ \begin{cases} x - 2 \leqslant 0 \\ x + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S =]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[}}$

68. RESOLUCIÓN

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 2$

La recta real queda dividida por esas dos raíces en tres intervalos que son:



Se estudian los signos del producto:
$P(x) = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \geqslant 0$ en cada uno de dichos intervalos:

1.er intervalo:

Para valores $x \leqslant -3 \Rightarrow P(x) \geqslant 0$; luego $S_1 =]-\infty, -3]$

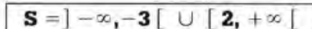
2.º intervalo:

Para valores $-3 < x < 2 \Rightarrow P(x) < 0$. No sirve

3.er intervalo:

Para valores de $x \geqslant 2 \Rightarrow P(x) \geqslant 0$; luego $S_2 = [2, +\infty[$

SOLUCIÓN:


$\boxed{\mathbf{S =]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[}}$

69. RESOLUCIÓN

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2}$$

La ecuación de segundo grado no tiene raíces reales, luego:

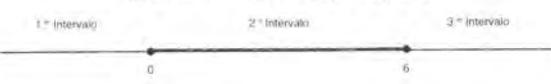
$P(x) = x^2 + 2x + 3 \leq 0$. No tiene solución.

SOLUCIÓN: **S = No tiene solución**

70. RESOLUCIÓN

$$x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$$P(x) = x^2 - 6x = x(x - 6) \leq 0$$



1.er intervalo:

Para $x < 0 \Rightarrow P(x) > 0$. No sirve

2.º intervalo:

Para $0 \leq x \leq 6 \Rightarrow P(x) \leq 0$. $S_1 = [\,0, 6\,]$

3.er intervalo:

Para $x > 6 \Rightarrow P(x) > 0$. No sirve

SOLUCIÓN: **$S = [\,0, 6\,]$**

71. RESOLUCIÓN

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \;;\; x_2 = -2$$

$$P(x) = x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

1.er intervalo:

Para $x < -2 \Rightarrow P(x) > 0$. $S_1 =]-\infty, -2[$

2.º intervalo:

Para $-2 < x < 5 \Rightarrow P(x) < 0$. No sirve

3.er intervalo:

Para $5 < x \Rightarrow P(x) > 0$. $S_2 =]5, +\infty[$

SOLUCIÓN: **$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2[\; \cup \;]5, +\infty[$**

72. RESOLUCIÓN

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \;;\; x_2 = 3$$

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2 < 0$$

No se cumple para ningún valor de x

SOLUCIÓN: **S = No tiene solución**

73. RESOLUCIÓN

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$P(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) > 0$$

1.er intervalo:

Para $x < -1 \Rightarrow P(x) > 0$; $S_1 =]-\infty, -1[$

2.º intervalo:

Para $-1 < x < 4 \Rightarrow P(x) < 0$. No sirve

3.er intervalo:

Para $x > 4 \Rightarrow P(x) > 0$. $S_2 =]4, +\infty[$

SOLUCIÓN: **$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -1[\, \cup \,]4, +\infty[$**

74. RESOLUCIÓN

$$3x^2 + 5x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 8 = 3(x - 1)\left(x + \frac{8}{3}\right) < 0$$

1.er intervalo:

Para $x < -\dfrac{8}{3} \Rightarrow P(x) > 0$. No sirve

2.º Intervalo:

Para $-\dfrac{8}{3} < x < 1 \Rightarrow P(x) < 0$. $S_1 = \left]-\dfrac{8}{3}, 1\right[$

3.er intervalo:

Para $x > 1 \Rightarrow P(x) > 0$. No sirve

SOLUCIÓN: **$S = \left]-\dfrac{8}{3}, 1\right[$**

75. RESOLUCIÓN

I.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ 3x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Despejamos y de la 2.ª ecuación: $y = 3x - 3$ (1)

Sustituimos y en la 1.ª ecuación:

$$x + 2(3x - 3) = 8 \Leftrightarrow x + 6x - 6 = 8 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$$

Sustituyendo este valor en (1), resulta:

$$y = 3x - 3 = 3 \cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3$$

SOLUCIÓN: I **$x = 2 \;;\; y = 3$**

II.

$$\left.\begin{aligned} 4x - 2y &= 8 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

De la 1.ª ecuación despejamos:

$$y = 2x - 4$$

Este valor lo sustituimos en la 2.ª ecuación, resulta:

$$3x + 2x - 4 = 1 \Leftrightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

luego:

$$y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

SOLUCIÓN II: **$x = 1 \;;\; y = -2$**

76. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} (1)\; & x - y = 3 \\ (2)\; & \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{De (1): } y = x - 3 \quad (3) \\ &\text{Sustituyendo en (2):} \end{aligned}$$

$$2x - 3(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

Para hallar y, se sustituye este valor de x en (3):

$$y = x - 3 = 9 - 3 = 6$$

SOLUCIÓN: **$x = 9 \;;\; y = 6$**

77. RESOLUCIÓN

I.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x + y}{3} &= 9 + \frac{x - y}{2} \\ \frac{x}{2} - 5 &= -\frac{x + y}{9} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2(x + y) &= 54 + 3(x - y) \\ 9x - 90 &= -2(x + y) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -x + 5y &= 54 \\ 11x + 2y &= 90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 5y - 54$$

Sustituyendo este valor de x en la otra ecuación, resulta:

$$11(5y - 54) + 2y = 90$$

$$55y - 594 + 2y = 90$$

$$57y = 684 \Rightarrow y = 12$$

luego:

$$x = 5 \cdot 12 - 54 = 60 - 54 = 6$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x = 6 \ ; \ y = 12}$

II. $\left.\begin{array}{l} (1)\ \dfrac{y}{4} - \dfrac{x}{7} = \dfrac{29}{28} \\ (2)\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{7} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 7y - 4x = 29 \\ 7x - 4y = 7 \end{array}\right\}$

Despejamos y de (1): $y = \dfrac{29 + 4x}{7}$

Sustituimos este valor de y en (2): $7x - \dfrac{4(29 + 4x)}{7} = 7$

Efectuando operaciones resulta:

$$49x - 116 - 16x = 49$$
$$33x = 165$$
$$x = 5$$

Para hallar y se sustituye $x = 5$ *en:*

$$y = \frac{29 + 4x}{7} = \frac{29 + 20}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{x = 5 \ ; \ y = 7}$

78. RESOLUCIÓN

I.

$\left.\begin{array}{l} (1)\ \ 3x + 7y = 29 \\ (2)\ \ 8x - 9y = 22 \end{array}\right|$ *Despejamos y en (1) y (2):* $y = \dfrac{29 - 3x}{7}$; $y = \dfrac{8x - 22}{9}$

Igualamos ambos valores:

$$\frac{29 - 3x}{7} = \frac{8x - 22}{9}$$
$$261 - 27x = 56x - 154$$
$$415 = 83x \Rightarrow x = 5$$

Sustituyendo $x = 5$ *en (1) por ejemplo, resulta:*

$$3 \cdot 5 + 7y = 29 \Rightarrow y = \frac{29 - 15}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x = 5 \ ; \ y = 2}$

II.

$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3x}{4} = 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{array}\right|$ *Despejamos x de ambas ecuaciones:*

$\left.\begin{array}{l} x = 1 + y; \\ x = \dfrac{100 - 15y}{8} \end{array}\right\}$ *Igualando estas expresiones, resulta:*

$$1 + y = \frac{100 - 15y}{8}$$
$$8 + 8y = 100 - 15y$$
$$23y = 92 \Rightarrow y = 4$$

Llevando este valor de $y = 4$ *a la primera ecuación, resulta:*

$$x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{x = 5 \ ; \ y = 4}$

79. RESOLUCIÓN

I. $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ \dfrac{3x}{4} - y = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y = 8 \end{array}\right|$ *Despejamos x en ambas ecuaciones:*

$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3y \\ x = \dfrac{8 + 4y}{3} \end{array}\right\}$ *Igualando ambas expresiones:* $1 + 3y = \dfrac{8 + 4y}{3}$

$$3 + 9y = 8 + 4y$$
$$5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

Sustituyendo $y = 1$ *en la 1.ª ecuación:* $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x = 4 \ ; \ y = 1}$

II. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x + 1} = 4 \\ \dfrac{y + 1}{x} = 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 4x + 4 \\ y + 1 = 5x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x - y = -4 \\ 5x - y = 1 \end{array}\right\}$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + 4 \\ y = 5x - 1 \end{array}\right|$$

Igualando ambas expresiones:

$$4x + 4 = 5x - 1$$
$$x = 5$$

Llevando $x = 5$ *a la 2.ª ecuación, resulta:*

$$\frac{y + 1}{5} = 5 \Rightarrow y + 1 = 25 \Rightarrow y = 24$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{x = 5 \ ; \ y = 24}$

80. RESOLUCIÓN

I. $\left.\begin{array}{l} (1)\ 3x + 2y = 7 \\ (2)\ 4x - 5y = -6 \end{array}\right|$

Multiplicando la 1.ª ecuación por 4 y la 2.ª ecuación por 3, para igualar los coeficientes de x:

$$\left.\begin{array}{l} 12x + 8y = 28 \\ 12x - 15y = -18 \end{array}\right|$$

Restando estas dos ecuaciones, resulta:

$$(12x + 8y) - (12x - 15y) = 28 - (-18)$$
$$12x + 8y - 12x + 15y = 28 + 18$$
$$23y = 46 \Rightarrow y = 2$$

Sustituyendo $y = 2$ *en una de las ecuaciones del sistema, tenemos:*

$$4x - 5 \cdot 2 = -6 \Rightarrow 4x = 10 - 6 = 4 \Rightarrow x = 1$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x = 1 \ ; \ y = 2}$

II. $\left.\begin{array}{l} (1)\ \ 5x - 3y = 7 \\ (2)\ 2x + 7y = 11 \end{array}\right|$

Multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª ecuación por 5, para igualar los coeficientes de x:

$$\left.\begin{array}{l} 10x - 6y = 14 \\ 10x + 35y = 55 \end{array}\right|$$

Restando ambas ecuaciones, resulta:

$$-41y = -41 \Rightarrow y = 1$$

Llevando este valor de $y = 1$ *a la 1.ª ecuación, se tiene:*

$$5x - 3 = 7 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{x = 2 \ ; \ y = 1}$

81. RESOLUCIÓN

I. $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 5 \\ 3y - 2x = 11 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} 5x - y = 5 \\ -2x + 3y = 11 \end{array}$

Multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª ecuación por 5, para igualar los coeficientes de x:

$$\left.\begin{array}{l} 10x - 2y = 10 \\ -10x + 15y = 55 \end{array}\right|$$

Sumando ambas ecuaciones, resulta:

$$-2y + 15y = 65 \Rightarrow 13y = 65 \Rightarrow y = 5$$

Sustituyendo este valor de $y = 5$ *en la 1.ª ecuación dada, se tiene:*

$$5x - 5 = 5 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{x = 2 \ ; \ y = 5}$

II. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x}{6} - \dfrac{3y}{7} = 2 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{7} = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 35x - 18y = 84 \\ 7x - 2y = 28 \end{array}\right\}$

Multiplicando la 2.ª ecuación por 5, para igualar los coeficientes de x:

$$\left.\begin{array}{l} 35x - 18y = 84 \\ 35x - 10y = 140 \end{array}\right|$$

Restando ambas ecuaciones:

$$-18y + 10y = 84 - 140$$
$$-8y = -56$$
$$y = 7$$

Sustituyendo y = 7 en la 1.ª ecuación, resulta:

$$\frac{5x}{6} - 3 = 2 \Rightarrow \frac{5x}{6} = 5 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$$

SOLUCIÓN II: **x = 6 ; y = 7**

82. RESOLUCIÓN

Sumando ambas ecuaciones:

I. $\left.\begin{matrix} 3x + 2y = 31 \\ 5x - 8y = -5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 12x + 8y = 124 \\ 5x - 8y = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 17x = 119 \Rightarrow x = 7$

Luego:

$$3 \cdot 7 + 2y = 31 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

SOLUCIÓN I: **x = 7 ; y = 5**

II. $\left.\begin{matrix} 5(x-2) = y + 2 \\ x + 5 = 3(y-5) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5x - y = 12 \\ x - 3y = -20 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5x - y = 12 \\ -5x + 15y = 100 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow 14y = 112 \Rightarrow y = 8$$

Luego:

$$x + 5 = 3\,(8 - 5) = 9 \Rightarrow x = 4$$

SOLUCIÓN II: **x = 4 ; y = 8**

III. *Se hace:* $\frac{1}{x} = t;\ \frac{1}{y} = z,$ *resultando:*

$$\left.\begin{matrix} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{10}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3t + z = \frac{3}{2} \\ 4t + 4z = \frac{10}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 6t + 2z = 3 \\ 12t + 12z = 10 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -12t - 4z = -6 \\ 12t + 12z = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8z = 4 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

Luego: $3t + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

Sustituyendo $z = \frac{1}{2};\ t = \frac{1}{3}$ *en las siguientes expresiones, resulta:*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3\ ;\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$$

SOLUCIÓN III: **x = 3 ; y = 2**

83. RESOLUCIÓN

I. $\frac{3}{6} = \frac{-7}{-14} = \frac{12}{24}$ Sistema compatible e indeterminado

II. $\frac{5}{10} = \frac{-10}{-20} \neq \frac{14}{23}$ Sistema incompatible

III. $\frac{6}{12} \neq \frac{-11}{22}$ Sistema compatible y determinado

84. RESOLUCIÓN

I. $\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{4}$ Sistema compatible y determinado

II. $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{7}{9}$ Sistema incompatible

III. $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{7}{14}$ Sistema compatible e indeterminado

85. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{matrix} (1)\ x - y - z = -3 \\ (2)\ x - 4y + 2z = 9 \\ (3)\ 2x - y + z = 3 \end{matrix}\right\}$$

Despejamos x de (1) y sustituimos dicho valor en (2) y (3):

$$x = y + z - 3$$

$$\left.\begin{matrix} (y + z - 3) - 4y + 2z = 9 \\ 2(y + z - 3) - y + z = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -3y + 3z = 12 \\ y + 3z = 9 \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$$y = -\frac{3}{4};\ z = \frac{13}{4}$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$x = -\frac{3}{4} + \frac{13}{4} - 3 = -\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = -\frac{1}{2}\ ;\ y = -\frac{3}{4}\ ;\ z = \frac{13}{4}}$

86. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{matrix} (1)\ x + y + 2z = 2 \\ (2)\ x - y - z = -\frac{1}{2} \\ (3)\ x - 2y + 4z = -5 \end{matrix}\right\}$$

Restando $\left\{\begin{matrix} (1)\ y\ (2) \\ (1)\ y\ (3) \end{matrix}\right.$ *resultando:* $\left.\begin{matrix} 2y + 3z = \frac{5}{2} \\ 3y - 2z = 7 \end{matrix}\right\}$

Resolviendo este sistema, resulta:

$$y = 2\ ;\ z = -\frac{1}{2}$$

Sustituidos estos valores de $y = 2\ ;\ z = -\frac{1}{2}$ *en (1), resulta:*

$$x + 2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow x = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 1\ ;\ y = 2\ ;\ z = -\frac{1}{2}}$

87. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{matrix} (1)\ 3x + 2y + z = 6 \\ (2)\ x + y - z = 1 \\ (3)\ x + 2y - 3z = 0 \end{matrix}\right\}$$

Despejamos z de (1): $z = 6 - 3x - 2y$

Sustituimos este valor en (2) y (3), resultando:

$$\left.\begin{matrix} x + y - (6 - 3x - 2y) = 1 \\ x + 2y - 3(6 - 3x - 2y) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 4x + 3y = 7 \\ 10x + 8y = 18 \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene: $x = 1;\ y = 1$

Llevando estos valores de $x = 1;\ y = 1$ *a la (1), resulta:*

$$z = 6 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$$

SOLUCIÓN: **x = 1 ; y = 1 ; z = 1**

88. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{matrix} (1)\ x + z = 6 \\ (2)\ y + z = 8 \\ (3)\ x + y = 12 \end{matrix}\right\}$$

Restando (1) y (2) resulta: $x - y = -2$

De donde, $x = y - 2$

Sustituimos $x = y - 2$ *en la (3), resultando:*

$$y - 2 + y = 12 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$$

Se lleva este valor de y a la (3):

$$x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$$

Sustituyendo este valor de $x = 5$ *en (1), se tiene:*

$$5 + z = 6 \Rightarrow z = 1$$

SOLUCIÓN: **x = 5 ; y = 7 ; z = 1**

89. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{matrix} (1)\ x^2 - 2y^2 + 2y - 1 = 0 \\ (2)\ x - y = 1 \end{matrix}\right\}$$

Despejamos x de (2): $x = y + 1$

Sustituyendo este valor de $x = y + 1$ en (1), resulta:

$$(y + 1)^2 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$y^2 + 1 + 2y - 2y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow -y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(y - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ó \\ y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $y_1 = 0; y_2 = 4$

Sustituyendo estos dos valores en (2), resulta:

$$x_1 = y_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$x_2 = y_2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 1$; $y_1 = 0$**
2.ª $x_2 = 5$; $y_2 = 4$

90. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & xy = 12 \\ (2) & x - y = 1\end{array}\right\}$$

Despejamos x de (2): $x = 1 + y$

Sustituyendo este valor de $x = 1 + y$ en (1), resulta:

$$(1 + y)y = 12 \Leftrightarrow y + y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Luego:

$$y_1 = 3 \ ; \ y_2 = -4$$

Sustituyendo estos dos valores en (2), se tiene:

$$x_1 = 1 + y_1 = 1 + 3 = 4$$
$$x_2 = 1 + y_2 = 1 - 4 = -3$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 4$; $y_1 = 3$**
2.ª $x_2 = -3$; $y_2 = -4$

91. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2 + y^2 = 8 \\ (2) & x - y = 0\end{array}\right\}$$

Despejamos x de (2): $x = y$

Sustituimos este valor en (1):

$$y^2 + y^2 = 8 \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = \pm 2$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = 2 \ ; \ y_2 = -2$$

Llevando estos dos valores a (2), resulta:

$$x_1 = y_1 = 2 \ ; \ x_2 = y_2 = -2$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 2$; $y_1 = 2$**
2.ª $x_2 = -2$; $y_2 = -2$

92. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & xy = 6 \\ (2) & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}\end{array}\right\}$$

Despejamos $\frac{1}{y}$ de (2): $\frac{1}{y} = \frac{5}{6} - \frac{1}{x}$

Sustituyendo este valor en (1), resulta:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{6x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{m.c.m.} = 6x^2$$

$$5x - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Luego:

$$x_1 = 3 \ ; \ x_2 = 2$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$x_1 \cdot y_1 = 6 \Leftrightarrow 3 \cdot y_1 = 6 \Rightarrow y_1 = 2$$
$$x_2 \cdot y_2 = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot y_2 = 6 \Rightarrow y_2 = 3$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 3$; $y_1 = 2$**
2.ª $x_2 = 2$; $y_2 = 3$

93. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l}y^2 + xy = 5 \\ x^2 + xy = 20\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1) \\ (2)\end{array}$$ Despejamos y de (2): $y = \frac{20 - x^2}{x}$

Sustituimos este valor en (1):

$$\left(\frac{20 - x^2}{x}\right)^2 + x \cdot \frac{20 - x^2}{x} = 5$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$25x^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Luego:

$$x_1 = 4; x_2 = -4$$

Sustituyendo estos valores en $y = \frac{20 - x^2}{x}$, resulta:

$$y_1 = \frac{20 - x_1^2}{x_1} = \frac{20 - 16}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{20 - x_2^2}{x_2} = \frac{20 - 16}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 4$; $y_1 = 1$**
2.ª $x_2 = -4$; $y_2 = -1$

94. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x - y = 10 + \sqrt{xy} \\ (2) & xy = 36\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x - y = 10 + \sqrt{36} \\ xy = 36\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x - y = 16 \\ xy = 36\end{array}\right\}$$

Despejamos x de (1): $x = 16 + y$

Sustituimos este valor en (2):

$$(16 + y)y = 36$$

$$16y + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 + 16y - 36 = 0$$

$$y = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 144}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2} =$$

$$= \frac{-16 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-36}{2} = -18 \end{cases}$$

Luego:

$$y_1 = 2 \ ; \ y_2 = -18$$

Llevando estos valores a la ecuación $x = 16 + y$, resulta:

$$x_1 = 16 + y_1 = 16 + 2 = 18$$
$$x_2 = 16 + y_2 = 16 - 18 = -2$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 18$; $y_1 = 2$**
2.ª $x_2 = -2$; $y_2 = -18$

95. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número pedido.

Número más 5 unidades: $x + 5$

Triplo del número menos 3 unidades: $3x - 3$

Luego habrá de ser:

$$x + 5 = 3x - 3$$

Que es la ecuación pedida.

RESOLUCIÓN:

$$x + 5 = 3x - 3 \Leftrightarrow 5 + 3 = 3x - x \Leftrightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 4$ *en la ecuación* $x + 5 = 3x - 3$ *se verifica:*

$$4 + 5 = 3 \cdot 4 - 3 \Leftrightarrow 9 = 9$$

el triplo de 4 es $4 \cdot 3 = 12$*, y si a este número se le resta 3 unidades, queda* $12 - 3 = 9$

SOLUCIÓN: **x = 4**

96. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número buscado

Su doble será: $2x$

Su tercera parte: $\frac{x}{3}$

Luego:

$$x + 2x + \frac{x}{3} = 40 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$3x + 6x + x = 120 \Rightarrow 10x = 120 \Rightarrow x = 12$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo este valor de $x = 12$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$12 + 2 \cdot 12 + \frac{12}{3} = 12 + 24 + 4 = 0$$

SOLUCIÓN: **x = 12**

97. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de años pedidos.

Dentro de x años el padre tendrá: $47 + x$.

Dentro de x años el hijo tendrá: $13 + x$.

Luego, habrá de ser:

$$47 + x = 3(13 + x) \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$47 + x = 39 + 3x \Leftrightarrow 47 - 39 = 3x - x \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo el valor de $x = 4$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$47 + 4 = 3(13 + 4) \Leftrightarrow 51 = 51$$

SOLUCIÓN: **x = 4**

98. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de hombres.

El número de mujeres será: $3x$

Luego:

$$x + 3x = 100 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$4x = 100 \Rightarrow x = 25$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo este valor de $x = 25$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$25 + 3 \cdot 25 = 25 + 75 = 100$$

SOLUCIÓN: **El número de hombres: x = 25**
El número de mujeres: 3x = 75

99. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea $x - 1$ *el menor de los números pedidos.*

El siguiente será: x.

El siguiente a éste será: $x + 1$

Luego:

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 180 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$x - 1 + x + x + 1 = 180 \Leftrightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 60$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$(60 - 1) + 60 + (60 + 1) = 59 + 60 + 61 = 180$$

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 59, 60 y 61**

100. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número pedido.

Sumando x al numerador y denominador de la fracción dada, resulta:

$$\frac{33 + x}{40 + x}$$

La ecuación que resulta será:

$$\frac{33 + x}{40 + x} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$99 + 3x = 80 + 2x \Leftrightarrow 99 - 80 = 2x - 3x \Rightarrow x = -19$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = -19$ *en la ecuación (1), resulta:*

$\frac{33 + (-19)}{40 + (-19)} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$*, que satisface a la ecuación, pero no al problema.*

SOLUCIÓN: **No tiene solución**

101. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de billetes de 1 000 pts.

El número de billetes de 200 pts. será: $90 - x$

Luego la ecuación será:

$$1\,000x + 200(90 - x) = 46\,800 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$1\,000x + 18\,000 - 200x = 46\,800$$

$$800x = 28\,800 \Rightarrow x = 36$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 36$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$1\,000 \cdot 36 + 200(90 - 36) = 36\,000 + 10\,800 = 46\,800$$

SOLUCIÓN: **Hay 36 billetes de 1 000 pts.**
y 54 billetes de 200 pts.

102. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la cantidad de vino que tenía cada tonel.

Del 1.^er tonel se sacan 200 l, luego quedan: $x - 200$

Del 2.º tonel se sacan 900 l, luego quedan: $x - 900$

La ecuación será:

$$(x - 200) = 2(x - 900) \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$x - 200 = 2x - 1\,800 \Rightarrow x = 1\,600 \text{ l}$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 1\,600$ *en la ecuación (1), resulta:*

$$(1\,600 - 200) = 2(1\,600 - 900) \Leftrightarrow 1\,400 = 1\,400$$

SOLUCIÓN: **1 400 l y 700 l**

103. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de billetes de cada uno:

El 1.º tiene: $1\,000x$

El 2.º tiene: $500x$

El 3.º tiene: $200x$

La ecuación será:

$$1\,000x + 500x + 200x = 102\,000$$

RESOLUCIÓN:

$$1\,700x = 102\,000 \Rightarrow x = 60$$

DISCUSIÓN:

$$1\,000 \cdot 60 + 500 \cdot 60 + 200 \cdot 60 = 102\,000$$

SOLUCIÓN: **La 1.ª persona tiene: 1 000 · 60 = 60.000 pts.**
La 2.ª persona tiene: 500 · 60 = 30.000 pts.
La 3.ª persona tiene: 200 · 60 = 12.000 pts.

104. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de hojas arrancadas.

El año bisiesto tiene 366 días.

La ecuación será:

$$x = \frac{5}{9}(366 - x) + 2 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$9x = 1\,830 - 5x + 18$$

$$14x = 1\,848 \Rightarrow x = 132 \text{ días}$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo x = 132 en (1), resulta:

$$132 = \frac{5}{9}(366 - 132) + 2 = \frac{1\,170}{9} + 2 = 132$$

SOLUCIÓN: **El calendario marcará el 11 de mayo**

105. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de páginas del libro:

He leído $\frac{x - 240}{x}$

Me quedan por leer los $\frac{3}{7}$

La ecuación será:

$$\frac{x - 240}{x} = \frac{3}{7} \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$7x - 1\,680 = 3x$$

$$4x = 1\,680 \Rightarrow x = 420$$

Me quedan por leer:

$$420 - 350 = 70 \text{ páginas}$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo x = 70 en (1), resulta:

$$\frac{420 - 240}{420} = \frac{180}{420} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

SOLUCIÓN: $\frac{70}{420} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$ **del libro**

106. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el capital de dichas personas:

La renta de la 1.ª persona será: $\frac{10x}{100}$

La renta de la 2.ª persona será: $\frac{6x}{100}$

La ecuación se verificará cuando:

$$\frac{10x}{100} - \frac{6x}{100} = 40\,000 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$10x - 6x = 4\,000\,000$$

$$4x = 4\,000\,000 \Rightarrow x = 1\,000\,000 \text{ pts.}$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo este valor de x en (1), resulta:

$$\frac{10 \cdot 1\,000\,000}{100} - \frac{6 \cdot 1\,000\,000}{100} = 40\,000$$

SOLUCIÓN: **El capital de cada persona es de 1 000 000 pts.**

107. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el capital social:

La 1.ª persona aportó: $\frac{2x}{5}$

La 2.ª persona aportó: $\frac{x}{3}$

La 3.ª persona aportó: 2 000 000

La ecuación será: $\frac{2x}{5} + \frac{x}{3} + 2\,000\,000 = x$

RESOLUCIÓN:

$$6x + 5x + 30\,000\,000 = 15x \Rightarrow x = 7\,500\,000$$

DISCUSIÓN:

$$\frac{2 \cdot 7\,500\,000}{5} + \frac{7\,500\,000}{3} + 2\,000\,000 = 7\,500\,000$$

SOLUCIÓN: **Capital social: 7 500 000 pts.**
Parte del 1.º: 3 000 000 pts.
Parte del 2.º: 2 500 000 pts.
Parte del 3.º: 2 000 000 pts.

108. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x uno de los factores.

El otro factor será: 91 − x

Al 1.er factor se le aumenta 5 unidades: x + 5

Al 2.º factor se le disminuye 2 unidades: 89 − x

La ecuación será:

$$(x + 5)(89 - x) = (91 - x)x + 67$$

RESOLUCIÓN:

$$89x - x^2 + 445 - 5x = 91x - x^2 + 67 \Rightarrow 378 = 7x \Rightarrow x = 54$$

DISCUSIÓN:

$$(54 + 5)(89 - 54) = (91 - 54)54 + 67 = 2\,065$$

SOLUCIÓN: **El multiplicando: 54**
El multiplicador: 37

109. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de problemas que resolvió bien el hijo.

El número de problemas que no supo resolver será:

$$5 \cdot 15 - x = 75 - x$$

El padre le abona: 75x

El hijo le abona: (75 − x)60

La ecuación será:

$$75x - (75 - x)60 = 2\,250 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$75x - 4\,500 + 60x = 2\,250$$

$$135x = 6\,750 \Rightarrow x = 50$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo x = 50 en (1), resulta:

$$75 \cdot 50 - 4\,500 + 60 \cdot 50 = 2\,250$$

SOLUCIÓN: **El hijo resolvió bien 50 problemas**

110. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de gallinas.

El número de conejos será: 114 − x

Las gallinas tienen dos patas: $2x$

Los conejos tienen cuatro patas: $4(114 - x)$

La ecuación será:

$$2x + 4(114 - x) = 336 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$2x + 456 - 4x = 336$$

$$456 - 336 = 2x \Rightarrow 2x = 120 \Rightarrow x = 60$$

DISCUSIÓN:

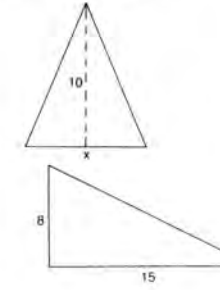
Sustituyendo $x = 60$ *en (1), resulta:*

$$120 + 4(114 - 60) = 336$$

SOLUCIÓN: **El n.º de gallinas es: 60**
El n.º de conejos es: 54

111. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:



Sea x la base del triángulo isósceles.

Su área: $S_1 = \dfrac{10 \cdot x}{2}$

El área del triángulo rectángulo es:

$$S_2 = \frac{15 \cdot 8}{2}$$

Por ser equivalentes su ecuación será:

$$\frac{10 \cdot x}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2}$$

RESOLUCIÓN:

$$10x = 15 \cdot 8 \Rightarrow 10x = 120 \Rightarrow x = 12$$

DISCUSIÓN:

$$S_1 = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60\,cm^2; \quad S_2 = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60\,cm^2$$

SOLUCIÓN: **La base del triángulo mide 12 cm**

112. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

El 1.er grifo en cada hora llenará: $\dfrac{1}{18}$ *del depósito.*

El 2.º grifo en cada hora llenará: $\dfrac{1}{12}$ *del depósito.*

Sea x el tiempo que tardan en llenarlo entre ambos grifos, en cada hora juntos tardarán $\dfrac{1}{x}$

La ecuación será:

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{x}$$

RESOLUCIÓN:

$$m.c.m.(18, 12, x) = 36x$$

Luego:

$$2x + 3x = 36 \Rightarrow 5x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7h\ 12'$$

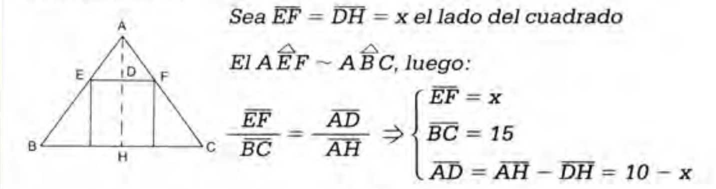
DISCUSIÓN:

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{2+3}{36} = \frac{5}{36} = \frac{1}{\frac{36}{5}}$$

SOLUCIÓN: **Tardarán en llenarlo 7 h 12'**

113. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:



Sea $\overline{EF} = \overline{DH} = x$ *el lado del cuadrado*

El $A\widehat{E}F \sim A\widehat{B}C$*, luego:*

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{EF} = x \\ \overline{BC} = 15 \\ \overline{AD} = \overline{AH} - \overline{DH} = 10 - x \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la proporción, resulta:

$$\frac{x}{15} = \frac{10 - x}{10} \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$10x = 15 \cdot 10 - 15x$$

$$10x = 150 - 15x \Rightarrow 25x = 150 \Rightarrow x = 6$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 6$ *en (1), resulta:*

$$\frac{6}{15} = \frac{10-6}{10} \Leftrightarrow \frac{6}{15} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow 60 = 60$$

SOLUCIÓN: **El cuadrado tiene de lado 6 cm**

114. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea xel número pedido:

Restando 2 a x, resulta: $x - 2$

La ecuación será:

$$x - 2 = 3(x - 10) \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$x - 2 = 3x - 30 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = 14$$

DISCUSIÓN:

El número 14 cumple la condición impuesta en el enunciado y satisface a la ecuación (1).

SOLUCIÓN: **El número pedido es: 14**

115. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de bancos.

La ecuación que se obtiene es:

$$2x + 3 = 39 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$2x + 3 = 39 \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$$

DISCUSIÓN:

El número 18 satisface a la ecuación (1) y cumple la condición impuesta en el enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **El número de bancos es: 18**

116. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la parte mayor y $2\,000 - x$ *la menor.*

La quinta parte de x será: $\dfrac{x}{5}$

La mitad de $2\,000 - x$ *será:* $\dfrac{2\,000 - x}{2}$

La ecuación que resulta es:

$$\frac{x}{5} - \frac{2\,000 - x}{2} = \frac{2\,000 - x}{10} \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$m.c.m.\ (5, 2, 10) = 10$$

$$2x - 5(2\,000 - x) = 2\,000 - x$$

$$2x - 10\,000 + 5x = 2\,000 - x \Rightarrow 8x = 12\,000 \Rightarrow x = 1\,500$$

La parte menor será:

$$2\,000 - 1\,500 = 500$$

DISCUSIÓN:

El valor $x = 1\,500$ satisface a (1) y al enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **La parte mayor es: 1 500**
La parte menor es: 500

117. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la edad del 3.er hijo.
La edad del 2.° hijo será: $x + 2$
La edad del 1.er hijo será: $x + 5$
La edad de la madre será: $x + (x + 2) + (x + 5)$
La edad del padre será: $x + (x + 2) + (x + 5) + 4$
La ecuación que resulta es:

$$x + (x + 2) + (x + 5) + [x + (x + 2) + (x + 5)] + [x + (x + 2) + (x + 5) + 4] = 142 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

Efectuando operaciones resulta:

$$9x + 25 = 142 \Rightarrow 9x = 117 \Rightarrow x = 13$$

DISCUSIÓN:

El valor $x = 13$ cumple la condición impuesta en el enunciado y satisface a la ecuación (1).

SOLUCIÓN: **Padre: 50 años; madre: 46 años; 1.er hijo: 18; 2.° hijo: 15 y 3.er hijo: 13**

118. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la longitud de la base.
La altura será: $\frac{3}{5}x$
La ecuación que resulta es:

$$320 = 2x + 2 \cdot \frac{3}{5}x$$

RESOLUCIÓN:

$$160 = x + \frac{3}{5}x \Rightarrow 800 = 5x + 3x \Rightarrow 800 = 8x \Rightarrow x = 100$$

DISCUSIÓN:

El valor $x = 100$ satisface al enunciado y a la ecuación.

SOLUCIÓN: **La base mide: x = 100 cm**
La altura mide: $\frac{3x}{5} = \frac{300}{5} = 60$ cm

119. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de docenas de huevos que compró.
La ecuación, según el enunciado, será:

$$150x = 180\left(x - \frac{1}{2}\right) - 720 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$150x = 180x - 90 - 720 \Rightarrow 810 = 30x \Rightarrow x = 27$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 27$ en (1) se satisface la ecuación y también el enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **Compró: 27 docenas de huevos**

120. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número que el niño ha olvidado.

La tercera parte del número es: $\frac{x}{3}$

La cuarta parte del número es: $\frac{x}{4}$

La ecuación será:

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8$$

RESOLUCIÓN:

$$4x - 3x = 96 \Rightarrow x = 96$$

DISCUSIÓN:

El número 96 satisface a la ecuación y al enunciado.

SOLUCIÓN: **El número es el 96**

121. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de naranjas.

Vende $\frac{x}{2} - 6$; le quedan : $x - \left(\frac{x}{2} - 6\right) = \frac{x}{2} + 6$

Vende $\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2} + 6\right) = \frac{x}{10} + \frac{6}{5}$; le quedan:

$$\left(\frac{x}{2} + 6\right) - \left(\frac{x}{10} + \frac{6}{5}\right) = \frac{2x}{5} + \frac{24}{5}$$

Vende $\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{5} + \frac{24}{5}\right) = \frac{3x}{10} + \frac{18}{5}$

La ecuación que resulta es:

$$\left(\frac{x}{2} - 6\right) + \left(\frac{x}{10} + \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{3x}{10} + \frac{18}{5}\right) + 12 = x \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$m.c.m. = 20$$
$$10x - 120 + 2x + 24 + 6x + 72 + 240 = 20x$$
$$2x = 216 \Rightarrow x = 108$$

DISCUSIÓN:

El valor $x = 108$ satisface a (1) y al enunciado.

SOLUCIÓN: **Tenía 108 naranjas**

122. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x uno de los números naturales pedidos.
El triplo menos 6 unidades será: $3x - 6$
El duplo más 5 unidades será: $2x + 5$
La inecuación que se obtiene será:

$$3x - 6 > 2x + 5$$

RESOLUCIÓN:

$$3x - 2x > 6 + 5 \Rightarrow x > 11$$

DISCUSIÓN:

Los números naturales mayores que 11 satisfacen al enunciado.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in N^* \, / \, x > 11\}}$

123. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Llamando x a uno de los números pedidos, se obtiene la siguiente inecuación:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} > 3$$

RESOLUCIÓN:

$$2x + x > 12 \Rightarrow 3x > 12 \Rightarrow x > 4$$

DISCUSIÓN:

Todos los números naturales mayores que 4 satisfacen el enunciado.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \{x \in N^* \, / \, x > 4\}}$

124. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x uno de los números enteros pedidos.
El triplo menos 5 unidades será: $3x - 5$
La inecuación que resulta es:

$$3x - 5 < 4$$

RESOLUCIÓN:

$$3x - 5 < 4 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3$$

DISCUSIÓN:

Los números enteros 2, 1, 0, −1, −2, −3..., satisfacen el enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **$S = \{x \in Z \ / \ x < 3\}$**

125. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número pedido.

El duplo más 3 unidades será: $2x + 3$

La inecuación será:

$$5 < 2x + 3 < 13$$

RESOLUCIÓN:

$$5 < 2x + 3 < 13 \Leftrightarrow 5 - 3 < 2x < 13 - 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < 5$$

DISCUSIÓN:

El valor de x estará en el intervalo abierto]1, 5[, puesto que para cualquier valor comprendido en dicho intervalo, por ejemplo:

$x = 2$, se verifica:

$$1 < 2x + 3 < 13 \Leftrightarrow 1 < 7 < 13$$

SOLUCIÓN: **$S = x \in \,]1,5[$**

126. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sean x los números pedidos.
Restándoles su cuádruplo de 3, será: $3 - 4x$.
La inecuación obtenida será:

$$3 - 4x < 15$$

RESOLUCIÓN:

$$3 - 4x < 15 \Rightarrow 3 - 15 < 4x \Rightarrow -12 < 4x \Rightarrow x > -3$$

DISCUSIÓN:

Todos los números reales mayores que −3 satisfacen al enunciado del problema, por ejemplo:

para $x = 5$, resulta:

$$3 - 4 \cdot 5 = 3 - 20 = -17 < 15$$

SOLUCIÓN: **$S = \{x \in R \ / \ x > -3\}$**

127. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x uno de los números racionales.

Si le sumamos 2 y después lo dividimos por 3, resulta:

$$\frac{x+2}{3}$$

La inecuación será:

$$\frac{x+2}{3} < 4$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{x+2}{3} < 4 \Rightarrow x + 2 < 12 \Rightarrow x < 10$$

DISCUSIÓN:

Todo número menor que 10 satisface la inecuación propuesta.

SOLUCIÓN: **$S = \{x \in Q \ / \ x < 10\}$**

128. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número racional pedido.

Su triplo más 4 unidades será: $3x + 4$

La inecuación será:

$$3x + 4 > 6$$

RESOLUCIÓN:

$$3x + 4 > 6 \Rightarrow 3x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

DISCUSIÓN:

Todo número racional mayor que $\frac{2}{3}$ satisface la inecuación.

SOLUCIÓN: **$S = \left\{ x \in Q \ / \ x > \frac{2}{3} \right\}$**

129. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número racional pedido.

Su quinta parte menos 10, será: $\frac{x}{5} - 10$

Su cuarta parte más 6 será: $\frac{x}{4} + 6$

La inecuación que se obtiene será:

$$\frac{x}{5} - 10 > \frac{x}{4} + 6$$

RESOLUCIÓN:

$$m.c.m.(5, 4) = 20$$
$$4x - 200 > 5x + 120$$
$$-320 > x$$

DISCUSIÓN:

Cualquier número racional menor que −320 satisface a la inecuación.

SOLUCIÓN: **$S = \{x \in Q \ / \ x < -320\}$**

130. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número buscado.

Su cuadrado será: x^2 y su triplo: $3x$

La ecuación será:

$$x^2 + 3x = 40 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{-16}{2} = -8 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

El valor $x = 5$ satisface a la ecuación (1):

$25 + 15 = 40$ y también $x = -8$, pues $64 - 24 = 40$

SOLUCIÓN: **$x_1 = 5 \ ; \ x_2 = -8$**

131. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el menor de los números.

El mayor será: $x + 4$

La ecuación que se obtiene será:

$$x(x + 4) = 12$$

RESOLUCIÓN:

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -6. \text{ No sirve} \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 2$ se satisfacen las condiciones del problema y resulta:

$$2(2 + 4) = 12$$

SOLUCIÓN: **El número menor es: 2**
El número mayor es: 6

132. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número pedido.

Si le sumamos 5 unidades será: $x + 5$

Si le restamos 5 unidades será: $x - 5$

La ecuación será:

$$(x + 5)(x - 5) = 144 \ (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$x^2 - 25 = 144 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = \pm\sqrt{169} = \pm 13$$

DISCUSIÓN:

El valor que satisface a la ecuación (1) y al enunciado del problema es:

$$x = 13$$

SOLUCIÓN: **x = 13**

133. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea el producto $x_1 \cdot x_2 = 864$

Sea la suma $x_1 + x_2 = 60$

La ecuación que resulta es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 60x + 864 = 0$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtiene:

$$x_1 = 36 \ ; \ x_2 = 24$$

DISCUSIÓN:

Los números 36 y 24 satisfacen al problema.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 36 \ ; \ x_2 = 24}$

134. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x una de las partes, la otra será (16 – x)

Su ecuación será:

$$x(16 - x) = 60 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$16x - x^2 = 60 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

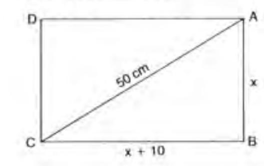
DISCUSIÓN:

Los valores $x_1 = 6 \ ; \ x_2 = 10$ *satisfacen a la ecuación (1).*

SOLUCIÓN: **Las partes son 6 y 10**

135. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:



Sea x la altura del rectángulo.

La base será: $x + 10$

En el triángulo $A\widehat{B}C$ *se verifica:*

$$(x + 10)^2 + x^2 = 50^2 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$2x^2 + 100 + 20x = 2\,500 \Rightarrow 2x^2 + 20x - 2\,400 = 0$$

Cuyas raíces son: $x_1 = 30$ y $x_2 = -40$, que no sirve.

DISCUSIÓN:

Sustituyendo $x = 30$ *en (1), resulta:*

$(30 + 10)^2 + 30^2 = 2\,500$, *por tanto se satisface a la ecuación y al enunciado del problema.*

SOLUCIÓN: **La altura mide: 30 cm**
La base mide: 40 cm

136. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la longitud de un lado.

La del otro lado será $\frac{30}{2} - x = 15 - x$

La ecuación será:

$$S = x\,(15 - x) = 56 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$15x - x^2 = 56 \Rightarrow x^2 - 15x + 56 = 0$$

Resolviendo la ecuación resulta:

$$x_1 = 7 \ ; \ x_2 = 8$$

DISCUSIÓN:

Las dos soluciones satisfacen a la ecuación (1) y al enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **Las longitudes de sus lados son: 7 y 8**

137. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Designamos por x, y x – 1 ambos números naturales positivos consecutivos:

La ecuación será: $x^3 - (x - 1)^3 = 2\,107$

RESOLUCIÓN:

$$x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2\,107$$

$$x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 2\,107 = 0$$

$$3x^2 - 3x - 2\,106 = 0$$

$$x^2 - x - 702 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 27 \\ x_2 = -26 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

Solamente satisface al enunciado del problema $x_1 = 27$

SOLUCIÓN: **Los números naturales consecutivos son: 26 y 27**

138. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Siendo $x - 1$, x, $x + 1$ *los tres números naturales consecutivos, resulta que su ecuación será:*

$$(x - 1)x(x + 1) = 8(x - 1 + x + x + 1)$$

RESOLUCIÓN:

$$(x^2 - 1)x = 8\,(3x)$$

$$(x^2 - 1)x - 24x = 0 \Rightarrow x\,(x^2 - 25) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = \pm 5 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

La única solución que satisface al problema es $x = 5$

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 4, 5, y 6**

139. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sean x y 7 – x los números pedidos.

Sus inversos serán: $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{7 - x}$

La suma de sus inversos da lugar a la ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{7 - x} = \frac{7}{12}$$

RESOLUCIÓN:

Efectuando operaciones, resulta:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

Las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$ *satisfacen al enunciado del problema.*

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 3 y 4**

140. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número pedido.

Quitándole 60 unidades a su cuadrado será: $x^2 - 60$

Quitándole al número pedido 4 unidades: $x - 4$

La ecuación será:

$$x^2 - 60 = x - 4 \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

$$x^2 - x - 56 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

Las dos soluciones satisfacen a la ecuación (1) y al enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **Los números son: 8 y −7**

141. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de horas que tarda el caño de mayor caudal.

El otro tardará: $x + 5$ *horas.*

El 1.° lo llenará por hora en $\frac{1}{x}$

El 2.° lo llenará por hora en $\frac{1}{x+5}$

La ecuación que resulta es:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

RESOLUCIÓN:

Efectuando operaciones, resulta:

$$x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

El valor $x_2 = -3$ *carece de interpretación física y por tanto debe desecharse.*

SOLUCIÓN: **El 1.er caño tardará: 10 horas**
El 2.° caño tardará: 15 horas

142. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de hijos.

A cada hijo le corresponde: $\frac{3\,600}{x}$

Si fuesen 3 hijos menos les corresponderían: $\frac{3\,600}{x-3}$

La ecuación que resulta es:

$$\frac{3\,600}{x-3} - \frac{3\,600}{x} = 200$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo la ecuación, resulta:

$$x^2 - 3x - 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

La solución $x = -6$ *no tiene sentido.*

SOLUCIÓN: **El número de hijos es 9**

143. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el menor de los tres números consecutivos enteros y positivos, los otros dos serán $(x + 1)$ *y* $(x + 2)$.

La ecuación será:

$$x(x + 1)(x + 2) = 15(x + 1)$$

RESOLUCIÓN:

La ecuación queda reducida a:

$$x(x + 2) = 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

El número −5 no sirve por ser un número entero negativo.

SOLUCIÓN: **Los números pedidos son: 3, 4 y 5**

144. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de empleados.

Sea y el número de pts. que repartió.

El sistema que se forma es:

$$\left.\begin{aligned} 5\,000x + 2\,500 = y \\ 5\,500x - 1\,000 = y \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x = 7 \;;\; y = 37\,500$$

DISCUSIÓN:

Los valores $x = 7$ *e* $y = 37\,500$ *satisfacen al sistema y al enunciado del problema.*

SOLUCIÓN: **El número de empleados: 7**
La cantidad que repartió era: 37 500 pts.

145. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de días que tardaría Santiago si trabajara solo, y $x + 6$ *el número de días que tardaría Manuel si trabajara solo.*

Cada día de trabajo Santiago realiza $\frac{1}{x}$ *del trabajo total, que representamos por 1, y Manuel* $\frac{1}{x+6}$.

La ecuación que resulta, según el enunciado del problema, es:

$$\frac{12}{x} + \frac{15}{x+6} = 1$$

RESOLUCIÓN:

Efectuando operaciones, resulta:

$$x^2 - 21x - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

El valor $x_2 = -3$ *no es admisible.*

SOLUCIÓN: **Manuel tardaría 30 días y Santiago 24**

146. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de alumnos que van en el 1.er autocar.

Sea y el número de alumnos que van el el 2.° autocar.

El sistema que resulta será:

$$\left.\begin{aligned} x - 6 = y + 6 \\ x + 6 = 2(y - 6) \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta: $x = 42$; $y = 30$

DISCUSIÓN:

Los valores $x = 42$ *e* $y = 30$ *satisfacen al sistema y al enunciado del problema.*

SOLUCIÓN: **En el 1.er autocar van 42 alumnos**
En el 2.° autocar van 30 alumnos

147. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la cifra de las unidades.

Sea y la cifra de las decenas.

El sistema que se obtiene, según el enunciado del problema será:

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{y}{2} = 8 \\ y - \frac{x}{2} = 2 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta: $x = 12;\ y = 8$

DISCUSIÓN:

La solución no satisface al problema, porque no hay ninguna cifra que sea mayor que 9.

SOLUCIÓN: **El problema no tiene solución**

148. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea xy el número de dos cifras pedido, siendo x la cifra de las decenas e y la de las unidades.

El número pedido tendrá: $10x + y$ *unidades.*

Al invertirlo sus unidades serán: $10y + x$

El sistema que resulta será:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 10x + y - (10y + x) &= 27 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x = 6;\ y = 3$$

DISCUSIÓN:

Los valores $x = 6$ *e* $y = 3$ *satisfacen al sistema.*

SOLUCIÓN: **El número pedido es el 63**

149. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el precio del kg de cacao.

Sea y el precio del kg de café.

El sistema que se obtiene es:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 3\,450 \\ 2x + y &= 2\,000 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x = 550 \text{ e } y = 900$$

DISCUSIÓN:

Estos valores satisfacen al sistema y al enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **El kg de cacao costó 550 pts.**
El kg de café costó 900 pts.

150. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x una parte e y la otra.

La suma será: $x + y = 20$

Los segmentos x e y forman la proporción: $\frac{x}{4} = \frac{y}{6}$

El sistema formado será:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ \frac{x}{4} &= \frac{y}{6} \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x = 8\ ;\ y = 12$$

DISCUSIÓN:

Los segmentos $x = 8$ *e* $y = 12$ *satisfacen al sistema y al enunciado del problema.*

SOLUCIÓN: **x = 8 cm ; y = 12 cm**

151. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x el número de monedas de 5 pts.

Sea y el número de monedas de 25 pts.

La ecuación que se obtiene será:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 64 \\ 5x + 25y &= 1\,000 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x = 30 \text{ e } y = 34$$

DISCUSIÓN:

Los valores $x = 30$ *e* $y = 34$ *satisfacen al sistema y al enunciado del problema.*

SOLUCIÓN: **Hay 30 monedas de 5 pts.**
Hay 34 monedas de 25 pts.

152. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sean x e y los números pedidos.

Su diferencia es: $x - y = 13$.

La suma de sus cuadrados es: $x^2 + y^2 = 349$.

El sistema que se obtiene es:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 13 \\ x^2 + y^2 &= 349 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x_1 = 18 \text{ e } y_1 = 5;\ x_2 = -5 \text{ e } y_2 = -18$$

DISCUSIÓN:

Las dos soluciones satisfacen el enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **1.ª $x_1 = 18$; $y_1 = 5$**
2.ª $x_2 = -5$; $y_2 = -18$

153. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sea x la longitud e y la anchura del campo.

El área será: xy

Si el largo y ancho aumentaran en 10 y 5 m, resulta: $(x + 10)(y + 5)$.

Si el largo y ancho disminuyesen en 20 y 8 m, resulta: $(x - 20)(y - 8)$.

El sistema según las condiciones del enunciado será:

$$\left.\begin{aligned} (x + 10)(y + 5) - xy &= 2\,100 \\ xy - (x - 20)(y - 8) &= 3\,440 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

RESOLUCIÓN:

Este sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} 2y + x &= 410 \\ 5y + 2x &= 900 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, resulta:

$$x = 250\ ;\ y = 80$$

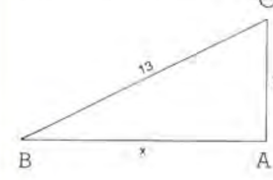
DISCUSIÓN:

Ambos valores satisfacen al sistema (1) y al enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **x = 250 m ; y = 80 m**

154. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:



Sean x e y las medidas de los catetos.

La hipotenusa vale: $x^2 + y^2 = 13^2$

La diferencia de sus catetos es:

$$x - y = 7$$

El sistema será:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13^2 \\ x - y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13^2 \quad (1) \\ x - y &= 7 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

De (2) despejamos $y = x - 7$, *y sustituimos este valor en (1), resultando:*

$$x^2 + (x - 7)^2 = 169 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 49 - 14x = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 60 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{24}{2} = 12 \\ \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$x_1 = 12 \text{ e } y_1 = 5 \;;\; x_2 = -5 \text{ e } y_2 = -12$$

DISCUSIÓN:

Sólo satisfacen las condiciones del problema $x_1 = 12$; $y_1 = 5$

SOLUCIÓN: **x = 12 cm ; y = 5 cm**

155. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sean x e y los números pedidos

Su diferencia es: $x - y = 10$

Su producto es: $xy = -24$

El sistema que se obtiene es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 10 \\ xy = -24 \end{array}\right|$$

RESOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 10 \\ xy = -24 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + (-y) = 10 \\ x(-y) = 24 \end{array}\right| \text{luego: } S = 10 \text{ y } P = 24$$

La ecuación de segundo grado es:

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$$

DISCUSIÓN:

Sustituyendo estos valores de x en una de las ecuaciones del sistema, resulta:

$$y_1 = -4 \text{ e } y_2 = -6$$

que satisfacen el enunciado del problema.

SOLUCIÓN:
1.ª $x_1 = 6$; $y_1 = -4$
2.ª $x_2 = 4$; $y_2 = -6$

156. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:

Sean x e y las edades que tienen actualmente.

Hace 5 años la edad de cada persona era:

$$(x - 5) = 3\,(y - 5)$$

Dentro de 5 años la edad de cada persona será:

$$(x + 5) = 2\,(y + 5)$$

El sistema será

$$\left.\begin{array}{r} (x - 5) = 3\,(y - 5) \\ (x + 5) = 2\,(y + 5) \end{array}\right|$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema, resulta:

$$x = 35 \text{ e } y = 15$$

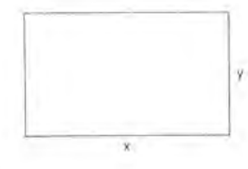
DISCUSIÓN:

Los valores $x = 35$ e $y = 15$ satisfacen al sistema y al enunciado del problema.

SOLUCIÓN: **Tienen 35 y 15 años respectivamente**

157. RESOLUCIÓN

PLANTEAMIENTO:



Sea x uno de los lados e y otro.

El perímetro será: $2x + 2y = 28$

El área será: $x \cdot y = 24$

El sistema será:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 28 \\ xy = 24 \end{array}\right|$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo por uno de los métodos conocidos, resulta:

$$x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \qquad \text{luego: } \left|\begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 12 \end{array}\right.$$

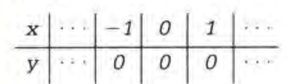
DISCUSIÓN:

Las dos soluciones satisfacen al sistema y al enunciado del problema.

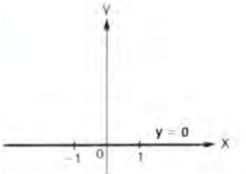
SOLUCIÓN:
1.ª $x_1 = 12$; $y_1 = 2$
2.ª $x_2 = 2$; $y_2 = 12$

158. RESOLUCIÓN

I. $y = 0$



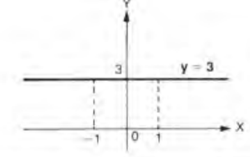
x	···	−1	0	1	···
y	···	0	0	0	···



SOLUCIÓN I: **La gráfica de y = 0 viene representada por el eje de abscisas.**

II. $y = 3$

x	···	−1	0	1	···
y	···	3	3	3	···

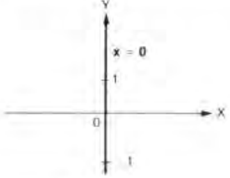


SOLUCIÓN II: **La gráfica de y = 3 viene representada por una línea recta paralela al eje de abscisas y distante 3 unidades por encima de dicho eje.**

159. RESOLUCIÓN

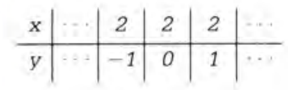
I. $x = 0$

x	···	0	0	0	···
y	···	−1	0	1	···

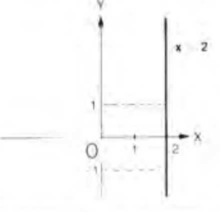


SOLUCIÓN I: **La gráfica de x = 0 viene representada por el eje de ordenadas.**

II. $x = 2$



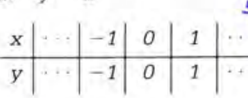
x	···	2	2	2	···
y	···	−1	0	1	···



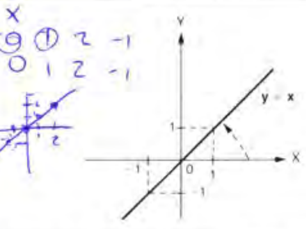
SOLUCIÓN II: **La gráfica de x = 2 viene representada por una línea recta paralela al eje de ordenadas y distante 2 unidades por la derecha de dicho eje.**

160. RESOLUCIÓN

I. $y = x$



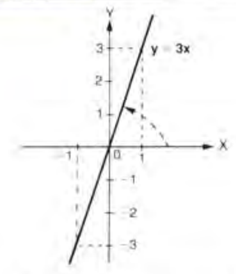
x	···	−1	0	1	···
y	···	−1	0	1	···



SOLUCIÓN I: **La gráfica de y = x es una línea recta que es bisectriz del 1.er y 3.er cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.**

II. $y = 3x$

x	···	−1	0	1	···
y	···	−3	0	3	···

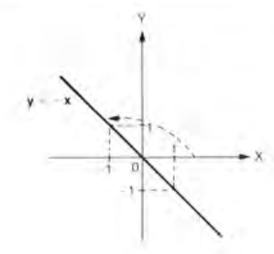


SOLUCIÓN II: **La gráfica de y = 3x es una línea recta que forma un ángulo mayor con el semieje OX.**

161. RESOLUCIÓN

I. $y = -x$

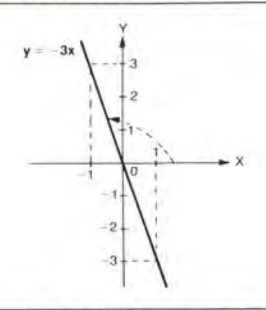
x	···	−1	0	1	···
y	···	1	0	−1	···



SOLUCIÓN I: **La gráfica de y = −x es una línea recta que es bisectriz del 2.° y 4.° cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.**

II. $y = -3x$

x	···	−1	0	1	···
y	···	3	0	−3	···

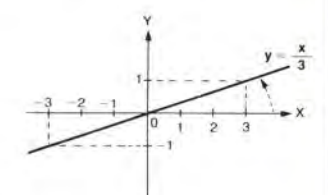


SOLUCIÓN II: **La gráfica de y = −3x es una línea recta que forma un ángulo menor con el semieje OX.**

162. RESOLUCIÓN

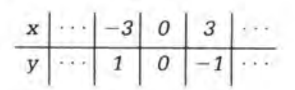
I. $y = \dfrac{x}{3}$

x	···	−3	0	3	···
y	···	−1	0	1	···

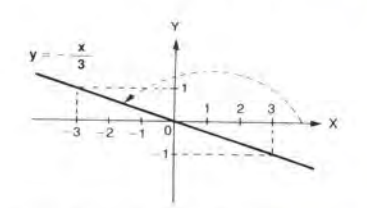


SOLUCIÓN I: **Es una línea recta cuyo ángulo con respecto al semieje OX es menor que el de y = x.**

II. $y = -\dfrac{x}{3}$



x	···	−3	0	3	···
y	···	1	0	−1	···

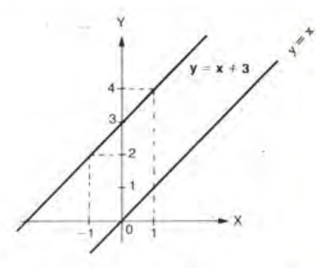


SOLUCIÓN II: **Es una línea recta cuyo ángulo con respecto al semieje OX es mayor que el de y = −x.**

163. RESOLUCIÓN

I. $y = x + 3$

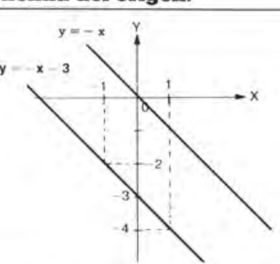
x	···	−1	0	1	···
y	···	2	3	4	···



SOLUCIÓN I: **Es una línea recta paralela a y = x, distante 3 unidades por encima del origen.**

II. $y = -x - 3$

x	···	−1	0	1	···
y	···	−2	−3	−4	···

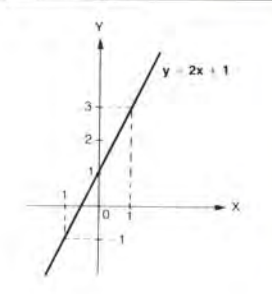


SOLUCIÓN II: **Es una línea recta paralela a y = −x, distante 3 unidades por debajo del origen.**

164. RESOLUCIÓN

I. $y = 2x + 1$

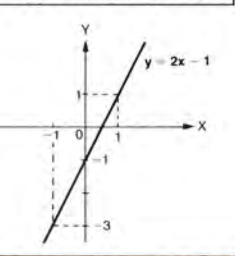
x	···	−1	0	1	···
y	···	−1	1	3	···



SOLUCIÓN I: **La gráfica de y = 2x + 1 es una línea recta.**

II. $y = 2x - 1$

x	···	−1	0	1	···
y	···	−3	−1	1	···

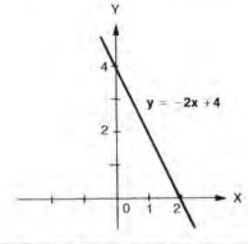


SOLUCIÓN II: **La gráfica de y = 2x − 1 es una línea recta.**

165. RESOLUCIÓN

I. $y = -2x + 4$

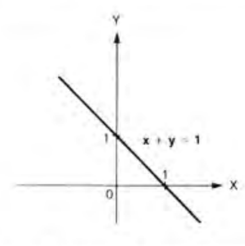
x	···	0	2	···
y	···	4	0	···



SOLUCIÓN I: **La gráfica de y = −2x + 4 es una línea recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 4) y (2, 0).**

II. $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

x	···	0	1	···
y	···	1	0	···

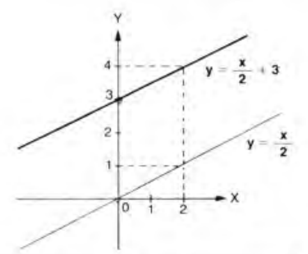


SOLUCIÓN II: **Es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0,1) y (1,0).**

166. RESOLUCIÓN

I. $y = \dfrac{x}{2} + 3$

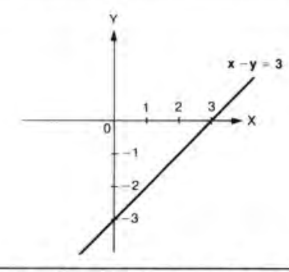
x	···	0	2	···
y	···	3	4	···



SOLUCIÓN I: **Es una recta paralela a** $\mathbf{y = \dfrac{x}{2}}$ **, distante 3 unidades por encima del eje de abscisas.**

II. $x - y = 3$

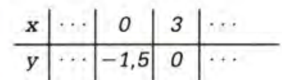
x	···	0	3	···
y	···	−3	0	···



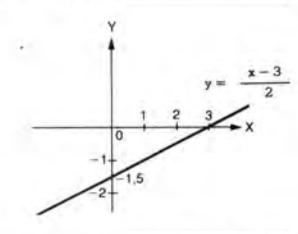
SOLUCIÓN II: **Es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, −3).**

167. RESOLUCIÓN

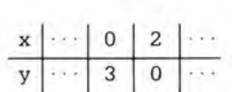
I. $y = \dfrac{x - 3}{2}$



x	···	0	3	···
y	···	−1,5	0	···



SOLUCIÓN I: **La gráfica es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos** $\left(\mathbf{0, -\dfrac{3}{2}}\right)$ **y (3, 0).**

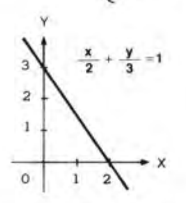


II. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

CÁLCULOS AUXILIARES:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = 3 \\ y = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

x	···	0	2	···
y	···	3	0	···

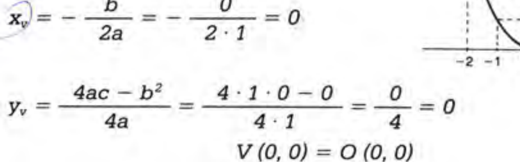


SOLUCIÓN II: **Es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 3) y (2, 0).**

168. RESOLUCIÓN

I. $y = x^2$; $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$



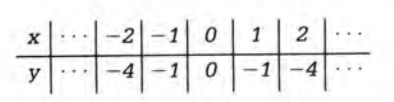
$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - 0}{4 \cdot 1} = \frac{0}{4} = 0$

$V(0, 0) = O(0, 0)$

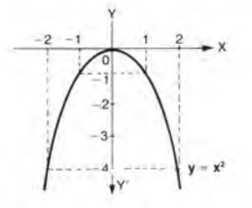
x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	4	1	0	1	4	···

SOLUCIÓN I: **Es una parábola cuyo vértice es el punto (0, 0). Es simétrica respecto de OY.**

II. $y = -x^2$; $V(0, 0) = O(0,0)$



x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	−4	−1	0	−1	−4	···

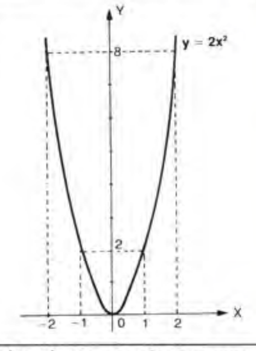


SOLUCIÓN II: **Es una parábola cuyo vértice es (0, 0). Es simétrica respecto de OY′.**

169. RESOLUCIÓN

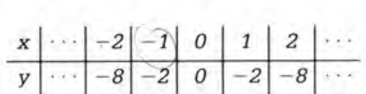
I. $y = 2x^2$; $V(0, 0) = O(0, 0)$

x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	8	2	0	2	8	···

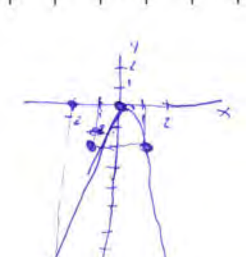


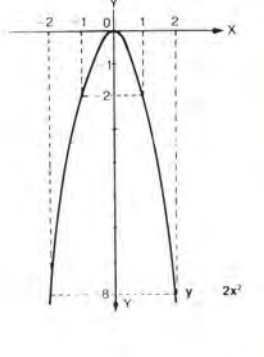
SOLUCIÓN I: **Es una parábola de V(0, 0). Es simétrica respecto OY. Es una curva más estrecha respecto a la y = x².**

II. $y = -2x^2$; $V(0, 0) = O(0,0)$



x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	−8	−2	0	−2	−8	···



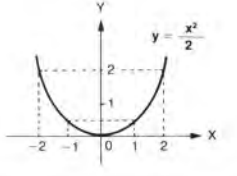


SOLUCIÓN II: **Parábola de V(0, 0). Simétrica respecto a OY′. Curva más estrecha respecto a la y = − x²**

170. RESOLUCIÓN

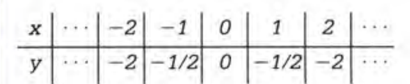
I. $y = \frac{x^2}{2}$; $V(0, 0) = O(0, 0)$

x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	2	1/2	0	1/2	2	···

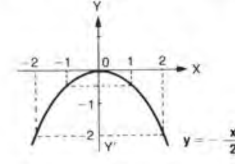


SOLUCIÓN I: **Es una parábola de V(0, 0). Simétrica respecto a OY. Curva más ancha respecto a la y = x².**

II. $y = -\frac{x^2}{2}$; $V(0, 0) = O(0, 0)$



x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	−2	−1/2	0	−1/2	−2	···



SOLUCIÓN II: **Es una parábola de V(0, 0). Simétrica respecto a OY′. Curva más ancha respecto a la y = − x²**

171. RESOLUCIÓN

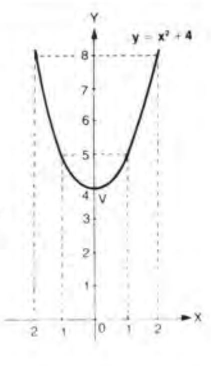
$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = -\frac{0}{2} = 0$

$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 4 - 0}{4 \cdot 1} = \frac{16}{4} = 4$

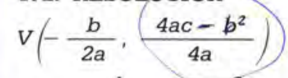
$V(0, 4)$

x	···	−2	−1	0	1	2	···
y	···	8	5	4	5	8	···



SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (0, 4). Simétrica respecto OY. Curva igual a la y = x² pero trasladada en 4 unidades hacia arriba.**

172. RESOLUCIÓN



$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

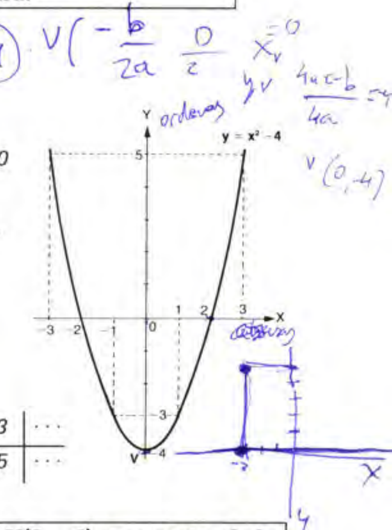
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = -\frac{0}{2} = 0$

$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1(-4) - 0}{4 \cdot 1} =$

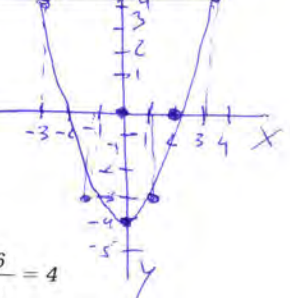
$= -\frac{16}{4} = -4$

$V(0, -4)$

x	···	−3	−2	−1	0	1	2	3	···
y	···	5	0	−3	−4	−3	0	5	···



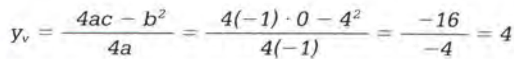
SOLUCIÓN: **Es una parábola de V(0, −4), que corta al eje de abscisas en los puntos (2, 0) y (−2, 0). Simétrica respecto al eje de ordenadas.**



173. RESOLUCIÓN

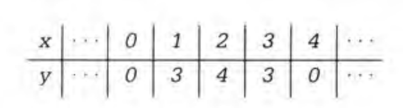
$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

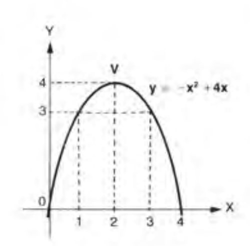


$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1) \cdot 0 - 4^2}{4(-1)} = \frac{-16}{-4} = 4$

$V\,(2, 4)$



x	···	0	1	2	3	4	···
y	···	0	3	4	3	0	···



SOLUCIÓN: **Es una parábola de V(2, 4), que corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (4, 0).**

174. RESOLUCIÓN

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - (-4)^2}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} = -4$$

$V\,(2, -4)$

x	···	0	1	2	3	4	···
y	···	0	−3	−4	−3	0	···

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V (2, −4), que corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (4, 0).**

175. RESOLUCIÓN

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 4 - (-4)^2}{4 \cdot 1} =$$

$$= \frac{16 - 16}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$V\,(2, 0)$

x	···	0	1	2	3	4	···
y	···	4	1	0	1	4	···

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V(2, 0), cuya curva corta al semieje OY en el punto (0, 4).**

176. RESOLUCIÓN

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-8) - 6^2}{4(-1)} =$$

$$= \frac{-4}{-4} = 1$$

$V\,(3, 1)$

x	···	1	2	3	4	5	···
y	···	−3	0	1	0	−3	···

SOLUCIÓN: **Es una parábola de V(3, 1), que corta al eje de abscisas en los puntos (2, 0) y (4,0).**

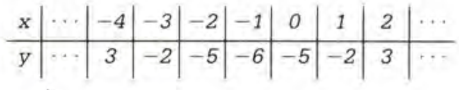
177. RESOLUCIÓN

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

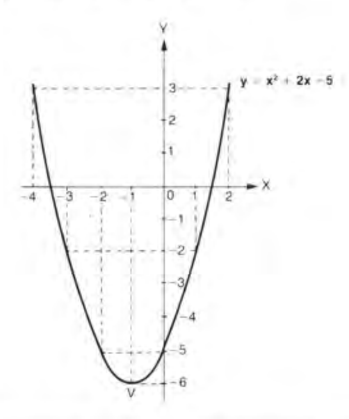
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot (-5) - 2^2}{4 \cdot 1} = \frac{-20 - 4}{4} = -6$$

$V\,(-1, -6)$



x	···	−4	−3	−2	−1	0	1	2	···
y	···	3	−2	−5	−6	−5	−2	3	···



SOLUCIÓN: **Es una parábola de V(−1, −6), que corta al eje de abscisas en dos puntos.**

Bloque 4

- ✔ Progresiones aritméticas
- ✔ Progresiones geométricas

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Definición

Se llama progresión aritmética a toda sucesión de números:

$$a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ \ldots \ ; \ a_n$$

tales que cada uno es igual al anterior más una cantidad constante, llamada diferencia.

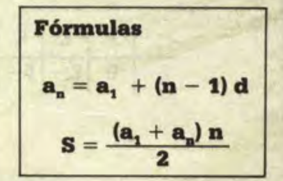
Ejemplos:

2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22

1 ; 2,5 ; 4 ; 5,5 ; 7

Notaciones

- ÷ Progresión aritmética
- $\mathbf{a_1}$ Primer término
- $\mathbf{a_n}$ Término enésimo
- **S** Suma de *n* términos consecutivos
- **n** Número de términos
- **d** Diferencia



Fórmulas

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular la suma de los términos de una ÷ que consta de 14 términos, sabiendo que el primero es $-\frac{3}{10}$ y la diferencia $\frac{2}{5}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{161}{5}}$

2. Calcular la suma de los términos de una ÷ cuya diferencia es 2, sabiendo que tiene 15 términos y que el último es 31.

SOLUCIÓN: **S = 255**

3. La suma de 8 términos de una ÷ es 428 y el último término es 43. Hallar el primer término y la diferencia de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 64 \ ; \ d = -3}$

4. Averiguar la profundidad de un pozo si por perforar el primer metro se han pagado 2 500 PTAS y por cada uno de los restantes 750 PTAS más que por el anterior, sabiendo que el pozo ha costado 79 500 PTAS.

SOLUCIÓN: **12 m**

5. Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que están en ÷ de 12° 30' de diferencia.

SOLUCIÓN: **÷ 71° 15' ; 83° 45' ; 96° 15' ; 108° 45'**

6. Hallar la suma de todos los múltiplos de 17 comprendidos entre 6 000 y 8 000.

SOLUCIÓN: **S = 825 469**

7. Hallar la suma de todos los múltiplos de 43 que tienen 4 cifras.

SOLUCIÓN: **S = 1 150 336**

8. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y se sabe que el menor mide 48°. Hallar los ángulos del triángulo.

SOLUCIÓN: **÷ 48° ; 60° ; 72°**

9. Se sabe que los ángulos de un hexágono están en ÷ y que el menor es recto. Hallar el valor de los ángulos del hexágono.

SOLUCIÓN: **÷ 90° ; 102° ; ... ; 150°**

10. La suma de los 9 términos de una progresión aritmética es 144. Entre el cuarto y el séptimo suman 35. Hallar el primer término, el último y la diferencia de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 4 \ ; \ a_n = 28 \ ; \ d = 3}$

11. Entre el segundo y el sexto término de una progresión aritmética suman 52, y el cuarto con el octavo suman 80. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la progresión.

SOLUCIÓN: **S = 365**

12. La suma de los 10 términos de una ÷ es 185 y la diferencia entre el último y el primero es 36. Hallar el primer término y la diferencia de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 0{,}5 \ ; \ d = 4}$

13. La suma de los 14 términos de una progresión aritmética es 707 y el sexto término 43. Hallar el primer término y la diferencia de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 18 \ ; \ d = 5}$

14. La suma de tres números en progresión aritmética es 27 y su producto 504. Hallarlos.

SOLUCIÓN: **÷ 4; 9; 14 ó ÷ 14; 9; 4**

15. Hallar tres números en progresión aritmética, sabiendo que su suma es 33 y que el cuadrado del mayor excede en 99 unidades a la suma de los cuadrados de los otros dos.

SOLUCIÓN: **÷ 6; 11; 16**

16. Qué valor debe tener x para que $x + 1$; $x^2 + 4$ y $2x^2 + 3$ sean tres términos consecutivos de una progresión aritmética. Si $x + 1$ es el cuarto término de dicha ÷, hallar la suma de los 12 primeros términos.

SOLUCIÓN: **x = 4 ; S = 510**

17. Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión aritmética de 2 cm de diferencia. Hallar sus longitudes.

SOLUCIÓN: **÷ 6 cm; 8 cm; 10 cm**

18. Interpolar 8 medios diferenciales entre: $\frac{2}{33}$ y $\frac{85}{6}$.

SOLUCIÓN: $\div \frac{2}{3}; \frac{13}{6}; \frac{22}{6}; \ldots; \frac{85}{6}$

19. Entre los números 4 y 64 se han interpolado 11 medios diferenciales. ¿Cuál es el cuarto término de la nueva progresión?

SOLUCIÓN: $a_4 = 19$

20. Calcular tres términos consecutivos de una ÷ sabiendo que su suma es 3 y la suma de sus cubos es 57.

SOLUCIÓN: **÷ − 2; 1 y 4 ó ÷ 4; 1 y − 2**

21. En una progresión aritmética la suma de sus *n* primeros términos es $n^2 + 2n$ para todo valor de *n*. Hallar el primer término y la diferencia de la progresión.

SOLUCIÓN: $a_1 = 3$; $d = 2$

22. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética cuya diferencia es $\frac{3}{2}$, el último término es 38 y la suma de todos ellos 500?

SOLUCIÓN: **n = 25**

23. Hallar el valor de los ángulos de un pentágono convexo, sabiendo que están en progresión aritmética, y que la diferencia entre el mayor y menor es 140°.

SOLUCIÓN: **÷ 38° ; 73° ; 108° ; 143° ; 178°**

24. Hallar el término 113 de una progresión aritmética en la que los términos segundo y cuarto suman 32 y los términos quinto y noveno suman 60.

SOLUCIÓN: $a_{113} = 401$

25. Hallar la suma de los *n* primeros términos de la sucesión:

$$1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots$$

SOLUCIÓN: $S = \frac{n+1}{2}$

26. La suma de 4 términos de una progresión aritmética es 4 y la suma de sus cuadrados 24. Hallar la progresión.

SOLUCIÓN: **÷ − 2; 0; 2; 4 ó ÷ 4; 2; 0; − 2**

27. La suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética es 4 veces la suma de los 5 primeros. ¿Cuál es la razón a_1/d, del primer término a la diferencia de la progresión?

SOLUCIÓN: $\frac{a_1}{d} = \frac{1}{2}$

28. Hallar una progresión aritmética tal que la suma de los *n* primeros términos sea igual a $(3n + 1)\,n$, para todo valor de *n*.

SOLUCIÓN: **÷ 4; 10; 16;...**

29. Un coronel que manda un regimiento coloca un soldado en la 1ª fila, tres en la 2ª, cinco en la 3ª y así sucesivamente hasta colocar 1 024 soldados. Se desea saber cuántos soldados habrá en la 8ª fila y cuántos en la 25ª y qué superficie hubieran ocupado si los hubiese distribuido en filas de igual número de soldados y distantes entre sí un metro.

SOLUCIÓN: $a_8 = 15$; $a_{25} = 49$; $A = 961\ m^2$

30. Un jardinero debe regar con un cubo de agua cada uno de los 30 árboles que hay a un lado del camino. Los árboles distan entre sí 6 m y el pozo está a 10 m del primer árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido el jardinero después de haber terminado el riego y vuelto el cubo al pozo?

SOLUCIÓN: **D = 5 820 m**

31. Se sabe que una progresión aritmética tiene un número impar de términos; que la suma de los que ocupan lugar par es 30 y la de los que ocupan lugar impar es 45. Hallar el término central a_c y el número de términos de la progresión.

SOLUCIÓN: $a_c = 15$; $n = 5$

32. Un carro que baja por un plano inclinado recorre 1 m en el primer segundo, 3 m en el segundo, 5 m en el tercero, etc. Se desea saber:

a) ¿Cuánto recorrerá en los 30 primeros segundos?
b) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los 2 500 m que tiene de longitud el plano inclinado?

SOLUCIÓN: $S_{30} = 900$; $t = 50$

33. En una plantación hay 51 filas de árboles, teniendo cada una dos árboles más que la anterior. Se sabe que en la fila 26ª hay 57 árboles y se desea saber cuántos hay en la plantación.

SOLUCIÓN: **S = 2 907**

34. Una persona compra a plazos un televisor. El primer mes paga 22 000 PTAS, el segundo 20 000 PTAS, el tercero 18 000 PTAS, hasta el último mes que paga 4 000 PTAS, con lo que el televisor queda totalmente pagado. ¿Cuántos meses fueron necesarios para pagar el televisor?

SOLUCIÓN: **S = 10 meses**

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

$$S = \frac{\left(-\frac{3}{10} + \frac{49}{10}\right)14}{2} = \frac{161}{5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$a_n = -\frac{3}{10} + 13 \cdot \frac{2}{5}$

$a_n = \frac{49}{10}$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = \frac{161}{5}}$

2. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{(3+31)\,15}{2}$$

$S = 255$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$31 = a_1 + 14 \cdot 2$

$a_1 = 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = 255}$

3. RESOLUCIÓN

$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$; $428 = \frac{(a_1 + 43)\,8}{2}$ $\quad a_1 = 64$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$; $43 = 64 + 7d$ $\quad d = -3$

SOLUCIÓN: $\boxed{a_1 = 64 \;;\; d = -3}$

4. RESOLUCIÓN

$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$79\,500 = \frac{(2\,500 + a_n)\,n}{2}$

$a_n = 2\,500 + (n-1) \cdot 750$

$n_1 = 12$

$n_2 \cancel{= -\frac{53}{3}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{12 \text{ m}}$

5. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO

$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$360 = \frac{(a_1 + a_n)\,4}{2}$

$a_n = a_1 + 3 \cdot 12°\,30'$

$a_1 = 71°\,15'$

$a_n = 108°\,45'$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

$a_2 = a_1 + 12°\,30'$

$a_3 = a_1 + 25°$

$a_4 = a_1 + 37°\,30'$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 360°$

$a_1 = 71°\,15'$

$a_2 = 71°\,15' + 12°\,30' = 83°\,45'$

$a_3 = 71°\,15' + 25° = 96°\,15'$

$a_4 = 71°\,15' + 37°\,30' = 108°\,45'$

$\div\, 71°\,15'$; $83°\,45'$; $96°\,15'$; $108°\,45'$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\, 71°\,15' \;;\; 83°\,45' \;;\; 96°\,15' \;;\; 108°\,45'}$

6. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

$$S = \frac{(6\,001 + 7\,990)\,118}{2}$$

$S = 825\,469$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = 825\,469}$

CÁLCULOS AUXILIARES

6000 ⌊17 → 90, 50, 16; cociente 352

8000 ⌊17 → 120, 010; cociente 470

$a_1 = 353 \times 17 = 6\,001$

$a_n = 470 \times 17 = 7\,990$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$7\,990 = 6\,001 + (n-1)\,17$

$n = 118$

7. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

$$S = \frac{(1\,032 + 9\,976)\,209}{2}$$

$S = 1\,150\,336$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = 1\,150\,336}$

CÁLCULOS AUXILIARES

1000 ⌊43 → 140, 11; cociente 23

9999 ⌊43 → 139, 109, 23; cociente 232

$a_1 = 24 \cdot 43 = 1\,032$

$a_n = 232 \cdot 43 = 9\,976$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$9\,976 = 1\,032 + (n-1) \cdot 43$

$n = 209$

8. RESOLUCIÓN

$a_1 = 48°$

$a_2 = 48° + d$

$a_3 = 48° + 2d$

$S = 180°$

$S = a_1 + a_2 + a_3$

$180° = 48° + 48° + d + 48° + 2d$

$d = 12°$

$\div\, 48°$; $60°$; $72°$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\, 48° \;;\; 60° \;;\; 72°}$

9. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO

$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$ $\quad 720 = \frac{(90 + a_n)\,6}{2}$ $\quad a_n = 150°$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ $\quad a_n = 90 + 5d$ $\quad d = 12°$

$\div\, 90°$; $102°$; $114°$; $126°$; $138°$; $150°$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 720$

$90 + (90 + d) + (90 + 2d) + (90 + 3d) + (90 + 4d) + + (90 + 5d) = 720$

$d = 12°$; $\div\, 90°$; $102°$; ...; $150°$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\, 90° \;;\; 102° \;;\; ... \;;\; 150°}$

NOTA: *En cualquier caso la suma de todos es: $180° \times 4 = 720°$.*

10. RESOLUCIÓN

$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$; $144 = \frac{(a_1 + a_1 + 8d)\,9}{2} \Rightarrow a_1 + 4d = 16$

$a_1 + 4d = 16$

$a_4 + a_7 = 35$

$(a_1 + 3d) + (a_1 + 6d) = 35$

$2a_1 + 9d = 35$

$a_1 + 4d = 16$ $\quad a_1 = 4$

$2a_1 + 9d = 35$ $\quad d = 3$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$a_n = 4 + 8 \cdot 3 = 28$

$a_1 = 4$; $\quad a_n = 28$; $\quad d = 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{a_1 = 4 \;;\; a_n = 28 \;;\; d = 3}$

11. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} a_2 + a_6 &= 52 \\ a_4 + a_8 &= 80 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + d) + (a_1 + 5d) &= 52 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) &= 80 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 3d &= 26 \\ a_1 + 5d &= 40 \end{aligned}\right| \begin{aligned} a_1 &= 5 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

$$a_n = a_{10} = a_1 + (n-1)\,d = 5 + 9 \cdot 7 = 68$$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{(5 + 68)\,10}{2} = 365$$

SOLUCIÓN: **S = 365**

12. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

$$185 = \frac{(a_1 + a_n)\,10}{2} \Rightarrow a_1 + a_n = 37$$

$$a_1 + a_n = 37$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_n &= 37 \\ a_n - a_1 &= 36 \end{aligned}\right| \begin{aligned} a_1 &= 0{,}5 \\ a_n &= 36{,}5 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d\ ; \quad 36{,}5 = 0{,}5 + 9d\ ; \quad d = 4$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 0{,}5\ ;\ d = 4}$

13. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

$$707 = \frac{(a_1 + a_1 + 13d)\,14}{2} \Rightarrow 2a_1 + 13d = 101$$

A su vez, el sexto término de la progresión es:

$$\begin{aligned} a_6 &= 43 \\ a_1 + 5d &= 43 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} 2a_1 + 13d &= 101 \\ a_1 + 5d &= 43 \end{aligned}\right| \begin{aligned} a_1 &= 18 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 18\ ;\ d = 5}$

14. RESOLUCIÓN

$$a_2 - d;\quad a_2;\quad a_2 + d$$

$$\left.\begin{aligned} (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) &= 27 \ (1) \\ (a_2 - d) \cdot a_2 \cdot (a_2 + d) &= 504 \end{aligned}\right| \begin{aligned} a_2 &= 9 \\ d &= \pm 5 \end{aligned}$$

÷ 4, 9, 14 ó ÷ 14, 9, 4

SOLUCIÓN: **÷ 4; 9; 14 ó ÷ 14; 9; 4**

NOTA: Siempre que nos den la suma de tres términos de una ÷ se ponen en función del central. Se obtiene inmediatamente éste. En nuestro caso de la ecuación (1) obtendremos directamente $a_2 = 9$, con lo que el resto del problema es sencillísimo.

15. RESOLUCIÓN

$$a_2 - d\ ;\ a_2\ ;\ a_2 + d\ ;\ (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 33$$

$$(a_2 + d)^2 = (a_2 - d)^2 + a_2^2 + 99\ ;\ a_2 = 11\ ;\ d = 5$$

÷ 6, 11, 16 SOLUCIÓN: **÷ 6; 11; 16**

16. RESOLUCIÓN

Para que sean tres términos consecutivos de una ÷ la diferencia entre el segundo y el primero tiene que ser igual a la diferencia entre el tercero y el segundo, pues dichas diferencias son la diferencia de la progresión.
Es decir,

$$(x^2 + 4) - (x + 1) = (2x^2 + 3) - (x^2 + 4)\ ;\ x = 4$$

Si x + 1 es el cuarto término, será $a_4 = 5$ y la suma de los 12 primeros:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}\ ;\ S = \frac{(-40 + 125)\,12}{2}\ ;\ S = 510$$

SOLUCIÓN: **x = 4 ; S = 510**

CÁLCULOS AUXILIARES

$$d = (x^2 + 4) - (x + 1) = 20 - 5 = 15\ ;\ a_4 = a_1 + 3d$$

$$5 = a_1 + 45\ ;\ a_1 = -40\ ;\ a_{12} = a_1 + 11d$$

$$a_{12} = -40 + 165\ ;\ a_{12} = 125$$

17. RESOLUCIÓN

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2$$

~~$x_1 = 0$~~ $\quad x_2 = 8$

x − 2 · x + 2 · x

La naturaleza del problema nos hace descartar la solución $x_1 = 0$. Por tanto:

÷ 6 cm, 8 cm, 10 cm, serán los lados del triángulo.

SOLUCIÓN: **÷ 6 cm; 8 cm; 10 cm**

18. RESOLUCIÓN

El problema equivale a formar una ÷, tal que:

$$a_1 = \frac{2}{3} \quad a_n = \frac{85}{6} \quad n = 10 \ ; \quad \text{por tanto: } a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$\frac{85}{6} = \frac{2}{3} + 9d\ ;\ d = \frac{3}{2}$$

$$\div\ \frac{2}{3};\ \frac{13}{6};\ \frac{22}{6};\ \frac{31}{6};\ \frac{40}{6};\ \frac{49}{6};\ \frac{58}{6};\ \frac{67}{6};\ \frac{76}{6};\ \frac{85}{6}$$

SOLUCIÓN: $\div\ \mathbf{\frac{2}{3};\ \frac{13}{6};\ \frac{22}{6};\ \ldots;\ \frac{85}{6}}$

19. RESOLUCIÓN

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 4 + 3 \cdot 5 = 19$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_4 = 19}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$a_1 = 4;\quad a_n = 64;\quad n = 13$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$64 = 4 + 12d$$

$$d = 5$$

20. RESOLUCIÓN

$$a_2 - d\ ;\ a_2\ ;\ a_2 + d\ ;\ (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 3$$

$$(a_2 - d)^3 + a_2^3 + (a_2 + d)^3 = 57\ ;\ a_2 = 1\ ;\ d = \pm 3$$

÷ − 2, 1 y 4 ó ÷ 4, 1 y − 2

SOLUCIÓN: **÷ − 2; 1 y 4 ó ÷ 4; 1 y − 2**

21. RESOLUCIÓN

$n = 1$; $n^2 + 2n = 3$; $a_1 = 3$
$n = 2$; $n^2 + 2n = 4 + 4 = 8$; $a_1 + a_2 = 8$; $a_2 = 5$

$n = 3$; $n^2 + 2n = 9 + 6 = 15$

$a_1 + a_2 + a_3 = 15;\ a_3 = 7$

$\div\ 3, 5, 7, ...$

$a_1 = 3$; $d = 2$ SOLUCIÓN: $\boxed{a_1 = 3\ ;\ d = 2}$

22. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} \qquad 500 = \frac{(a_1 + 38)n}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \qquad 38 = a_1 + (n-1)\,\frac{3}{2}$$

$a_1 n + 38n = 1\,000$
$2a_1 + 3n = 79$ $\quad n_1 = \cancel{\frac{80}{3}}$; $n_2 = 25$

Descartamos la solución $n_1 = \frac{80}{3}$ ya que el valor de n ha de ser número natural.

SOLUCIÓN: $\boxed{n = 25}$

23. RESOLUCIÓN

La suma de todos es $180 \cdot 3 = 540°$. Por tanto:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}\ ;\ 540 = \frac{(a_1 + a_n)5}{2};\quad a_1 + a_n = 216$$

$a_1 + a_n = 216$; $a_1 = 38°$; $a_n = a_1 + (n-1)\,d$
$a_n - a_1 = 140$; $a_n = 178°$; $178 = 38 + 4d$; $d = 35°$

$\div\ 38°; 73°; 108°; 143°; 178°$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\ 38°\ ;\ 73°\ ;\ 108°\ ;\ 143°\ ;\ 178°}$

24. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} a_2 + a_4 = 32 \\ a_5 + a_9 = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (a_1 + d) + (a_1 + 3d) = 32 \\ (a_1 + 4d) + (a_1 + 8d) = 60 \end{array}$$

$2a_1 + 4d = 32$; $a_1 = 9$; $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$2a_1 + 12d = 60$; $d = \frac{7}{2}$; $a_n = 9 + 112 \cdot \frac{7}{2}$; $a_n = 401$

SOLUCIÓN: $\boxed{a_{113} = 401}$

25. RESOLUCIÓN

$$\frac{n-1}{n} - 1 = -\frac{1}{n}$$

$$\frac{n-2}{n} - \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n}$$

$$\frac{n-3}{n} - \frac{n-2}{n} = -\frac{1}{n}$$

. . . .

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$a_n = 1 + (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)$

$a_n = \frac{1}{n}$

La sucesión propuesta es una $\div$ cuya diferencia es $d = -\frac{1}{n}$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}\ ;\quad S = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)n}{2}\ ;\quad S = \frac{n+1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = \frac{n+1}{2}}$

26. RESOLUCIÓN

$\div\ a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d$

$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 4$

$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 3d)^2 = 24$

$a_1 = -2$; $d_1 = 2$; $a_1' = 4$; $d_1' = -2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\ -2;\ 0;\ 2;\ 4\ \text{ó}\ \div\ 4;\ 2;\ 0;\ -2}$

27. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}\ ;\quad S_{10} = 4S_5\ ;\quad \frac{(a_1 + a_{10})\,10}{2} = \frac{4(a_1 + a_5)5}{2}$$

$(a_1 + a_{10})\,10 = 20\,(a_1 + a_5)$; $a_1 + a_{10} = 2\,(a_1 + a_5)$

$a_1 + (a_1 + 9d) = 2\,[a_1 + (a_1 + 4d)]$; $2a_1 + 9d = 4a_1 + 8d$

$2a_1 = d$; $\frac{a_1}{d} = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{a_1}{d} = \frac{1}{2}}$

28. RESOLUCIÓN

$n = 1$; $(3n + 1)\,n = 4$; $a_1 = 4$

$n = 2$; $(3n + 1)\,n = 14$; $a_1 + a_2 = 14$; $a_2 = 10$

$n = 3$; $(3n + 1)\,n = 30$; $a_1 + a_2 + a_3 = 30$; $a_3 = 16$

$\div\ 4, 10, 16,...$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\ 4;\ 10;\ 16;...}$

29. RESOLUCIÓN

Cálculo del número de soldados de las filas 8ª y 25ª.

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$; $a_8 = a_1 + 7d$; $a_8 = 1 + 7 \cdot 2 = 15$

$a_{25} = a_1 + 24d$; $a_{25} = 1 + 24 \cdot 2 = 49$

Cálculo de la superficie que ocuparían dispuestos del modo indicado.

$1\,024 = n^2$; $n = \sqrt{1\,024} = 32$ filas

En cada fila hay 32 soldados que ocupan una longitud de 31m.

$A = 31 \cdot 31 = 961\ m^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{a_8 = 15\ ;\ a_{25} = 49\ ;\ A = 961\ m^2}$

30. RESOLUCIÓN

Los recorridos del pozo a los árboles forman una $\div$ cuyo $a_1 = 10$ m y la $d = 6$m.
El camino que recorre para ir del pozo a cada uno de los árboles es la suma de los términos de dicha $\div$.

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2};$$

$$S = \frac{(10 + 184)\,30}{2} = 2\,910\ m$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$a_n = 10 + 29 \cdot 6$

$a_n = 184$

El camino lo recorre dos veces, una para ir del pozo al árbol y otra para regresar del árbol al pozo. La distancia recorrida será, por tanto, 2S.

$D = 2S = 2 \cdot 2\,910 = 5\,820$ m

SOLUCIÓN: $\boxed{D = 5\,820\ m}$

31. RESOLUCIÓN

La diferencia entre la suma de los que ocupan lugar impar y la de los que ocupan lugar par nos da el central, por tanto.

$a_c = 45 - 30 = 15$

Por otra parte, en toda $\div$ de un número impar de términos el central es igual a la semisuma de los extremos:

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2};$$

y, en esta $\div$, $S = 45 + 30 = 75$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\ ;\quad 75 = 15n\ ;\quad n = 5$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a_c = 15\ ;\ n = 5}$

32. RESOLUCIÓN

a) $S = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$S = \dfrac{(1 + 59)30}{2} = 900\ m$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n - 1)\ d$

$a_n = 1 + 29 \cdot 2$

$a_n = 59\ m$

b) $S = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$2\,500 = \dfrac{(1 + 2n - 1)n}{2}$

$n^2 = 2\,500\ m \quad ; \quad n = 50$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n - 1)\ d$

$a_n = 1 + (n - 1)\ 2 = 2n - 1$

SOLUCIÓN: **$S_{30} = 900$; t = 50**

33. RESOLUCIÓN

$S = \dfrac{(a_1 + a_n)\ n}{2}$

$S = \dfrac{(7 + 107)\ 51}{2}$

$S = 2\,907\ m$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n - 1)\ d \ ; \ a_{26} = a_1 + 25d$

$57 = a_1 + 50 \quad ; \quad a_1 = 7$

$a_{51} = a_1 + 50\ d \ ; \ a_{51} = 7 + 100$

$a_{51} = 107$

SOLUCIÓN: **S = 2 907**

34. RESOLUCIÓN

$a_n = a_1 + (n - 1)\ d$

$4\,000 = 22\,000 + (n - 1)\ (-2\,000)$

$n = 10$

SOLUCIÓN: **S = 10 meses**

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Definición

Se llama progresión geométrica a toda sucesión de números:

$a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ \ldots \ ; \ a_n$

tales que cada uno es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante, llamada razón.

Ejemplos:

5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; 160

27 ; 9 ; 3 ; 1 ; $\frac{1}{3}$

2 ; − 6 ; 18 ; − 54

Notaciones

- $\div\div$ Progresión geométrica
- **a_1** Primer término
- **a_n** Término enésimo
- **S** Suma de *n* términos
- **P** Producto de *n* términos consecutivos
- **n** Número de términos consecutivos
- **r** Razón de la progresión

Fórmulas

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$P = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el séptimo 12 288. Hallar la suma de los siete términos.

SOLUCIÓN: **S = 16 383**

2. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la sucesión

$\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{20}{27}, \ldots$ SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{570\,375}{78\,098}}$

3. En una progresión geométrica de razón 5, el último término vale 62 500 y la suma de todos 78 124. Hallar el número de términos de la progresión.

SOLUCIÓN: **n = 7**

4. El primer término de una progresión geométrica es 2 916, la razón 1/3 y el último término 4. Hallar el número de términos y la suma de todos ellos.

SOLUCIÓN: **n = 7 ; S = 4 372**

5. Hallar la suma de los 9 primeros términos de la sucesión:

$2, 2\sqrt{5}, 10, 10\sqrt{5}, \ldots$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 1\,562 - 312\sqrt{5}}$

6. Resolver la ecuación: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^x = 4\,095$

SOLUCIÓN: **x = 11**

7. En una progresión geométrica el segundo término es 15 y entre el tercero y cuarto suman 180. Hallar el sexto término y la suma de los 10 primeros.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_6 = 1\,215 \ ; \ S = 147\,620}$

8. El duodécimo término de una progresión geométrica de razón 2/3, es 148/9. Hallar el décimo término de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_{10} = 37}$

9. A una cuerda de 64 m se le dan tres cortes. Determinar la longitud de cada trozo sabiendo que el primero mide 1,60 m y que están en progresión geométrica.

SOLUCIÓN: **÷÷ 1,60 ; 4,80 ; 14,40 ; 43,20**

10. Encontrar cuatro números naturales en progresión geométrica, sabiendo que los tres primeros suman 49 y los cuatro 105.

SOLUCIÓN: **÷÷ 7 ; 14 ; 28 ; 56**

11. Encontrar cuatro números naturales en progresión geométrica, sabiendo que los dos primeros suman 12 y los dos últimos 300.

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; 10 ; 50 ; 250**

12. Formar una progresión geométrica de 7 términos, sabiendo que los tres primeros suman 26, los tres últimos 2106 y que la razón es un número natural.

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; 486 ; 1 458**

13. Hallar la suma de los siete términos de una progresión geométrica, sabiendo que la suma de los seis primeros es 189 y la suma de los seis últimos 378 y que la razón es un entero positivo.

SOLUCIÓN: **S = 381**

14. Calcular el producto de los 8 primeros términos de la sucesión: 3 , 12 , 48 , ...

SOLUCIÓN: $\mathbf{P = 49\,152^4}$

15. El producto de tres números en progresión geométrica es 1 000 y su suma 62. Hallarlos.

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; 10 ; 50 ó ÷÷ 50 ; 10 ; 2**

16. Las aristas de un paralelepípedo están en progresión geométrica y suman 26 cm. Hallarlas, sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 216 cm^3.

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 cm ; 6 cm ; 18 cm**

17. El primer término de una progresión geométrica es a^2 y el último a^{11}. Hallar la razón y el producto de sus siete términos.

SOLUCIÓN: $\mathbf{r = \sqrt{a^3} \ ; \ P = a^{45}\sqrt{a}}$

18. Interpolar cuatro medios proporcionales entre 2 y 486.

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; 486**

19. Calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión:

$\frac{5}{2}; \frac{5}{6}; \frac{5}{18}; \frac{5}{54}; \ldots$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{15}{4}}$

20. Calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión:

$\frac{1}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{4}; \frac{3-2\sqrt{2}}{4}; \ldots$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

21. Calcular $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\ldots}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\ldots}} = 2}$

22. Calcular $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots}{\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135} + \ldots}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{5}{3}}$

23. Hallar las fracciones generatrices de las siguientes periódicas:

a) $0,\widehat{47}$ c) $1,\widehat{273}$ e) $0,4\widehat{21}$

b) $4,\widehat{3}$ d) $0,\widehat{415}$ f) $2,47\widehat{3}$

SOLUCIÓN:

$\mathbf{0,\widehat{47} = \frac{47}{99}}$ $\mathbf{1,\widehat{237} = \frac{1\,272}{999}}$ $\mathbf{0,4\widehat{21} = \frac{417}{990}}$

$\mathbf{4,\widehat{3} = \frac{13}{3}}$ $\mathbf{0,\widehat{415} = \frac{415}{999}}$ $\mathbf{2,47\widehat{3} = \frac{742}{300}}$

24. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 3 y la suma de los dos primeros 8/3. Formar la progresión.

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; ... ; ÷÷ 4 ; $-\frac{4}{3}$; $\frac{4}{9}$; ...**

25. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de términos positivos es 7, y la diferencia de los primeros 25/7. Hallar la suma de los cuatro primeros.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{2\,385}{343}}$

26. En un cuadrado de dos metros de lado se inscribe otro cuadrado con sus vértices en los puntos medios del primero. Luego se toman los puntos medios de los lados del segundo cuadrado como vértices de un tercer cuadrado y así sucesiva e indefinidamente. Calcular: I. La suma de los infinitos perímetros.

II. La suma de todas las áreas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S_{ÁREAS} = 8m^2 \ ; \ S_{PERÍMETROS} = 8\,(2 + \sqrt{2})\ m}$

27. En un triángulo equilátero de 4 m de lado se unen entre sí los puntos medios de los lados, obteniendo un segundo triángulo en el que se hace la misma operación y así sucesiva e indefinidamente. Calcular: I. La suma de los infinitos perímetros.

II. La suma de todas las áreas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S_{PERÍMETROS} = 24\ m^2}$; $\mathbf{S_{ÁREAS} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}\ m^2}$

28. Calcular el valor de la suma:

$$S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \dots$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \dfrac{9}{48}}$

29. Calcular el valor de la suma:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \dfrac{2}{3}}$

30. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto es 10^6. Calcularlos.

SOLUCIÓN: **÷÷ 25 ; 100 ; 400 ; ó ÷÷ 400 ; 100 ; 25**

31. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente e ilimitada es 6, y la suma de sus dos primeros términos es 9/2. Hallar el primer término de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_1 = 3}$

32. El producto de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es 216 y la suma de los tres términos −14. Hallarlos.

SOLUCIÓN: **÷÷ −2 ; 6 ; −18 ; ó ÷÷ −18 ; 6 ; −2**

33. El producto de tres números en progresión geométrica es 216. Si se multiplica el primero por 12, el segundo por 5 y el tercero por 2 se obtienen tres números en progresión aritmética, dispuestos en el mismo orden. Calcular dichos números.

SOLUCIÓN: **÷÷ 3 ; 6 ; 12 ; ó ÷÷ 2 ; 6 ; 18**

34. En una progresión geométrica, cuyos términos son positivos, cada término es igual a la suma de los dos siguientes. Hallar la razón de la progresión.

SOLUCIÓN: $\mathbf{r = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

35. En una progresión geométrica de cuatro términos el primero es el $\log_4 32$ y el último el coeficiente del cuarto término del desarrollo de $(x + y)^6$. Hallar la razón de la progresión y la suma de los cuatro términos.

SOLUCIÓN: $\mathbf{r = 2\ ;\ S = \dfrac{75}{2}}$

36. Los términos quinto y noveno de una progresión geométrica valen $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}/4$, respectivamente. Hallar el valor de la razón y la suma de los diez primeros.

SOLUCIÓN: $\mathbf{r_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ S_1 = \dfrac{31(1 + \sqrt{2})}{4}}$

37. Encontrar el quinto término de la progresión geométrica cuyos dos primeros términos son:

$$a_1 = 3\ ;\ a_2 = \frac{3}{\sqrt{5} - 1}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_5 = \dfrac{3(7 + 3\sqrt{5})}{32}}$

38. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 26 y la suma de los seis primeros 728. Hallar la suma de los nueve primeros términos.

SOLUCIÓN: **S = 19 682**

39. Entre 6 y 1 536 por una parte, y entre 14 y 224 por otra, se han interpolado el mismo número de medios proporcionales. Formar las dos progresiones, sabiendo que la razón de la primera es doble que la de la segunda.

SOLUCIÓN:
÷÷ 6 ; 24 ; 96 ; 384 ; 1 536 ;
÷÷ 14 ; 28 ; 56 ; 112 ; 224

40. Un mendigo pidió hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente proposición: Yo le pagaré 1 000 PTA por el primer día, 2 000 PTA por el segundo, 3 000 por el tercero y así sucesivamente, durante 30 días, en cambio, usted me dará 1 PTA el primer día, 2 el segundo, 4 el tercero y así sucesivamente durante los 30 días. El avaro encontró interesante la proposición y consintió en este arreglo. Liquidad la cuenta al cabo de los 30 días.

SOLUCIÓN: **S = 1 073 276 823 PTA a favor del mendigo**

41. Las edades de cuatro personas están en progresión geométrica. El producto de todas ellas es 82 944, y la persona más joven tiene 6 años. ¿Cuál es la edad de la mayor?

SOLUCIÓN: **S = 48 años**

42. Una persona envía una copia de una carta a cada uno de dos amigos suyos, rogándoles que a su vez cada uno de ellos envíe otra copia a cada uno de otros dos amigos con el mismo ruego. Después de 12 envios, ¿cuántas copias se han enviado?

SOLUCIÓN: **S = 8 190**

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \;;\; S = \frac{12\,288 \cdot 4 - 3}{4 - 1}$$

$$S = \frac{49\,149}{3} = 16\,383$$

SOLUCIÓN: **S = 16 383**

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1\, r^{n-1}$;

$12\,288 = 3 \cdot r^6$

$r^6 = 4\,096$

$r^6 = 4^6 \;;\; r = 4$

2. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$S = \frac{\dfrac{1\,280}{19\,683} \cdot \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}}{\dfrac{2}{3} - 1}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \dfrac{570\,375}{78\,098}}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{5}{3} : \frac{5}{2} = \frac{10}{9} : \frac{5}{3} = \frac{20}{27} : \frac{10}{9} = \cdots = \frac{2}{3}$$

$r = \frac{2}{3}$ $\quad a_n = a_1\, r^{n-1}$

$$a_n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{1\,280}{19\,683}$$

3. RESOLUCIÓN

$a_n = a_1\, r^{n-1}$; $62\,500 = 4 \cdot 5^{n-1}$

$5^{n-1} = 15\,625$; $5^{n-1} = 5^6$

$n - 1 = 6$

SOLUCIÓN: **n = 7**

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$78\,124 = \frac{62\,500 \cdot 5 - a_1}{4}$$

$a_1 = 4$

4. RESOLUCIÓN

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \;;\; 4 = 2\,916 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \;;\; \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$n - 1 = 6$; $n = 7$

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$S = \frac{4 \cdot \dfrac{1}{3} - 2\,916}{\dfrac{1}{3} - 1} = 4\,372$$

SOLUCIÓN: **n = 7 ; S = 4 372**

5. RESOLUCIÓN

$$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \;;\; \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \sqrt{5}$$

$$\frac{10\sqrt{5}}{10} = \sqrt{5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1\, r^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^8$

$a_n = 2 \cdot 5^4$

$a_n = 1\,250$

La sucesión propuesta es una ÷÷ *cuya razón es* $r = \sqrt{5}$

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \;;\; S = \frac{1\,250\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 1} = 1\,562 - 312\sqrt{5}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 1\,562 - 312\sqrt{5}}$

6. RESOLUCIÓN

Se trata de la suma de los términos de una ÷÷ *de la que deducimos los siguientes datos:*

$a_1 = 1$; $a_n = 2^x$; $r = 2$; ; $S = 4\,095$; $S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$

$$4\,095 = \frac{2^x \cdot 2 - 1}{2 - 1} \;;\; 4\,096 = 2^{x+1} \;;\; 2^{12} = 2^{x+1}$$

$x + 1 = 12$; $x = 11$

SOLUCIÓN: **x = 11**

7. RESOLUCIÓN

$a_3 = a_2\, r = 15r$ $\quad a_4 = a_2 r^2 = 15r^2$ $\quad \left.\begin{array}{l} a_3 + a_4 = 180 \\ 15r + 15r^2 = 180 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 = 3 \\ r_2 = -4 \end{array}$

Vamos a resolver el problema para $r_1 = 3$. *Para este valor de r el valor de* a_1 *es 5.*

Cálculo de a_6:

$a_n = a_1\, r^{n-1}$; $a_6 = 5 \cdot 3^5 = 1\,215$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1\, r^{n-1}$;

$a_{10} = 5 \cdot 3^9 = 98\,415$

Cálculo de la suma de los 10 primeros.

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \;;\; S = \frac{98\,415 \cdot 3 - 5}{2} = 147\,620$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_6 = 1\,215 \;;\; S = 147\,620}$

Análogamente se resolvería para $r_2 = -4$.

8. RESOLUCIÓN

$$a_{12} = a_{10}\, r^2 \;;\; \frac{148}{9} = a_{10} \cdot \frac{4}{9} \;;\; a_{10} = 37$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_{10} = 37}$

9. RESOLUCIÓN

1,60 — 1,60 r — 1,60 r² — 1,60 r³

$1{,}60 + 1{,}60\, r + 1{,}60\, r^2 + 1{,}60 r^3 = 64$

$1{,}6\, r^3 + 1{,}6\, r^2 + 1{,}6\, r - 62{,}4 = 0$

$r^3 + r^2 + r - 39 = 0$

	1	1	1	− 39
3		3	12	39
	1	4	13	0

$r = 3$

÷÷ 1,60; 4,80; 14,40; 43,20

SOLUCIÓN: **÷÷ 1,60 ; 4,80 ; 14,40 ; 43,20**

10. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 = 49 \\ a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 = 105 \end{array}\right|$ $a_1\, r^3 = 56$; $a_1 = \frac{56}{r^3}$

$$\frac{56}{r^3} + \frac{56}{r^2} + \frac{56}{r} = 49$$

$49\, r^3 - 56\, r^2 - 56\, r - 56 = 0$

	49	− 56	− 56	− 56
2		98	84	56
	49	42	28	0

$r = 2$; $a_1 = 7$

SOLUCIÓN: **÷÷ 7 ; 14 ; 28 ; 56**

11. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 12 \\ a_3 + a_4 = 300 \end{array}\right|$ $\quad \left.\begin{array}{l} a_1 + a_1\, r = 12 \\ a_1\, r^2 + a_1\, r^3 = 300 \end{array}\right|$ $\quad \left.\begin{array}{l} a_1\,(1 + r) = 12 \\ a_1\, r^2\,(1 + r) = 300 \end{array}\right|$

$$\frac{a_1\, r^2\,(1 + r)}{a_1\,(1 + r)} = \frac{300}{12} \;;\; r^2 = 25 \;;\; r_1 = 5 \;;\; r_2 = -5$$

Descartamos el valor dado para $r_2 = -5$ *porque no daría para todos los números valores naturales.*

Para $r = 5$ *es* $a_1 = 2$, *por tanto la progresión será:*

÷÷ 2 ; 10 ; 50 ; 250

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; 10 ; 50 ; 250**

12. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 26 \\ a_5 + a_6 + a_7 = 2\,106 \end{array}\right|$ $\quad \left.\begin{array}{l} a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 = 26 \\ a_1\, r^4 + a_1\, r^5 + a_1\, r^6 = 2\,106 \end{array}\right|$

$\left.\begin{array}{l} a_1\,(1 + r + r^2) = 26 \\ a_1\, r^4\,(1 + r + r^2) = 2\,106 \end{array}\right|$ $\quad \dfrac{a_1\, r^4\,(1 + r + r^2)}{a_1\,(1 + r + r^2)} = \dfrac{2\,106}{26}$

$r^4 = 81$; $r = 3$; $a_1\,(1 + 3 + 9) = 26$; $a_1 = 2$

÷÷ 2; 6; 18; 54; 162; 486; 1 458

SOLUCIÓN: **÷÷ 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; 486 ; 1 458**

13. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 189 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 378 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 = 189 \\ a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6 = 378 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = 189 \\ a_1r\,(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = 378 \end{array}\right\} \quad r = 2 \;;\; a_1 = 3$$

$$a_n = a_1r^{n-1} = 3 \cdot 2^6 = 192 \;;\; S = \frac{a_nr - a_1}{r - 1} = \frac{192 \cdot 2 - 3}{2 - 1} \;;\; S = 381$$

SOLUCIÓN: **$S = 381$**

14. RESOLUCIÓN

Se trata de una $\div\div$ *de razón 4.*

$$P = \sqrt{(a_1\,a_n)^n} \;;\; P = \sqrt{(3 \cdot 16\,384)^8}$$

$$P = (3 \cdot 16\,384)^4 = 49\,152^4$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$a_n = a_1\,r^{n-1}$$

$$a_n = 3 \cdot 4^7 = 16\,384$$

SOLUCIÓN: **$P = 49\,152^4$**

15. RESOLUCIÓN

$$\div\div\; \frac{a_2}{r} \;;\; a_2 \;;\; a_2r$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2r = 1\,000 \quad (1) \\ \frac{a_2}{r} + a_2 + a_2r = 62 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_2 = 10 \\ r = 5 \;\; ó \;\; r = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\div\div\; 2 \;;\; 10 \;;\; 50 \;; \quad ó \quad \div\div\; 50 \;;\; 10 \;;\; 2$$

SOLUCIÓN: **$\div\div$ 2 ; 10 ; 50 ó $\div\div$ 50 ; 10 ; 2**

NOTA. Siempre que nos den el producto de tres términos de una $\div\div$ se ponen en función del central. Se obtiene inmediatamente éste. En nuestro ejercicio de la ecuación (1) obtenemos directamente $a_2 = 10$, con lo que el resto del problema es sencillísimo.

16. RESOLUCIÓN

Como el volumen de un paralelepípedo es el producto de sus tres aristas , tendremos:

$$\div\div\; \frac{a_2}{r} \;;\; a_2 \;;\; a_2r$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2r = 216 \\ \frac{a_2}{r} + a_2 + a_2r = 26 \end{array}\right\} \quad a_2 = 6 \;;\; r = 3$$

$$\div\div\; 2\text{ cm} \;;\; 6\text{ cm} \;;\; 18\text{ cm}$$

SOLUCIÓN: **$\div\div$ 2 cm ; 6 cm ; 18 cm**

17. RESOLUCIÓN

$$a_n = a_1\,r^{n-1} \;;\; a^{11} = a^2\,r^6 \;;\; r^6 = a^9 \;;\; r = \sqrt[6]{a^9} \;;\; r = \sqrt{a^3}$$

$$P = \sqrt{(a_1\,a_n)^n} \;;\; P = \sqrt{(a^2 \cdot a^{11})^7} = \sqrt{(a^{13})^7} = \sqrt{a^{91}} \,;\, P = a^{45}\sqrt{a}$$

SOLUCIÓN: **$r = \sqrt{a^3}$; $P = a^{45}\sqrt{a}$**

18. RESOLUCIÓN

El problema equivale a formar una $\div\div$*, tal que:*

$$a_1 = 2;\; a_n = 486;\; n = 6$$

$$a_n = a_1\,r^{n-1} \;;\; 486 = 2 \cdot r^5 \;;\; r^5 = 243 \;;\; r = 3$$

$$\div\div\; 2 \;;\; 6 \;;\; 18 \;;\; 54 \;;\; 162 \;;\; 486$$

SOLUCIÓN: **$\div\div$ 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; 486**

19. RESOLUCIÓN

Observemos que esta sucesión es una $\div\div$ *de razón* $r = 1/3$*. Como es decreciente e ilimitada:*

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{3}} \;;\; S = \frac{15}{4}$$

SOLUCIÓN: **$S = \frac{15}{4}$**

20. RESOLUCIÓN

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{4} : \frac{1}{2} = \frac{2\,(2 - \sqrt{2})}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} : \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})\,(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})\,(2 + \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Se trata de una $\div\div$ *de* $r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$*, decreciente, por tanto, e ilimitada:*

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \;;\; S = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN: **$S = \frac{\sqrt{2}}{2}$**

21. RESOLUCIÓN

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ldots = 2^{1/2}\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}}}\ldots = 2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdot 2^{1/8} \ldots = 2^{1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots}$$

Hallamos la suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$*, que es la suma de los términos de una* $\div\div$ *decreciente (*$r = 1/2$*) e ilimitada.*

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ldots = 2^{1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots} = 2^1 = 2$$

SOLUCIÓN: **$S = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\ldots}} = 2$**

22. RESOLUCIÓN

Cálculo de la suma: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

Cálculo de la suma: $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135} + \ldots$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{2/5}{1 - 1/3} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots}{\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135} + \ldots} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN: **$S = \frac{5}{3}$**

23. RESOLUCIÓN

a) $0{,}\widehat{47} = 0{,}47 + 0{,}0047 + 0{,}000047 + \ldots$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0{,}47}{1 - 0{,}01} = \frac{47}{99}$$

SOLUCIÓN: **$0{,}\widehat{47} = \frac{47}{99}$**

b) $0{,}\widehat{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \frac{1}{3}$$

$$4{,}\widehat{3} = 4 + 0{,}\widehat{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

SOLUCIÓN: **$4{,}\widehat{3} = \frac{13}{3}$**

c) $0{,}\widehat{273} = 0{,}273 + 0{,}000273 + \ldots$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0{,}273}{1 - 0{,}001} = \frac{0{,}273}{0{,}999} = \frac{273}{999}$$

$1,\widehat{273} = 1 + \frac{273}{999} = \frac{1\,272}{999}$ SOLUCIÓN: $\boxed{1,\widehat{273} = \frac{1\,272}{999}}$

d) $0,\widehat{415} = 0,415 + 0,000415 + ...$

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0,415}{1-0,001} = \frac{415}{999}$ SOLUCIÓN: $\boxed{0,\widehat{415} = \frac{415}{999}}$

e) $0,\widehat{21} = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + ...$

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0,21}{1-0,01} = \frac{21}{99}$

$0,4\widehat{21} = \frac{4,\widehat{21}}{10} = \frac{4 + 0,\widehat{21}}{10} = \frac{4 + 21/99}{10} = \frac{417}{990}$

f) $0,\widehat{3} = ... = \frac{1}{3}$ SOLUCIÓN: $\boxed{0,4\widehat{21} = \frac{417}{990}}$

$2,47\widehat{3} = \frac{247,\widehat{3}}{100} = \frac{247 + 0,\widehat{3}}{100} = \frac{247 + 1/3}{100} = \frac{742}{300}$

SOLUCIÓN: $\boxed{2,47\widehat{3} = \frac{742}{300}}$

24. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} S = \frac{a_1}{1-r} &= 3 \\ a_1 + a_2 &= \frac{8}{3} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \frac{a_1}{1-r} &= 3 \\ a_1 + a_1 r &= \frac{8}{3} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ r &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right| \text{ ó } \left|\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ r &= -\frac{1}{3} \end{aligned}\right.$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\div\ 2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{9}\ ;\ ...\ ;\ \div\div\ 4\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ ...}$

25. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-r} \\ a_1 - a_2 &= \frac{25}{7} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \frac{a_1}{1-r} &= 7 \\ a_1 - a_1 r &= \frac{25}{7} \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} a_1 &= 5\ ;\ \cancel{a_1' = -5} \\ r &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$

$S = \frac{\frac{40}{343} \cdot \frac{2}{7} - 5}{\frac{2}{7} - 1} = \frac{2\,385}{343}$

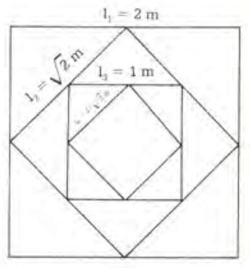
CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1\, r^{n-1}$

$a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{40}{343}$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = \frac{2\,385}{343}}$

26. RESOLUCIÓN



$l_1 = 2\text{ m}\ ;\ S_1 = 4\text{ m}^2\ ;\ P_1 = 8\text{ m}$

$l_2 = \sqrt{2}\text{ m}\ ;\ S_2 = 2\text{ m}^2\ ;\ P_2 = 4\sqrt{2}\text{ m}$

$l_3 = 1\text{ m}\ ;\ S_3 = 1\text{ m}^2\ ;\ P_3 = 4\text{ m}$

$l_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ S_4 = \frac{1}{2}\text{ m}^2\ ;\ P_4 = 2\sqrt{2}\text{ m}$

I. La suma de las infinitas áreas es la suma de los infinitos términos de una $\div\div$ *tal que* $a_1 = 4\text{m}^2$ *y* $r = 1/2$*, por tanto:*

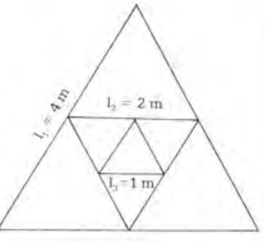
$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1 - 1/2}\ ;\ S = 8\text{ m}^2$

II. La suma de los infinitos perímetros es la suma de los infinitos términos de una $\div\div$ *tal que* $a_1 = 8$ *m y* $r = \sqrt{2}/2$*, por tanto:*

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{8}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\ ;\ S = 8\,(2 + \sqrt{2})\text{ m}$

SOLUCIÓN: $\boxed{S_{\text{ÁREAS}} = 8\text{m}^2\ ;\ S_{\text{PERÍMETROS}} = 8\,(2 + \sqrt{2})\text{ m}}$

27. RESOLUCIÓN



$l_1 = 4\text{ m}\ ;\ P_1 = 12\text{ m}\ ;\ S_1 = 4\sqrt{3}\text{ m}^2$

$l_2 = 2\text{ m}\ ;\ P_2 = 6\text{ m}\ ;\ S_2 = \sqrt{3}\text{ m}^2$

$l_3 = 1\text{ m}\ ;\ P_3 = 3\text{ m}\ ;\ S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$

$l_4 = \frac{1}{2}\text{ m}\ ;\ P_4 = 1,5\text{ m}\ ;\ S_4 = \frac{\sqrt{3}}{16}\text{ m}^2$

I. La suma de los infinitos perímetros es la suma de los infinitos términos de una $\div\div$ *tal que* $a_1 = 12$ *m y* $r = 1/2$*, por tanto:*

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{12}{1 - 1/2}\ ;\ S = 24\text{ m}$

II. La suma de todas las áreas es la suma de los infinitos términos de una $\div\div$ *tal que* $a_1 = 4\sqrt{3}\text{ m}^2$ *y* $r = 1/4$*, por tanto:*

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}}\ ;\ S = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{ m}^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{S_{\text{PERÍMETROS}} = 24\text{ m}^2\ ;\ S_{\text{ÁREAS}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{ m}^2}$

28. RESOLUCIÓN

$S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + ...$

$S = \left|\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + ...\right| + \left|\frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^4} + \frac{2}{7^6} + ...\right| = S_1 + S_2$

$S_1 = \frac{a_1}{1-r}\ ;\ S_1 = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{49}} = \frac{7}{48}\ ;\ S_2 = \frac{a'_1}{1-r'}$

$S_2 = \frac{\frac{2}{49}}{1 - \frac{1}{49}} = \frac{2}{48}\ ;\ S = S_1 + S_2 = \frac{7}{48} + \frac{2}{48} = \frac{9}{48}$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = \frac{9}{48}}$

29. RESOLUCIÓN

$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ...$

$S = \left|1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...\right| - \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + ...\right| = S_1 - S_2$

$S_1 = \frac{a_1}{1-r}\ ;\ S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$S_2 = \frac{a'_1}{1-r'}\qquad S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

$S = S_1 - S_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{S = \frac{2}{3}}$

30. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2 r &= 10^6 \\ \frac{a_2}{r} + a_2 + a_2 r &= 525 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} a_2 &= 100 \\ r = 4\ &;\ r' = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\div\ 25\ ;\ 100\ ;\ 400\ ;\quad \text{ó}\quad \div\div\ 400\ ;\ 100\ ;\ 25}$

31. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} S = \frac{a_1}{1-r} &= 6 \\ a_1 + a_1 r &= \frac{9}{2} \end{aligned}\right| \quad a_1 = 3\ ;\ \cancel{a_1' = 9}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a_1 = 3}$

32. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2 r &= 216 \\ \frac{a_2}{r} + a_2 + a_2 r &= -14 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} a_2 &= 6 \\ r = -3\ &;\ r' = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\div\div\ -2;\ 6;\ -18;\ \text{ó}\ \div\div\ -18;\ 6;\ -2}$

33. RESOLUCIÓN

$\frac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2 r = 216$; $a_2 = 6$

$\frac{6}{r}$; 6 ; 6r ÷ $\quad \frac{72}{r} + d = 30$, $30 + d = 12r$ $\quad r_1 = 2$, $r_2 = 3$

$\frac{72}{r}$; 30 ; 12r ; ÷

÷ 3 ; 6 ; 12 ; ó ÷ 2 ; 6 ; 18

SOLUCIÓN: **÷ 3 ; 6 ; 12 ; ó ÷ 2 ; 6 ; 18**

34. RESOLUCIÓN

$a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$

$a_n = a_n r + a_n r^2$

$a_n = a_n (r + r^2)$; $1 = r + r^2$; $r^2 + r - 1 = 0$

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Descartamos $r_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ porque daría una sucesión de términos alternativamente positivos y negativos.

SOLUCIÓN: $\mathbf{r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

35. RESOLUCIÓN

Cálculo de a_1 y a_4:

$$\log_4 32 = a_1 \; ; \; 32 = 4^{a_1} \; ; \; 2^5 = 2^{2a_1} \; ; \; a_1 = \frac{5}{2}$$

$$T_4 = \binom{6}{3} x^3 y^3 \; ; \; T_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 y^3 = 20 x^3 y^3 \; ; \; a_4 = 20$$

Cálculo de la razón y de la suma:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \; ; \; 20 = \frac{5}{2} r^3 \; ; \; r^3 = 8 \; ; \; r = 2$$

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \; ; \; S = \frac{20 \cdot 2 - 5/2}{2 - 1} = \frac{75}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{r = 2 \; ; \; S = \frac{75}{2}}$

36. RESOLUCIÓN

Cálculo de la razón:

$$a_9 = a_5 r^4 \; ; \; \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2} r^4 \; ; \; r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; r_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cálculo de la suma de los diez primeros.

Vamos a resolver el problema sólo para $r = 1/\sqrt{2}$

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$S = \frac{\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

$$S = \frac{31 (1 + \sqrt{2})}{4}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_{10} = a_9 r$

$a_{10} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$; $a_{10} = \frac{1}{4}$

$a_5 = a_1 r^4$

$\sqrt{2} = a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$; $a_1 = 4\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; S_1 = \frac{31 (1 + \sqrt{2})}{4}}$

37. RESOLUCIÓN

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_5 = 3 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^4$

$a_5 = \frac{3 (7 + 3\sqrt{5})}{32}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_2 = a_1 r$; $\frac{3}{\sqrt{5} - 1} = 3r$

$r = \frac{1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a_5 = \frac{3 (7 + 3\sqrt{5})}{32}}$

38. RESOLUCIÓN

Cálculo del primer término y de la razón:

$a_1 + a_2 + a_3 = 26$, $a_4 + a_5 + a_6 = 702$ $\quad$ $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 26$, $a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 = 702$

$a_1 r^3 (1 + r + r^2) = 702$, $a_1 (1 + r + r^2) = 26$ $\quad$ $a_1 = 2$; $r = 3$

Cálculo de la suma de los nueve primeros:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$S = \frac{13\,122 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 19\,682$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot 3^8$

$a_n = 13\,122$

SOLUCIÓN: **S = 19 682**

39. RESOLUCIÓN

Supongamos que en ambos casos se interpolan m términos:

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = a_1 (2r)^{m+1}$, $a_n' = a_1' r^{m+1}$ $\quad$ $1\,536 = 6 (2r)^{m+1}$, $224 = 14 r^{m+1}$

$256 = (2r)^{m+1}$, $16 = r^{m+1}$ $\quad$ $256 = 2^{m+1} \cdot r^{m+1}$, $16 = r^{m+1}$ $\quad$ $2^{m+1} = 16$; $m = 3$

Para $m = 3$ de $16 = r^{m+1}$ deducimos $r = 2$ y, por tanto, $2r = 4$. Por tanto las ÷ serán:

÷ 6 ; 24 ; 96 ; 384 ; 1 536 ; ÷ 14 ; 28 ; 56 ; 112 ; 224

SOLUCIÓN: **÷ 6 ; 24 ; 96 ; 384 ; 1 536 ; ÷ 14 ; 28 ; 56 ; 112 ; 224**

40. RESOLUCIÓN

El dinero que tiene que pagar el mendigo es la suma de los términos de una ÷ tal que $a_1 = 1\,000$; $d = 1\,000$ y $n = 30$. Será:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

$$S = \frac{(1\,000 + 30\,000) \cdot 30}{2}$$

S = 465 000 PTA

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$

$a_n = 1\,000 + 29 \cdot 1\,000$

$a_n = 30\,000$

SOLUCIÓN: **S = 465 000 PTA pagaría el mendigo al avaro**

El dinero que tiene que pagar el avaro es la suma de los términos de una ÷ tal que $a_1 = 1$; $r = 2$; y $n = 30$. Será:

$$S' = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$S' = \frac{536\,870\,912 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1\,073\,741\,823 \text{ PTA}$$

$S' - S = 1\,073\,741\,823 - 450\,000$

$S' - S = 1\,073\,276\,823$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_n = 1 \cdot 2^{29}$

$a_n = 536\,870\,912$

SOLUCIÓN: **S = 1 073 276 823 PTA a favor del mendigo**

41. RESOLUCIÓN

$P = \sqrt{(a_1\, a_n)^n}$

$82\,944 = \sqrt{(6a_n)^4}$; $82\,944 = (6a_n)^2$; $a_n = 48$

SOLUCIÓN: **S = 48 años**

42. RESOLUCIÓN

Las sucesivas copias forma la ÷ 2, 4, 8,... y el número de copias enviadas es la suma de los 12 primeros términos de esta ÷, por tanto:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$S = \frac{4\,096 \cdot 2 - 2}{2 - 1}$$

S = 8 190

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot 2^{11}$

$a_n = 4\,096$

SOLUCIÓN: **S = 8 190**

Bloque 5

- ✔ Introducción
- ✔ Espacios vectoriales
- ✔ Plano afín, incidencia y paralelismo. Producto escalar. Plano Euclídeo

INTRODUCCIÓN

Ley de composición interna

Dado un conjunto C se llama ley de composición interna en C a toda aplicación de $C \times C \longrightarrow C$

Algunas posibles propiedades de las leyes de composición interna.

I. Propiedad asociativa

Una ley $*$ *es asociativa en un conjunto* C *si se verifica:*

$$\forall x, y, z \in C: \ (x * y) * z = x * (y * z)$$

II. Propiedad conmutativa

Una ley $*$ *es conmutativa en un conjunto* C *si se verifica:*

$$\forall x, y \in C: x * y = y * x$$

III. Elemento neutro

Una ley $*$ *tiene elemento neutro en un cojunto* C *si existe un* $e \in C$*, que verifique:*

$$\forall x \in C, \exists e \in C: x * e = e * x = x$$

IV. Elemento simétrico

Una ley $*$ *tiene elemento simétrico en un conjunto* C *si se verifica:*

$$\forall x \in C, \exists x' \in C: x * x' = x' * x = e$$

V. Propiedad distributiva

Una ley $*$ *es distributiva por la izquierda, en un conjunto* C, *respecto a otra ley* $\perp$, *si se verifica:*

$$\forall x, y, z \in C: x * (y \perp z) = (x * y) \perp (x * z)$$

Una ley $*$ *es distributiva por la derecha, en un conjunto* C, *respecto a otra ley* $\perp$, *si se verifica:*

$$\forall x, y, z \in C: (y \perp z) * x = (y * x) \perp (z * x)$$

La ley $*$ *es distributiva respecto a la ley* $\perp$ *cuando lo es simultáneamente por la izquierda y por la derecha.*

Estructuras algebraicas

Cuando en un conjunto C *están definidas una o varias leyes, se dice que* C *está dotado de una estructura algebraica.*

a. Semigrupo

Si en un conjunto S, *no vacío, está definida una l. c. i.* $*$, *y ésta es asociativa, se dice que* S *tiene estructura de semigrupo respecto a la ley* $*$, *o que* $(S, *)$ *es un semigrupo*

Si en un semigrupo la ley $*$ *es conmutativa, el semigrupo se dice que es abeliano o conmutativo.*

Si en un semigrupo la ley $*$ *tiene elemento neutro se dice que el semigrupo tiene elemento neutro.*

b. Grupo

Si en un conjunto G, *no vacío, está definida una l. c. i.* $*$, *y ésta es asociativa, con elemento neutro y tal que cada elemento de* G *posee su simétrico, se dice que* G *tiene estructura de grupo respecto a la ley* $*$, *o que* $(G, *)$ *es un grupo.*

Si en un grupo $(G, *)$ *la ley* $*$ *tiene la propiedad conmutativa, el grupo se dice que es abeliano o conmutativo.*

c. Anillo

Si en un conjunto A, no vacío, están definidas dos l. c. i. $+$ *y* $\times$, *tales que:*

I. $(A, +)$ es un grupo abeliano

II. $(A, \times)$ es un semigrupo

III. La ley $\times$ es distributiva respecto de la $+$

se dice que el conjunto A tiene estructura de anillo para las operaciones $+$ *y* $\times$, *o bien que* $(A, +, \times)$ *es un anillo.*

Si en un anillo $(A, +, \times)$ *la segunda ley tiene elemento neutro, el anillo se llama unitario.*

Si en un anillo $(A, +, \times)$ *la segunda ley tiene la propiedad conmutativa, el anillo es abeliano o conmutativo.*

ESPACIOS VECTORIALES

El espacio vectorial $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$

Se dice que el conjunto $\mathbf{R}^2$ *tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo* **R** *porque:*

a. *Se ha definido una ley de composición interna en* $\mathbf{R}^2$, *es decir, una aplicación de* $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, *la adición, tal que* $(\mathbf{R}^2, +)$ *tiene estructura de grupo abeliano.*

b. *Se ha definido una ley de composición externa en* $\mathbf{R}^2$, *es decir, una aplicación de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, *tal que:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (\alpha + \beta)\,\vec{v}_1 = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_1 \\ \text{II.} & \alpha\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\,\vec{v}_1 + \alpha\,\vec{v}_2 \\ \text{III.} & \alpha\,(\beta\,\vec{v}_1) = (\alpha\,\beta)\,\vec{v}_1 \\ \text{IV.} & 1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\,\alpha, \beta \in \mathbf{R} \\ \\ \forall\,\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{R}^2 \end{array}$$

Dependencia lineal de dos vectores del $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$

El $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *perteneciente al espacio vectorial* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ *definido sobre* **R** *se dice que son linealmente dependientes, o que forman un sistema ligado, si los números reales* α *y* β *que verifican:*

$$\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

no han de ser necesariamente $\alpha = \beta = 0$

Independencia lineal de dos vectores del $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$

El $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *perteneciente al espacio vectorial* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ *definido sobre* **R** *se dice que son linealmente independientes, o que forman un sistema libre, si los números reales* α *y* β *que verifican:*

$$\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y} = \vec{0}$$

han de ser necesariamente $\alpha = \beta = 0$

d. Cuerpo

Si en un conjunto C, *no vacío, están definidas dos l. c. i.* $+$ *y* $\times$, *tales que:*

I. $(C, +)$ es un grupo abeliano

II. El conjunto C, excluido el cero, es un grupo multiplicativo, es decir: $(C - 0, \times)$ es un grupo

III. La ley $\times$ *es distributiva respecto de la* $+$

se dice que el conjunto C *tiene estructura de cuerpo para las operaciones* $+$ *y* $\times$, *o bien que* $(C, +, \times)$ *es un cuerpo.*

Ley de composición externa

Dados dos conjuntos A *y* B *se llama ley de composición externa en* B, *con dominio de operadores en* A, *a toda aplicación de* $A \times B \longrightarrow B$

Combinación lineal de vectores en el $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$

Un $\vec{v} \neq \vec{o}$, *pertenecientes al espacio vectorial* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$, *es combinación lineal de los* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *pertenecientes a* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ *si existen dos números reales* α *y* β, *tales que:*

$$\vec{v} = \alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}$$

Sistemas de generadores en $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$

El $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ *pertenecientes al espacio vectorial* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$, *forman un sistema de generadores de* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ *si todo* $\vec{v} \in (\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ *se puede expresar como combinación lineal de los* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$.

Base del $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$

Un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ *perteneciente al* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$, *se dice que forman una base de* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ *si los vectores del conjunto* B *son linealmente independientes y, además, forman un sistema de generadores.*

Coordenadas de un vector en el $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$

Se llaman coordenadas de un $\vec{v}$ *perteneciente al* $(\mathbf{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow \mathbf{R}$, *respecto a la base* $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, *a los números* α *y* β *que verifican:*

$$\vec{v} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demostrar que los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, siendo a y b elementos de **Q**, constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo **Q**.

SOLUCIÓN:

El $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Q, b \in Q\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

2. Averiguar si los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, siendo a y b elementos de **Z**, constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo **Q**.

SOLUCIÓN:

El $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Z, b \in Z\}$ no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

3. Llamando $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$, y definiendo en $R_2[x]$ la suma y el producto por un número real, del siguiente modo:

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) =$$
$$= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$
$$\alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1) = (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)$$

probar que $R_2[x]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo **R**.

SOLUCIÓN:

El $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

4. En R^2 definimos las operaciones adición y multiplicación por un escalar del siguiente modo:

$$\forall (a, b), (a', b') \in R^2 : (a, b) + (a', b') = [(a + a'), (b + b')]$$
$$\forall (a, b) \in R^2 ; \forall \alpha \in R : \alpha(a, b) = [\alpha a, 0]$$

Determinar si se ha definido un espacio vectorial de R^2 sobre **R**.

SOLUCIÓN:

El R^2 tal como se han definido la adición y multiplicación por un escalar no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

5. Llamando $R_1[x] = \{ax + b \mid a, b \in R\}$, y definiendo en $R_1[x]$ la suma y el producto por un número real, del siguiente modo:

$$(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)$$
$$\alpha(a_1x + b_1) = (\alpha a_1)x + (\alpha b_1)$$

probar que $R_1[x]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo **R**

SOLUCIÓN:

El $R_1[x] = \{ax + b \mid a \in R, b \in R\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

6. Dada la relación entre elementos de R^2:

$$[(2a - 3b), (a + 2b)] = (7, 0)$$

hallar a y b.

SOLUCIÓN: **$a = 2$; $b = -1$**

7. Hallar a y b para que los pares $(-2a, 3b)$ y $(-6, 6)$ sean iguales.

SOLUCIÓN: **$a = 3$; $b = 2$**

8. Calcular α para que $(4, 9) = \alpha(2, 3)$.

SOLUCIÓN:

No existe ningún valor de α para el que $(4, 9) = \alpha(2, 3)$

9. Dados $\vec{x} = (1, 2)$; $\vec{y} = (-1, 1)$; $\vec{z} = (-2, -1)$ calcular:

I) $(\vec{x} - \vec{y}) - \vec{z}$ II) $(2\vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{z}$
III) $3\vec{x} - (2\vec{y} - \vec{z})$ IV) $(\vec{x} - 2\vec{y}) + \vec{z}$

SOLUCIÓN I): **$(\vec{x} - \vec{y}) - \vec{z} = (4, 2)$**

SOLUCIÓN II): **$(2\vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{z} = (5, 7)$**

SOLUCIÓN III): **$3\vec{x} - (2\vec{y} - \vec{z}) = (3, 3)$**

SOLUCIÓN IV): **$(\vec{x} - 2\vec{y}) + \vec{z} = (1, -1)$**

10. ¿Existe algún $\alpha \in Q$ que satisfaga la relación:

$$\alpha(\sqrt{2}, -1) = (2, -\sqrt{2})\ ?$$

SOLUCIÓN

No. La citada relación se verifica pra $\alpha = \sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin Q$

11. Dados $\vec{x} = (-2, 1)$; $\vec{y} = (4, 2)$; $\alpha = 3$ comprobar que:

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

SOLUCIÓN: **$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + x\vec{y} = (6, 9)$**

12. Dados $\vec{x} = (-1, 3)$; $\alpha = 4$ y $\beta = 2$ comprobar que:

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$$

SOLUCIÓN: **$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} = (-6, 18)$**

13. Dados $\vec{x} = (-2, 1)$; $\alpha = 5$ y $\beta = -2$ comprobar que:

$$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$$

SOLUCIÓN: **$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x} = (20, -10)$**

14. Calcular m y n de modo que se verifique:

$$m(2, -4) + n(-3, 7) = (3, -5)$$

SOLUCIÓN: **$m = 3$; $n = 1$**

15. Dados $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ y $\vec{c} = (1, 0)$ determinar:

I) Un $\vec{v}_1$ que sea combinación lineal de los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
II) La expresión general de cualquier $\vec{v}$ que sea combinación lineal de los $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
III) Si $\vec{w} = (4, 1)$ es combinación lineal de los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

SOLUCIÓN I): **$\vec{v} = (8, -1)$**

SOLUCIÓN II): **$\vec{v} = \alpha(2, 1) + \beta(-1, 3) + \gamma(1, 0)$**

SOLUCIÓN III): **$\vec{w}$ es combinación lineal de los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$**

16. Dados $\vec{a} = (2, -1)$ y $\vec{b} = (-4, 2)$ determinar:

I) Un $\vec{v}_1$ que sea combinación lineal de los $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
II) La expresión general de cualquier $\vec{v}$ que sea combinación lineal de los $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
III) Si $\vec{w} = (5, 3)$ es combinación lineal de los $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

SOLUCIÓN I): **$\vec{v} = (-2, 1)$**

SOLUCIÓN II): **$\vec{v} = \alpha(2, -1) + \beta(-4, 2)$**

SOLUCIÓN III): **$\vec{w}$ no es combinación lineal de los $\vec{a}$ y $\vec{b}$**

17. Determinar si el $\vec{v} = (2, 1)$ es combinación lineal del sistema formado por los $\vec{u}_1 = (2, 3)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 2)$.

SOLUCIÓN: **Sí, $\vec{v} = \frac{5}{7}\vec{u}_1 - \frac{4}{7}\vec{u}_2$**

18. Determinar si el $\vec{v} = (3, 3)$ es combinación lineal del sistema formado por $\{\vec{u}_1 = (2, 1)\ ;\ \vec{u}_2 = (4, 2)\}$.

SOLUCIÓN: **No, $\vec{v} \neq \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$**

19. Determinar si los $\vec{x} = (2, 3)$, $\vec{y} = (-1, 1)$ son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ no son linealmente dependientes**

20. Determinar si los $\vec{x} = (2, -1)$; $\vec{y} = (-2, 1)$ son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ son linealmente dependientes**

21. Determinar si el $\{\vec{u}_1 = (2, 1), \vec{u}_1 = (-2, -1)\}$ forman un sistema ligado.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_1$ forman un sistema ligado**

22. Averiguar si los $\vec{x} = (2, 4)$; $\vec{y}_1 = (1, 1)$ son linealmente independientes.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ son linealmente independientes**

23. Determinar si el $\{\vec{x} = (1, 1); \vec{y} = (-2, -2)\}$ forman un sistema libre.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ no forman un sistema libre**

24. Determinar si los $\vec{x} = (1, 2)$; $\vec{y} = (1, 1)$; $\vec{z} = (2, 1)$ son linealmente independientes.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ no son linealmente independientes**

25. Averiguar si los $\vec{a} = (2, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 0)$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN:

Los $\vec{a}$, $\vec{b}$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$

26. Determinar si los $\vec{u}_1 = (1, 2)$ y $\vec{u}_2 = (-2, -4)$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN:

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ no forman un sistema de generadores.

27. Averiguar si los $\vec{u}_1 = (1, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, -1)$ y $\vec{u}_3 = (-1, 1)$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN:

Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

28. Determinar si los $\vec{u}_1 = (2, 2)$ y $\vec{u}_2 = (1, 2)$ forman una base de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ forman una base de $\mathbf{R}^2$.**

29. Averiguar si los $\vec{u}_1 = (1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1)$ y $\vec{u}_3 = (1, 1)$ forman una base de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ no forman una base de $\mathbf{R}^2$.**

30. Sea el $B = \{\vec{u}_1 = (1, -1); \vec{u}_2 = (-2, 1)\}$.

I. Averiguar si forman una base de $\mathbf{R}^2$.

II. En caso afirmativo hallar las coordenadas en esa base de un $\vec{v}$, que en la base canónica es $\vec{v} = (8, -5)$.

III. Las coordenadas en la base canónica de un $\vec{w}$ que en la supuesta base B es $\vec{w}_b = (-2, 2)$.

SOLUCIÓN I):

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ del conjunto B forman una base de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN II): $\vec{v}_B = (2, -3)$

SOLUCIÓN III): $\vec{w} = (-6, 4)$

31. Sea el $B = \{\vec{u}_1 = (2, 0); \vec{u}_2 = (1, -2)\}$.

I. Comprobar que forman una base de $\mathbf{R}^2$.

II. Hallar las coordenadas en la base B de un $\vec{v}$ que en la base canónica es $\vec{v} = (4, -8)$.

III. Hallar las coordenadas en la base canónica de un $\vec{w}$ que en la base B es $\vec{w}_b = (-1, -2)$.

SOLUCIÓN I):

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ del conjunto B forman una base de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN II): $\vec{v}_B = (0, 4)$

SOLUCIÓN III): $\vec{w} = (-4, 4)$

32. Se consideran en $\mathbf{R}^2$ las bases:

$B = \{\vec{u}_1 = (1, 1); \vec{u}_2 = (2, -1)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (1, 2); \vec{v}_2 = (0, 2)\}$.

Hallar:

I. Las ecuaciones del cambio de la base B a la B'. Aplicación: las coordenadas de un $\vec{x}$ respecto de B son $(3, -1)$. Hallar las coordenadas del $\vec{x}$ respecto de B'.

II. Las ecuaciones del cambio de la base B' a la B. Aplicación: las coordenadas de un $\vec{y}$ respecto de B' son $(1, 1)$. Hallar las coordenadas del $\vec{y}$ respecto de B.

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = \dfrac{-x - 5y}{2} \end{cases}$ $\quad \vec{x}_B = (1, 1)$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} x = \dfrac{5x' + 4y'}{3} \\ y = \dfrac{-x' - 2y'}{3} \end{cases}$ $\quad \vec{y}_B = (3, -1)$

33. Se consideran en $\mathbf{R}^2$ las bases:

$B = \{\vec{u}_1 = (1, 2); \vec{u}_2 = (2, 1)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (-1, 2); \vec{v}_2 = (-2, 1)\}$.

y se sabe que las coordenadas de un $\vec{v}$, respecto de la B son $(2, 0)$. Hallar las coordenadas del $\vec{v}$ respecto B'.

SOLUCIÓN: $\vec{v}_{B'} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

34. Se consideran en $\mathbf{R}^2$ las bases:

$B = \{\vec{u}_1 = (2, 2); \vec{u}_2 = (3, -1)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (-1, 1); \vec{v}_2 = (1, -2)\}$.

Hallar:

I. Las ecuaciones del cambio de la base B a la B'. Aplicación: las coordenadas de un $\vec{x}$ respecto de B son $(-2, 1)$. Hallar las coordenadas del $\vec{x}$ respecto de B'.

VIII. *Distributividad respecto a la adición de vectores*

$$\forall \alpha \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$

$$\alpha [(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] = \alpha [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] =$$

$$= (\alpha x + \alpha y\sqrt{2}) + (\alpha z + \alpha t\sqrt{2}) = \alpha (x + y\sqrt{2}) + \alpha (z + t\sqrt{2})$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de vectores $[\alpha [(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] = \alpha (x + y\sqrt{2}) + \alpha (z + t\sqrt{2})]$

II. Las ecuaciones del cambio de la base B' a la B. Aplicación: las coordenadas de un $\vec{z}$ respecto de B' son (8, 0). Hallar las coordenadas del $\vec{z}$ respecto de B.

SOLUCIÓN I):
$$\begin{cases} x' = -6x + 5y \\ y' = -4x - 2y \end{cases} \qquad \vec{x}_{B'} = (7, 6)$$

SOLUCIÓN II):
$$\begin{cases} x = \dfrac{2x' - 5y'}{8} \\ y = \dfrac{-2x' + 3y'}{4} \end{cases} \qquad \vec{z}_{B'} = (2, -4)$$

35. Se consideran en $\mathbf{R}^2$ las bases:
$B = \{\vec{u}_1 = (2, -1);\ \vec{u}_2 = (1, 1)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (-1, -1);\ \vec{v}_2 = (1, 3)\}$
y se conocen las coordenadas de un $\vec{v}$ respecto de la base B' que son (−1, 4). Hallar las coordenadas del $\vec{v}$ respecto de la B.

SOLUCIÓN:
$$\vec{v}_B = \left(-\frac{8}{3}, \frac{31}{3}\right)$$

36. Se consideran en $\mathbf{R}^2$ las bases:
$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ y } B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}.$$
y se sabe que $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$, hallar:

I. Las ecuaciones del cambio de la base B a la B'.

II. Las ecuaciones del cambio de la base B' a la B.

SOLUCIÓN I):
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

SOLUCIÓN II):
$$\begin{cases} y = \dfrac{x' + 2y'}{7} \\ x = \dfrac{-3x' - y'}{7} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

Sea $C = \{(a + b\sqrt{2})\ a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$

I. *Ley de composición interna*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$

$$(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] \in C$$

La adición es ley de composición interna en C $[x \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{Q} \Rightarrow (x + z) \in \mathbf{Q}, \ldots$ *así que* $[(x + z) + (y + t)\sqrt{2}]$ *es un número de la forma* $(a + b\sqrt{2})$ *y pertenece a C.*

II. *Propiedad conmutativa*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$

$$(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}]$$

$$(z + t\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = [(z + x) + (t + y)\sqrt{2}]$$

La adición es conmutativa en C $[x \in \mathbf{Q},\ z \in \mathbf{Q} \Rightarrow (x + z) = (z + x), \ldots \Rightarrow (x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2})]$

III. *Propiedad asociativa*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2})\ ;\ (u + v\sqrt{2}) \in C:$$

$$[(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] + (u + v\sqrt{2}) =$$

$$= [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] + (u + v\sqrt{2}) =$$

$$= \{[(x + z) + u] + [(y + t) + v]\sqrt{2}\}$$

$$(x + y\sqrt{2}) + [(z + t\sqrt{2}) + (u + v\sqrt{2})] =$$

$$= (x + y\sqrt{2}) + [(z + u) + (t + v)\sqrt{2}] =$$

$$= \{[x + (z + u)] + [y + (t + v)]\sqrt{2}\}$$

La adición es asociativa en:

$$C\,[x \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{Q}, u \in \mathbf{Q}, \Rightarrow (x + z) + u = x + (z + u), \ldots \Rightarrow$$

$$[(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] + (u + v\sqrt{2}) =$$

$$= (x + y\sqrt{2}) + [(z + t\sqrt{2}) + (u + v\sqrt{2})]$$

IV. *Elemento neutro*

$$\forall (x + y\sqrt{2}) \in C\ ;\ \exists\,(0 + 0\sqrt{2}) \in C:$$

$$(x + y\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) = [(x + 0) + (y + 0)\sqrt{2}] = (x + y\sqrt{2})$$

La adición tiene elemento neutro en C (no hace falta analizar $(0 + \sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2})$ *porque ya vimos que era conmutativa).*

V. *Elemento simétrico*

$$\forall (x + y\sqrt{2}) \in C\ ;\ \exists\,(-x + (-y)\sqrt{2}] \in C:$$

$$(x + y\sqrt{2}) + [-x + (-y)\sqrt{2}] = 0 + 0\sqrt{2}$$

La adición tiene elemento simétrico en C.

a) (C, +) es grupo abeliano

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall \alpha \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$

$$\alpha (x + y\sqrt{2}) = [(\alpha x) + (\alpha y)\sqrt{2}] \in C$$

Hay ley de composición externa en C $[\alpha \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q} \Rightarrow \alpha x \in \mathbf{Q}, \ldots$ *así que* $[(\alpha x) + (\alpha y)\sqrt{2}]$ *es un número de forma* $(a + b\sqrt{2})$ *y pertenece a C].*

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$

$$(\alpha + \beta)(x + y\sqrt{2}) = \{(\alpha + \beta)x + [(\alpha + \beta)y]\sqrt{2}\} =$$

$$= \{(\alpha x + \beta x) + [(\alpha y) + (\beta y)]\sqrt{2}\} = \alpha (x + y\sqrt{2}) + \beta (x + y\sqrt{2})$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de escalares $[(\alpha + \beta)(x + y\sqrt{2}) = \alpha (x + y\sqrt{2}) + \beta (x + y\sqrt{2})]$

IX. *Asociatividad del producto de escalares respecto a la ley externa*

$$\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{Q} ; \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$\alpha [\beta(x + y\sqrt{2})] = \alpha [(\beta x) + (\beta y)\sqrt{2}] =$$
$$= [\alpha (\beta x) + \alpha (\beta y)\sqrt{2}] = [(\alpha\beta) x + (\alpha\beta) y\sqrt{2}] = (\alpha\beta) (x + y\sqrt{2})$$

El producto de escalares es asociativo respecto a la ley externa $\{\alpha [\beta (x + y\sqrt{2})] = (\alpha\beta) (x + y\sqrt{2})\}$.

X. *Producto por la unidad*

$$\forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$1 \cdot (x + y\sqrt{2}) = [(1x) + (1y)\sqrt{2}] = (x + y\sqrt{2})$$

b) La ley de composición externa tiene, pues, las cuatro propiedades que junto al apartado a) caracterizan al espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

El C = $\{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Q, b \in Q\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

2. RESOLUCIÓN

Sea $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Z, b \in Z\}$

I. *Ley de composición interna*

$$\forall (x + y\sqrt{2}) ; (z + t\sqrt{2}) \in C:$$
$$(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] \in C$$

La adición es ley de composición interna en C $[x \in \boldsymbol{Z}, z \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow (x + z) \in \boldsymbol{Z}, \ldots]$

Tal como hicimos en el ejercicio ***1****, continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que van cumpliendo, hasta llegar a la:*

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall \alpha \in \boldsymbol{Q} ; \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$\alpha (x + y\sqrt{2}) = [(\alpha x) + (\alpha y)\sqrt{2}]$$

NO HAY LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA EN C

$$[\alpha \in \boldsymbol{Q}, x \in \boldsymbol{Z} \not\Rightarrow \alpha x \in \boldsymbol{Z}, \ldots \not\Rightarrow [(\alpha x) + (\alpha y)\sqrt{2}] \in C]$$

SOLUCIÓN:

El C = $\{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Z, b \in Z\}$ no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

3. RESOLUCIÓN

I. *Ley de composición interna*

$$\forall (a_1x^2 + b_1x + c_1) ; (a_2x^2 + b_2x + c_2) \in \boldsymbol{R}_2 [x]:$$
$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) =$$
$$= [(a_1 + a_2) x^2 + (b_1 + b_2) x + (c_1 + c_2)] \in \boldsymbol{R}_2 [x]$$

La adición es ley de composición interna en $\boldsymbol{R}_2 [x]$.

$$[a_1 \in \boldsymbol{R}, a_2 \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) \in \boldsymbol{R}, \ldots]$$

II. *Propiedad conmutativa*

$$\forall (a_1x^2 + b_1x + c_1) ; (a_2x^2 + b_2x + c_2) \in \boldsymbol{R}_2 [x]:$$
$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) =$$
$$= [(a_1 + a_2) x^2 + (b_1 + b_2) x + (c_1 + c_2)]$$
$$(a_2x^2 + b_2x + c_2) + (a_1x^2 + b_1x + c_1) =$$
$$= [(a_2 + a_1) x^2 + (b_2 + b_1) x + (c_2 + c_1)]$$

La adición es conmutativa en $\boldsymbol{R}_2 [x]$

$[a_1 \in \boldsymbol{R}, a_2 \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) = (a_2 + a_1), \ldots \Rightarrow (a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_2x^2 + b_2x + c_2) + (a_1x^2 + b_1x + c_1)$

Tal como hicimos en el ejercicio ***1*** *continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que se van cumpliendo hasta llegar al final de la primera parte.*

a) $[\boldsymbol{R}_2 [x], +]$ **es grupo abeliano.**

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall \alpha \in \boldsymbol{R} ; \forall (a_1x^2 + b_1x + c_1) \in \boldsymbol{R}_2 [x]:$$
$$\alpha (a_1x^2 + b_1x + c_1) = (\alpha a_1) x^2 + (\alpha b_1) x + (\alpha c_1)$$

Hay ley de composición externa en $\boldsymbol{R}_2 [x]$.

$$[\alpha \in \boldsymbol{R} ; a_1 \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (\alpha a_1) \in \boldsymbol{R}, \ldots$$
$$\Rightarrow (\alpha a_1) x^2 + (\alpha b_1) x + (\alpha c_1) \in \boldsymbol{R}_2 [x]]$$

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares*

$$\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} ; \forall (a_1x^2 + b_1x + c_1) \in \boldsymbol{R}_2 [x] :$$
$$(\alpha + \beta) (a_1x^2 + b_1x + c_1) =$$
$$= [(\alpha + \beta) a_1] x^2 + [(\alpha + \beta) b_1] x + [(\alpha + \beta) c_1] =$$
$$= [(\alpha a_1) + (\beta a_1)] x^2 + [(\alpha b_1) + (\beta b_1)] x + [(\alpha c_1) + (\beta c_1)] =$$
$$= \ldots = \alpha (a_1x^2 + b_1x + c_1) + \beta (a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de escalares.

$$[(\alpha + \beta) (a_1x^2 + b_1x + c_1) =$$
$$= \alpha (a_1x^2 + b_1x + c_1) + \beta (a_1x^2 + b_1x + c_1)]$$

Análogamente al ejercicio ***1*** *continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que se van cumpliendo hasta llegar al fin de esta segunda parte.*

b) La ley de composición externa tiene las cuatro propiedades que junto al apartado a) caracterizan al espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

El $R_2 [x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

4. RESOLUCIÓN

I. *Ley de composición interna*

$$\forall (a_1, b_1) , (a_2, b_2) \in \boldsymbol{R}^2:$$
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = [(a_1 + a_2), (b_1 + b_2)] \in \boldsymbol{R}^2$$

La adición es ley de composición interna en $\boldsymbol{R}^2$ $[a_1 \in \boldsymbol{R}, a_2 \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) \in \boldsymbol{R} \ldots]$

II. *Propiedad conmutativa*

$$\forall (a_1, b_1) , (a_2, b_2) \in \boldsymbol{R}^2$$
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = [(a_1 + a_2) , (b_1 + b_2)]$$
$$(a_2, b_2) + (a_1, b_1) = [(a_2 + a_1) , (b_2 + b_1)]$$

La adición es conmutativa en $\boldsymbol{R}^2$ $[a_1 \in \boldsymbol{R}, a_2 \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) = (a_2 + a_1), \ldots \Rightarrow (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_2, b_2) + (a_1 , b_1)]$

Tal como hicimos en el ejercicio ***1*** *continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que se van cumpliendo hasta llegar al fin de la primera parte.*

a) $[\boldsymbol{R}^2, +]$ **es un grupo abeliano.**

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall \alpha \in \boldsymbol{R} ; \forall (a_1, b_1) \in \boldsymbol{R}^2:$$
$$\alpha (a_1, b_1) = [\alpha a_1, 0]$$

Hay ley de composición externa en $\boldsymbol{R}^2$.

$$[\alpha \in \boldsymbol{R}, a \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \alpha a_1 \in \boldsymbol{R}, \ldots \Rightarrow (\alpha a_1, 0) \in \boldsymbol{R}^2]$$

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares.*

$$\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} ; \forall (a_1, b_1) \in \boldsymbol{R}^2:$$
$$(\alpha + \beta) (a_1, b_1) = [(\alpha + \beta) a_1, 0] = [(\alpha a_1 + \beta a_1), 0] =$$
$$= \ldots = \alpha (a_1, b_1) + \beta (a_1, b_1)$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de escalares:

$$[(\alpha + \beta) (a_1, b_1) = \alpha (a_1, b_1) + \beta (a_1, b_1)]$$

Análogamente al ejercicio ***1*** *continuaríamos comprobando las siguientes propiedades de esta segunda parte, que se van cumpliendo hasta llegar a la:*

X. *Producto por la unidad*

$$\forall (a_1, b_1) \in \boldsymbol{R}^2:$$
$$1 \cdot (a_1, b_1) = (a_1, 0) \neq (a_1, b_1)$$

SOLUCIÓN:

El R^2 tal como se han definido la adición y multiplicación por un escalar no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

NOTAS:

I. La forma de definir la suma, en este ejemplo, diríamos que es la normal y el producto por un escalar es un tanto especial, pero las dos son completamente correctas puesto que hay aplicación de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ en el caso de la adición, y de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ en el caso de la multiplicación.

II. Obsérvese que sólo falla la propiedad $1 \times \vec{v} = \vec{v}$, lo que nos prueba que esta propiedad no es superflua.

5. RESOLUCIÓN

I. *Ley de composición interna*

$$\forall\, (a_1x + b_1),\ (a_2x + b_2) \in R_1\,[x]:$$
$$(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) = (a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2) \in R_1\,[x]$$

La adición es l. c. i. en $R_1\,[x]$

$$[a_1 \in R,\ a^2 \in R \Rightarrow (a_1 + a_2) \in R, \dots \Rightarrow$$
$$[(a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2)] \in R_1\,[x]\,]$$

II. *Propiedad conmutativa*

$$\forall(a_1x + b_1)\ ;\ (a_2x + b_2) \in R_1\,[x]:$$
$$(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) = [(a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2)]$$
$$(a_2x + b_2) + (a_1x + b_1) = [(a_2 + a_1)\,x + (b_2 + b_1)]$$

La adición es conmutativa en $R_1\,[x]$:

$$[a_1 \in R,\ a_2 \in R \Rightarrow (a_1 + a_2) = (a_2 + a_1), \dots \Rightarrow$$
$$(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) = (a_2x + b_2) + (a_1x + b_1)]$$

III. *Propiedad asociativa*

$$\forall(a_1x + b_1)\ ;\ (a_2x + b_2)\ ;\ (a_3x + b_3) \in R_1\,[x]:$$
$$[(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)] + (a_3x + b_3) = [(a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2)] +$$
$$+ (a_3x + b_3) = \{[(a_1 + a_2) + a_3]\,x + [(b_1 + b_2) + b_3]\}.$$
$$(a_1x + b_1) + [(a_2x + b_2) + (a_3x + b_3)] = (a_1\,x + b_1) + [(a_2 + a_3)\,x +$$
$$+ (b_2 + b_3)] = \{[a_1 + (a_2 + a_3)]\,x + [b_1 + (b_2 + b_3)]\}$$

La adición es asociativa en $R_1\,[x]$:

$$[a_1 \in R\ ;\ a_2 \in R\ ;\ a_3 \in R \Rightarrow (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)\dots]$$

IV. *Elemento neutro*

$$\forall\, (a_1x + b_1) \in R_1\,[x]\,\exists(0x + 0) \in R_1\,[x]:$$
$$(a_1x + b_1) + (0x + 0) = (a_1 + 0)\,x + (b_1 + 0) = a_1x + b_1$$

La adición tiene, pues, elemento neutro en $R_1\,[x]$.

V. *Elemento simétrico*

$$\forall(a_1x + b_1) \in R_1[x],\ \exists\,(-a_1x - b_1) \in R_1[x]:$$
$$(a_1x + b_1) + (-a_1x - b_1) = 0x + 0$$

La adición tiene elemento simétrico en $R_1[x]$.

a) $[R_1\,[x],\ +\,]$ es grupo abeliano

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall\alpha \in R\ ;\ \forall(a_1x + b_1) \in R_1\,[x]:$$
$$\alpha\,(a_1x + b_1) = [(\alpha a_1)\,x + (\alpha b_1)] \in R_1\,[x]$$

Hay l. c. e. en $R_1\,[x]$:

$$[\alpha \in R,\ a_1 \in R \Rightarrow (\alpha a_1) \in R\dots[(\alpha a_1)\,x + (\alpha b_1)] \in R_1\,[x]\,]$$

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares*

$$\forall\,\alpha, \beta \in R_1\,[x]\ ;\ \forall\,(a_1x + b_1) \in R_1\,[x]:$$
$$(\alpha + \beta)\,(a_1x + b_1) = \{[(\alpha + \beta)\,a_1]\,x + [(\alpha + \beta)\,b_1]\} =$$
$$= \dots = \alpha\,(a_1x + b_1) + \beta\,(a_1x + b_1)$$

VIII. *Distributividad respecto a la adición de vectores*

$$\forall\,\alpha \in R\ ;\ \forall(a_1x + b_1)\ ;\ (a_2x + b_2) \in R_1\,[x]:$$
$$\alpha\,[(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)] = \alpha\,[(a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2)] =$$
$$= \dots = \alpha\,(a_1x + b_1) + \alpha\,(a_2x + b_2)$$

IX. *Asociatividad del producto de escalares respecto a la ley externa*

$$\forall\,\alpha, \beta \in R\ ;\ \forall(a_1x + b_1) \in R_1\,[x]:$$
$$\alpha\,[\beta\,(a_1x + b_1)] = \alpha\,[(\beta a_1)\,x + (\beta b_1)] = \dots = (\alpha\beta)\,(a_1x + b_1)$$

X. *Producto por la unidad*

$$\forall(a_1x + b_1) \in R_1\,[x]:$$
$$1 \cdot (a_1x + b_1) = a_1x + b_1$$

b) La ley de composición externa tiene, pues, las cuatro propiedades que junto al apartado a) caracterizan al espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

El $R_1\,[x] = \{ax + b \ \ a \in R,\ b \in R\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

6. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} 2a - 3b &= 7 \\ a + 2b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -1 \end{aligned}\right.$$

SOLUCIÓN: **$a = 2\ ;\ b = -1$**

7. RESOLUCIÓN

$$(-2a, 3b) = (-6, 6) \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -2a &= -6 \\ 3b &= 6 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \end{aligned}\right.$$

SOLUCIÓN: **$a = 3\ ;\ b = 2$**

8. RESOLUCIÓN

$$(4, 9) = \alpha\,(2, 3) \Rightarrow (4, 9) = (2\alpha, 3\alpha) \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 4 &= 2\alpha \\ 9 &= 3\alpha \end{aligned}\right.$$

SOLUCIÓN:

No existe ningún valor de α para el que $(4, 9) = \alpha\,(2, 3)$

9. RESOLUCIÓN

I) $(\vec{x} - \vec{y}) - \vec{z} = [(1, 2) - (-1, 1)] - (-2, -1) =$
$= [(1, 2) + (1, -1)] + (2, 1) = (2, 1) + (2, 1) = (4, 2)$

SOLUCIÓN I): **$(\vec{x} - \vec{y}) - \vec{z} = (4, 2)$**

II) $(2\vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{z} = [2\,(1, 2) + (-1, 1)] - 2\,(-2, -1) =$
$= [(2, 4) + (-1, 1)] - (-4, -2) = (1, 5) + (4, 2) = (5, 7)$

SOLUCIÓN II): **$(2\vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{z} = (5, 7)$**

III) $3\vec{x} - (2\vec{y} - \vec{z}) = 3\,(1, 2) - [2\,(-1, 1) - (-2, -1)] =$
$= (3, 6) - [(-2, 2) + (2, 1)] = (3, 6) - (0, 3) = (3, 6) + (0, -3) = (3, 3)$

SOLUCIÓN III): **$3\vec{x} - (2\vec{y} - \vec{z}) = (3, 3)$**

IV) $(\vec{x} - 2\vec{y}) + \vec{z} = [(1, 2) - 2\,(-1, 1)] + (-2, -1) =$
$= [(1, 2) - (-2, 2)] + (-2, -1) = [(1, 2) + (2, -2)] + (-2, -1) =$
$= (3, 0) + (-2, -1) = (1, -1)$

SOLUCIÓN IV): **$(\vec{x} - 2\,\vec{y}) + \vec{z} = (1, -1)$**

10. RESOLUCIÓN

$$\alpha\,(\sqrt{2}, -1) = (2, -\sqrt{2}) \Rightarrow (\alpha\sqrt{2}, -\alpha) = (2, -\sqrt{2})$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\sqrt{2} &= 2 \\ -\alpha &= -\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ \alpha &= \sqrt{2} \end{aligned}\right.$$

SOLUCIÓN: **No. La citada relación se verifica para $\alpha = \sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin Q$**

11. RESOLUCIÓN

$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = 3[(-2, 1) + (4, 2)] = 3(2, 3) = (6, 9)$
$\alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} = 3(-2, 1) + 3(4, 2) = (-6, 3) + (12, 6) = (6, 9)$

SOLUCIÓN: $\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x} + x\vec{y} = (6, 9)$

12. RESOLUCIÓN

$(\alpha+\beta)\vec{x} = [(4+2)](-1, 3) = 6(-1, 3) = (-6, 18)$
$\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}) = 4(-1, 3) + 2(-1, 3) = (-4, 12) + (-2, 6) = (-6, 18)$

SOLUCIÓN: $(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} = (-6, 18)$

13. RESOLUCIÓN

$\alpha(\beta\vec{x}) = 5[-2(-2, 1)] = 5(4, -2) = (20, -10)$
$(\alpha\beta)\vec{x} = [5(-2)](-2, 1) = -10(-2, 1) = (20, -10)$

SOLUCIÓN: $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x} = (20, -10)$

14. RESOLUCIÓN

$m(2, -4) + n(-3, 7) = (3, -5) \Rightarrow$
$(2m, -4m) + (-3n, 7n) = (3, -5)$
$[(2m - 3n), (-4m + 7n)] = (3, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} 2m - 3n = 3 \\ -4m + 7n = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 3 \\ n = 1 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: $m = 3$; $n = 1$

15. RESOLUCIÓN

I) $\vec{v}_1 = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$
$\vec{v}_1 = 2(2, 1) - (-1, 3) + 3(1, 0) = (4, 2) + (1, -3) + (3, 0)$

SOLUCIÓN I): $\vec{v} = (8, -1)$

II) $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

SOLUCIÓN II): $\vec{v} = \alpha(2, 1) + \beta(-1, 3) + \gamma(1, 0)$

III. ¿$(4, 1) = \alpha(2, 1) + \beta(-1, 3) + \gamma(1, 0)$?

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha - \beta + \gamma = 4 \\ \alpha + 3\beta \quad\;\; = 1 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, una de ellas es:

$\alpha = -2$; $\beta = 1$; $\gamma = 9$

por lo que una forma de expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de las $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sería:

$\vec{w} = -2\vec{a} + \vec{b} + 9\vec{c}$

SOLUCIÓN III): **$\vec{w}$ es combinación lineal de los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$**

16. RESOLUCIÓN

I. $\vec{v}_1 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$
$\vec{v}_1 = 3(2, -1) + 2(-4, 2) = (6, -3) + (-8, 4) = (-2, 1)$

SOLUCIÓN I): $\vec{v}_1 = (-2, 1)$

II. $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

SOLUCIÓN II): $\vec{v} = \alpha(2, -1) + \beta(-4, 2)$

III. ¿$(5, 3) = \alpha(2, -1) + \beta(-4, 2)$?

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha - 4\beta = 5 \\ -\alpha + 2\beta = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2\alpha - 4\beta = 5 \\ -2\alpha + 4\beta = 6 \end{array}\right\} ¡\, 0\alpha + 0\beta = 11\,!$$

El sistema no tiene solución por lo que $\vec{w}$ no es combinación lineal de los $\vec{a}$ y $\vec{b}$

SOLUCIÓN: III) **$\vec{w}$ no es combinación lineal de los $\vec{a}$ y $\vec{b}$**

17. RESOLUCIÓN

¿$\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$?

$$\alpha(2, 3) + \beta(-1, 2) = (2, 1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 2 \\ 3\alpha + 2\beta = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{5}{7} \\ \beta = -\frac{4}{7} \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: **Sí, $\vec{v} = \frac{5}{7}\vec{u}_1 - \frac{4}{7}\vec{u}_2$**

18. RESOLUCIÓN

¿$\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$?

$$\alpha(2, 1) + \beta(4, 2) = (3, 3) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\alpha + 4\beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 3 \end{array}\right.$$

El sistema no tiene solución, $\vec{v}$ no es combinación lineal de los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

SOLUCIÓN: **No, $\vec{v} \neq \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$**

19. RESOLUCIÓN

¿$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$?

$$\alpha(2, 3) + \beta(-1, 1) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ no son linealmente dependientes**

20. RESOLUCIÓN

¿$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$?

$$\alpha(2, -1) + \beta(-2, 1) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

puesto que el sistema tiene infinitas soluciones. Por ejemplo: $\alpha = 1$, $\beta = 1$; $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/3$; etc.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ son linealmente dependientes**

21. RESOLUCIÓN

¿$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$?

$$\alpha(2, 1) + \beta(-2, -1) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

pues el sistema tiene infinitas soluciones. Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente dependientes; forman, pues, un sistema ligado.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ forman un sistema ligado**

22. RESOLUCIÓN

$$¿\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0?$$

$$\alpha(2, 4) + \beta(1, 1) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ son linealmente independientes**

23. RESOLUCIÓN

$$¿\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0?$$

$$\alpha(1, 1) + \beta(-2, -2) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

pues el sistema tiene infinitas soluciones, los vectores son linealmente dependientes y no forman, por tanto, un sistema libre.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$ no forman un sistema libre**

24. RESOLUCIÓN

$$¿\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0?$$

$$\alpha(1, 2) + \beta(1, 1) + \gamma(2, 1) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right.$$

puesto que el sistema tiene infinitas soluciones. Por ejemplo $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 1$; $\alpha = 2, \beta = -6, \gamma = 2$, etc.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ no son linealmente independientes**

25. RESOLUCIÓN

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^2$

$$¿\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}?$$

$$\alpha(2, 1) + \beta(-1,0) = (x, y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = x \\ \alpha = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = y \\ \beta = 2y - x \end{array}\right.$$

Evidentemente, dado un $\vec{v} = (x, y)$, cualquiera, siempre existen unos números reales α y β tales que $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, por consiguiente $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un sistema de generadores.

SOLUCIÓN:

Los $\vec{a}$, $\vec{b}$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$

26. RESOLUCIÓN

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^2$

$$¿\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2?$$

$$\alpha(1, 2) + \beta(-2, -4) = (x, y) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha - 2\beta = x \\ 2\alpha - 4\beta = y \end{array}\right.$$

Este sistema sólo tiene solución cuando $y = 2x$, por tanto no siempre un $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ que, por tanto, no forman un sistema de generadores.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ no forman un sistema de generadores.**

27. RESOLUCIÓN

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^2$

$$¿\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3?$$

$$\alpha(1, 2) + \beta(2, -1) + \gamma(-1, 1) = (x, y) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + 2\beta - \gamma = x \\ 2\alpha - \beta + \gamma = y \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + 2\beta = x + \gamma \\ 2\alpha - \beta = y - \gamma \end{array}\right\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = x + \gamma \\ 4\alpha - 2\beta = 2y - 2\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{x + 2y - \gamma}{5} \\ \beta = \dfrac{2x - y + 3\gamma}{5} \\ \gamma = \gamma \end{array}\right.$$

Evidentemente, dado un $\vec{v} = (x, y)$, cualquiera, siempre existen unos números reales α, β y γ tales que $\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3$, por consiguiente $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ forman un sistema de generadores. Así, por ejemplo, si $\vec{v} = (7, 2)$ y hacemos $\gamma = 1$, resulta:

$$\alpha = \frac{7 + 4 - 1}{5} = 2 \qquad \beta = \frac{14 - 2 + 3}{5} = 3$$

y, por tanto, $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$
Como hemos obtenido α y β en función de γ, este número real γ, se llama parámetro. Análogamente pudimos haber obtenido β y γ en función de α, o bien α y γ en función de β.

SOLUCIÓN:

Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

28. RESOLUCIÓN

a) *Veamos si son linealmente independientes.*

$$¿\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0?$$

$$\alpha(2, 2) + \beta(1, 2) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) *Analicemos si forman un sistema de generadores.*
Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^2$.

$$¿\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2?$$

$$\alpha(2, 2) + \beta(1, 2) = (x, y) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = x \\ 2\alpha + 2\beta = y \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} -2\alpha - \beta = -x \\ 2\alpha + 2\beta = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = y - x \\ \alpha = \dfrac{2x - y}{2} \end{array}\right.$$

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ forman sistema de generadores.

NOTA: Dos vectores de $\mathbf{R}^2$ linealmente independientes siempre forman un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

CONCLUSIÓN: Como $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes y, además, forman un sistema de generadores, forman una base de $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN:

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes y, además, forman un sistema de generadores, forman una base de $\mathbf{R}^2$.

29. RESOLUCIÓN

a) *Veamos si son linealmente independientes.*

$$¿\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0?$$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) + \gamma(1, 1) = (0, 0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right.$$

pues el sistema tiene infinitas soluciones: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$; $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$, etc.

Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ no son linealmente independientes, por tanto no forman base.

SOLUCIÓN: **Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ no forman un base de R^2.**

30. RESOLUCIÓN

I. a) *Veamos si son linealmente independientes.*

$$¿\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0?$$

$$\alpha(1, -1) + \beta(-2, 1) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) *Analicemos si forman sistema de generadores*

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector cualquiera de R^2

$$¿\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2?$$

$$\alpha(1, -1) + \beta(-2, 1) = (x, y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha - 2\beta = x \\ -\alpha + \beta = y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -x - y \\ \alpha = -x - 2y \end{cases}$$

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ forman un sistema de generadores R^2.

SOLUCIÓN I): **Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ del conjunto B forman una base de R^2.**

II. $\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$

$$\alpha(1, -1) + \beta(-2, 1) = (8, -5) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 8 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\vec{v}_B = (2, -3)$

III. $\vec{w}_B = (-2, 2) = -2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$

$\vec{w} = -2(1, -1) + 2(-2, 1) = (-2, 2) + (-4, 2) = (-6, 4)$

SOLUCIÓN III): $\vec{w} = (-6, 4)$

31. RESOLUCIÓN

I. a) *Comprobemos que son linealmente independientes.*

$$¿\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0?$$

$$\alpha(2, 0) + \beta(1, -2) = (0, 0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son, pues, linealmente independientes.

b) *Comprobemos que forman un sistema de generadores.*

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector cualquiera de R^2

$$¿\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2?$$

$$\alpha(2, 0) + \beta(1, -2) = (x, y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = x \\ -2\beta = y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2x + y}{4} \\ \beta = -\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Los $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ forman un sistema de generadores R^2.

SOLUCIÓN I):

Siendo linealmente independientes y formando un sistema de generadores queda comprobado que forman una base.

II. $\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$

$$\alpha(2, 0) + \beta(1, -2) = (4, -8) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 4 \\ -2\beta = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\vec{w} = (0, 4)$

III. $\vec{w}_B = (-1, -2) = -\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$

$\vec{w} = -(2, 0) - 2(1, -2) = (-2, 0) - (2, -4) = (-4, 4)$

SOLUCIÓN III): $\vec{w} = (-4, 4)$

32. RESOLUCIÓN

I. *Sea un $\vec{v} \in R^2$. Este $\vec{v}$ tendrá unas coordenadas (x, y) respecto de B y otros (x', y') respecto de B', verificándose:*

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_B = (x, y) = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \\ \vec{v}_{B'} = (x', y') = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 \end{array}\right\} x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2$$

$$x(1, 1) + y(2, -1) = x'(1, 2) + y'(0, 2) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = x' \\ x - y = 2x' + 2y' \end{cases}$$

de donde: $\begin{cases} \mathbf{x' = x + 2y} \\ \mathbf{y' = \dfrac{-x - 5y}{2}} \end{cases}$

Aplicación: $\vec{x}_B = (3, -1) \Rightarrow \vec{x}_{B'} = (1, 1)$

SOLUCIÓN I): $\mathbf{x' = x + 2y}$, $\mathbf{y' = \dfrac{-x - 5y}{2}}$ $\quad \vec{x}_{B'} = (1, 1)$

II. *Partiendo de:*

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = x' \\ x - y = 2x' + 2y' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = x' \\ 2x - 2y = 4x' + 4y' \end{cases}$$

de donde: $\begin{cases} \mathbf{x = \dfrac{5x' + 4y'}{3}} \\ \mathbf{y = \dfrac{-x' - 2y'}{3}} \end{cases}$

Aplicación: $\vec{y}_{B'} = (1, 1) \Rightarrow \vec{y}_b = (3, -1)$

SOLUCIÓN II): $\mathbf{x = \dfrac{5x' + 4y'}{3}}$, $\mathbf{y = \dfrac{-x' - 2y'}{3}}$ $\quad \vec{y}_B = (3, -1)$

33. RESOLUCIÓN

No es preciso hallar las ecuaciones del cambio de base, se puede hacer directamente razonando del siguiente modo:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_B &= (2, 0) = 2\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 = 2\,(1, 2) + 0\,(2, 1)\\ \vec{v}_{B'} &= (x', y') = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 = x'\,(-1, 2) + y'\,(-2, 1)\end{aligned}\right\}$$

$$2\,(1, 2) + 0\,(2, 1) = x'\,(-1, 2) + y'\,(-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} -x' - 2y' = 2 \\ 2x' + y' = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}-2x' - 4y' &= 4\\ 2x' + y' &= 4\end{aligned}\right\} \begin{cases} y' = -\dfrac{8}{3} \\ x' = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B'}} = \left(\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}, -\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right)$

34. RESOLUCIÓN

I. *Sea un $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$. Este $\vec{v}$ tendrá unas coordenadas (x, y) respecto de B y otras (x', y') respecto de B', verificándose:*

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_B &= (x, y) = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2\\ \vec{v}_{B'} &= (x', y') = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2\end{aligned}\right\} x\vec{u}_1 + y\vec{u}_1 = x'\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$$

$$x\,(2, 2) + y\,(3, -1) = x'\,(-1, 1) + y'\,(1, -2) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -x' + y' \\ 2x - y = x' - 2y' \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}-x' + y' &= 2x + 3y\\ x' - 2y' &= 2x - y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y' = -4x - 2y \\ x' = -6x - 5y \end{cases}$$

Aplicación: $\vec{x}_B = (-2, 1) \Rightarrow \vec{x}_{B'} = (7, 6)$

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x' = -6x - 5y} \\ \mathbf{y' = -4x - 2y} \end{cases}$ $\quad \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{B'}} = \mathbf{(7, 6)}$

II. *Partiendo de:*

$$\left.\begin{aligned}2x + 3y &= -x' + y'\\ 2x - y &= x' - 2y'\end{aligned}\right\} \begin{aligned}2x + 3y &= -x' + y'\\ -2x + y &= -x' + 2y'\end{aligned}$$

de donde: $\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{2x' - 5y'}}{\mathbf{8}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{-2x' + 3y'}}{\mathbf{4}} \end{cases}$

Aplicación: $\vec{z}_{B'} = (8, 0) \Rightarrow \vec{z}_B = (2, -4)$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{2x' - 5y'}}{\mathbf{8}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{-2x' + 3y'}}{\mathbf{4}} \end{cases}$ $\quad \vec{\mathbf{z}}_{\mathbf{B'}} = \mathbf{(2, -4)}$

35. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_B &= (x, y) = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2\\ \vec{v}_{B'} &= (x', y') = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2\end{aligned}\right\} x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2$$

$$x\,(2, -1) + y\,(1, 1) = -1\,(-1, -1) + 4\,(1, 3) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{31}{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{B}} = \left(-\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}, \dfrac{\mathbf{31}}{\mathbf{3}}\right)$

36. RESOLUCIÓN

I. *Sea un $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$. Este $\vec{v}$ tendrá unas coordenadas (x, y) respecto de B y otras (x', y') respecto de B', verificándose:*

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_B &= (x, y) = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2\\ \vec{v}_{B'} &= (x', y') = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2\end{aligned}\right\} x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned}x\,(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + y\,(\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2) &= x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2\\ (2x + y)\,\vec{v}_1 + (-x + 3y)\vec{v}_2 &= x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x' = 2x + y} \\ \mathbf{y' = -x + 3y} \end{cases}$

II. *Partiendo de:*

$$\begin{aligned}2x + y &= x'\\ -x + 3y &= y'\end{aligned} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}2x + y &= x'\\ -2x + 6y &= 2y'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x' + 2y'}{7} \\ x = \dfrac{3x' - y'}{7} \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x' + 2y'}}{\mathbf{7}} \\ \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{3x' - y'}}{\mathbf{7}} \end{cases}$

PLANO AFIN, INCIDENCIA Y PARALELISMO
PRODUCTO ESCALAR. PLANO EUCLÍDEO

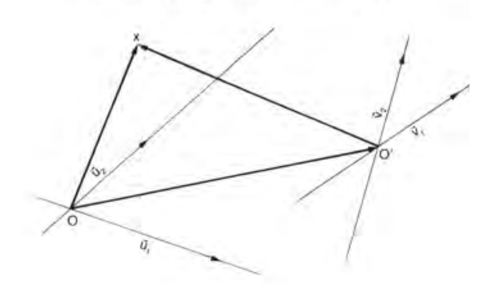
Sistema de referencia en el plano

Se llama sistema de referencia en el plano al $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, *donde* O *es un punto fijo del plano y el* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *una base del plano vectorial.*

Cambio de sistema de referencia

Sean los sistemas de referencia

$$R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ y } R' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$



En el $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$	En el $R' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{O'X}$ $X = (x, y)$ $O' = (a, b)$ $\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12})$ $\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22})$	$\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'X} - \overrightarrow{OX}$ $X = (x', y')$ $O = (a', b')$ $\vec{u}_1 = (a'_{11}, a'_{12})$ $\vec{u}_2 = (a'_{21}, a'_{22})$
Paso de R' a R $\begin{cases} x = a + a_{11}x' + a_{21}y' \\ y = b + a_{12}x' + a_{22}y' \end{cases}$	Paso de R a R' $\begin{cases} x' = a' + a'_{11}x + a'_{21}y \\ y' = b' + a'_{12}x + a'_{22}y \end{cases}$

Componentes del $\overrightarrow{AB}$

Las componentes del vector con origen en $A(x_1, y_1)$ *y extremo en* $B(x_2, y_2)$ *son:*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Razón simple de tres puntos alineados

Se llama razón simple de tres puntos alineados P, A, B, *y se indica con la notación* (PAB) *al cociente de dividir el* $\overrightarrow{PA}$ *entre el* $\overrightarrow{PB}$.

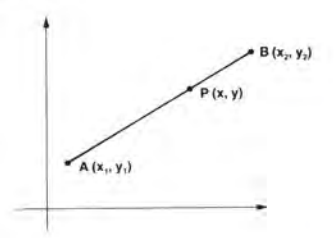
$$(PAB) = \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \lambda$$

Punto de división de un segmento en una razón dada

Si $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $P(x, y)$ y $(PAB) = \dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \lambda$, se verifica:

$$(PAB) = \lambda$$

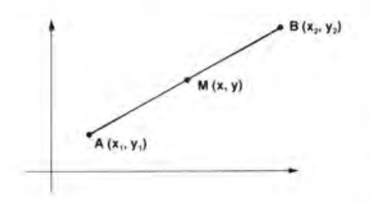
$$P \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{cases}$$



Punto medio de un segmento

Si $A(x_1, y_1)$; $B(x_2 y_2)$ y $M(x, y)$ *es el punto medio del segmento* AB, *se verifica:*

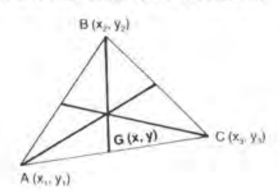
$$M \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$



Coordenadas del baricentro de un triángulo

Si $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ *son las coordenadas de los vértices de un triángulo y* $G(x, y)$ *es su baricentro, se verifica:*

$$G \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$



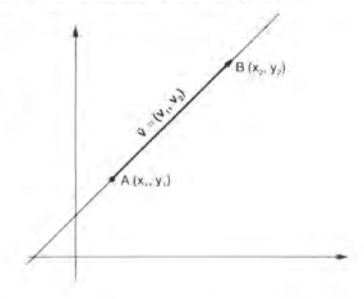
Vector director de una recta

Si A y B son dos puntos cualesquiera de una recta, el vector libre engendrado por el $\overrightarrow{AB}$ *se llama vector director de la recta.*

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

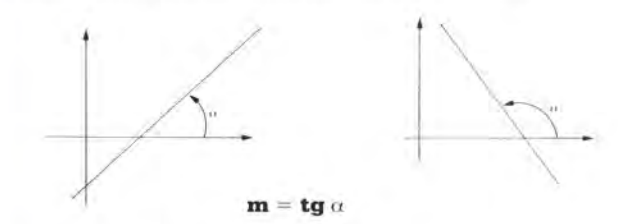
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\begin{cases} v_1 = x_2 - x_1 \\ v_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$$



Pendiente de una recta

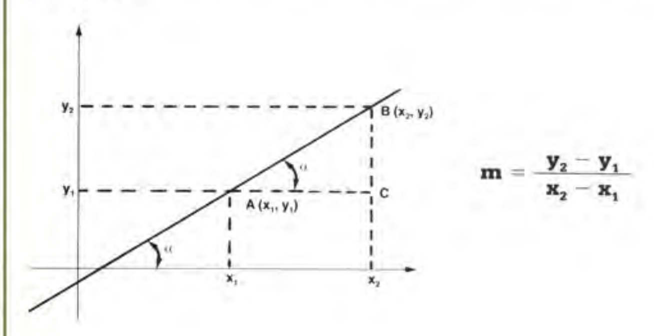
Pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo formado por los sentidos positivos de OX *y de la recta.*



$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Pendiente de la recta determinada por dos puntos

La pendiente de la recta determinada por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es:

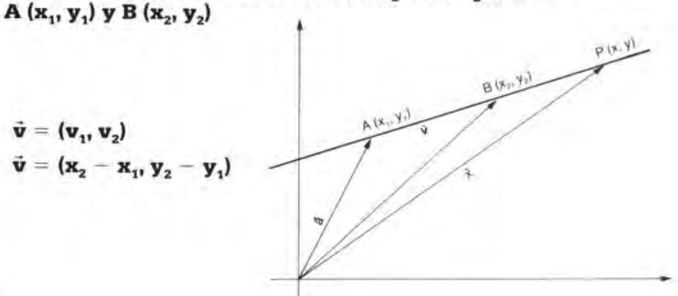


$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de la recta determinada por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



I. En forma vectorial

$$\vec{x} = a + t\vec{v}$$

II. En forma paramétrica

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases}$$

III. En forma continua

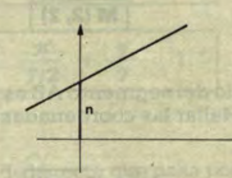
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

IV. En forma punto pendiente

$$y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_1) \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

V. En forma explícita

$$y = mx + n$$

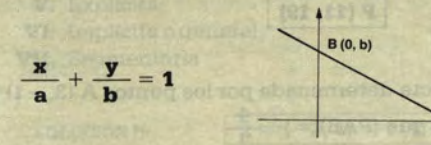


VI. En forma implícita

$$Ax + By + C = 0$$

VII. En forma segmentaria o canónica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Pendiente de una recta en forma implícita

La pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$ *es:*

$$m = -\frac{A}{B}$$

Producto escalar de dos vectores

Se llama producto escalar de dos vectores libres $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ *y* $\vec{v}_2(x_2, y_2)$, *y se indica con la notación* $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, *al número real obtenido del siguiente modo:*

I. Si $\vec{v}_1 \neq \vec{O}$ y $\vec{v}_2 \neq \vec{O}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos(\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2)$$

II. Si $\vec{v}_1 = \vec{O}$ ó $\vec{v}_2 = \vec{O}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

El producto escalar de dichos vectores en función de sus componentes es:

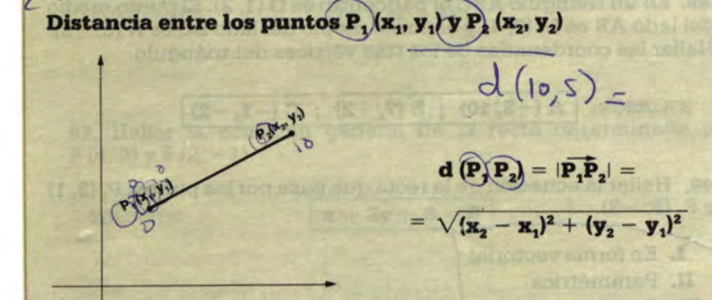
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Módulo de un vector

El módulo del $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ *es:*

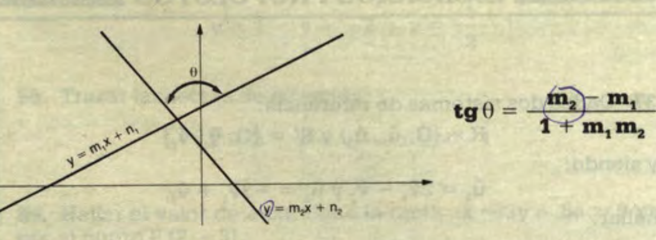
$$|\vec{v}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$d(P_1 P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ángulo de dos rectas



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Condición de paralelismo

$$m_1 = m_2$$

Condición de perpendicularidad

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ *a la recta* $r \equiv Ax + By + C = 0$ *es:*

$$d(Pr) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Puntos notables de un triángulo

- *Baricentro es el punto donde se cortan las medianas.*
- *Circuncentro es el punto donde se cortan las mediatrices.*
- *Ortocentro es el punto donde se cortan las alturas.*
- *Incentro es el punto donde se cortan las bisectrices interiores.*

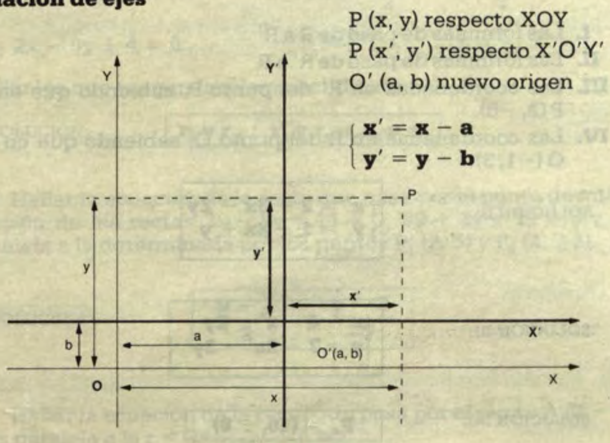
Traslación de ejes

P (x, y) respecto XOY

P (x′, y′) respecto X′O′Y′

O′ (a, b) nuevo origen

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

37. Dados dos sistemas de referencia:

$$R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ y } R' = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

y siendo:

$$\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \text{ y } \vec{u}_2 = -3\vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

hallar:

I. Las fórmulas de paso de R a R'
II. Las fórmulas de paso de R' a R
III. Las componentes del $\vec{x} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
IV. Las componentes del $\vec{z} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x' = 2x - 3y} \\ \mathbf{y' = -x + y} \end{cases}$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x = -x' - 3y'} \\ \mathbf{y = -x' - 2y'} \end{cases}$

SOLUCIÓN III): $\vec{x}_{B'} = \mathbf{(13, -5)}$

SOLUCIÓN IV): $\vec{z}_B = \mathbf{(-8, -5)}$

38. Dados dos sistemas de referencia:

$$R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ y } R' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

y siendo:

$$\vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2,\ \vec{u}_2 = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ y } \overrightarrow{O'O} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

hallar:

I. Las fórmulas de paso de R a R'
II. Las fórmulas de paso de R' a R
III. Las coordenadas en R' del punto P, sabiendo que en R es P (2, −5).
IV. Las coordenadas en R del punto Q, sabiendo que en R' es Q (−1, 3).

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x' = 2 + 3x - 2y} \\ \mathbf{y' = 1 - 2x + y} \end{cases}$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x = 4 - x' - 2y'} \\ \mathbf{y = 7 - 2x' - 3y'} \end{cases}$

SOLUCIÓN III): $\mathbf{P_{R'} = (18, -8)}$

SOLUCIÓN IV): $\mathbf{Q_R = (-1, 0)}$

39. Dados dos sistemas de referencia:

$$R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ y } R' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

y siendo:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2,\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \text{ y } \overrightarrow{OO'} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

hallar:

I. Las fórmulas de paso de R' a R
II. Las fórmulas de paso de R a R'
III. Las coordenadas en R' del punto P, sabiendo que en R es P (−3, 0).
IV. Las coordenadas en R del punto Q, sabiendo que en R' es Q (−2, −4).

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x = 3 + 2x' - y'} \\ \mathbf{y = -1 - 3x' + 2y'} \end{cases}$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x' = -5 + 2x - y} \\ \mathbf{y' = -7 + 3x + 2y} \end{cases}$

SOLUCIÓN III): $\mathbf{P_{R'} = (-11, -16)}$

SOLUCIÓN IV): $\mathbf{Q_R = (3, -3)}$

40. Sabiendo que las coordenadas de M, punto medio del segmento AB, son M (1, −3) y que A (3, −2), hallar las coordenadas del extremo B.

SOLUCIÓN: **B (−1, −4)**

41. Hallar el punto medio del segmento PQ siendo P (−1, 4) y Q (5, 0).

SOLUCIÓN: **M (2, 2)**

42. El punto medio del segmento AB es M (3, 2) y el extremo B es el punto B (3, 5). Hallar las coordenadas de A.

SOLUCIÓN: **A (3, −1)**

43. Hallar sobre la recta que determinan los puntos A (3, −1) y B (5, 4) un punto P tal que (PAB) = 4/3

SOLUCIÓN: **P (11, 19)**

44. Hallar sobre la recta determinada por los puntos A (3, −1) y B (9, 7) un punto P tal que $(PAB) = -\dfrac{4}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{P\left(\dfrac{45}{7}, \dfrac{25}{7}\right)}$

45. Hallar sobre la recta determinada por los puntos A (3, −1) y B (5, 4) un punto P tal que $(PBA) = \dfrac{4}{3}$

SOLUCIÓN: **P (−3, −16)**

46. Hallar las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento de extremos A (−1, 3) y B (7, 2).

SOLUCIÓN: $\mathbf{P\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{8}{3}\right)\ ;\ Q\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{7}{3}\right)}$

47. Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A (2, −3) y B (4, 1) y C (0, 7).

SOLUCIÓN: $\mathbf{G\left(2, \dfrac{5}{3}\right)}$

48. En un triángulo ABC el baricentro es G (1, 2). El punto medio del lado AB es M (2, 4) y el punto medio del lado BC es N (3, −2). Hallar las coordenadas de los tres vértices del triángulo.

SOLUCIÓN: **A (−3, 10) ; B (7, −2) ; C (−1, −2)**

49. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 (3, 1) y P_2 (5, −3).

I. En forma vectorial
II. Paramétrica
III. Continua
IV. Punto pendiente
V. Explícita
VI. Implícita
VII. Segmentaria

SOLUCIÓN I): $\vec{x} = \mathbf{(3, 1) + t\,(2, -4)}$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x = 3 + 2t} \\ \mathbf{y = 1 - 4t} \end{cases}$

SOLUCIÓN III): $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-4}$

SOLUCIÓN IV): $y - 1 = -2(x - 3)$

SOLUCIÓN V): $y = -2x + 7$

SOLUCIÓN VI): $2x + y - 7 = 0$

SOLUCIÓN VII): $\frac{x}{7/2} + \frac{y}{7} = 1$

50. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (−2, 1) y B (2, 3).

I. En forma vectorial
II. Paramétrica
III. Continua
IV. Punto pendiente
V. Explícita
VI. Implícita o general
VII. Segmentaria

SOLUCIÓN I): $\vec{x} = (-2, 1) + t(4, 2)$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

SOLUCIÓN III): $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{2}$

SOLUCIÓN IV): $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$

SOLUCIÓN V): $y = \frac{1}{2}x + 2$

SOLUCIÓN VI): $x - 2y + 4 = 0$

SOLUCIÓN VII): $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$

51. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A (1, 4) y tiene por vector director el $\overrightarrow{MN}$, siendo M (2, 2) y N (4, −1).

SOLUCIÓN: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

52. Hallar la ecuación general de la recta determinada por P (4, 2) y $\vec{v}$ (2, −1).

SOLUCIÓN: $x + 2y - 8 = 0$

53. Dada la recta $2x - 3y - 6 = 0$, escribir:

I. En forma continua
II. En forma paramétrica

SOLUCIÓN I): $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2}$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$

54. Dibujar las rectas de ecuación:

$$y = 1 \ ; \ y = -2 \ ; \ y = \frac{1}{2}$$

55. Trazar las rectas de ecuación:

$$x = 2 \ ; \ x = \frac{1}{2} \ ; \ x = -1$$

56. Hallar el valor de *a* para que la recta $ax - 3y - 5a = 0$ pase por el punto P (2, −3).

SOLUCIÓN: $a = 3$

57. Hallar el valor de *k* para que la recta $3x + ky + 5 = 0$ tenga de pendiente 1/2.

SOLUCIÓN: $k = -6$

58. Hallar el valor de *k* para que la recta $r_1 \equiv 2x - 5ky + 3k = 0$ sea paralela a la $r_2 \equiv 3x - 2y + 7 = 0$.

SOLUCIÓN: $k = \frac{4}{15}$

59. Dadas las rectas:

$r_1 \equiv 3x - 2y + 6 = 0$

$r_2 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 1$

$r_3 \equiv 2x - 3y + 4 = 0$

$r_4 \equiv y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$

$r_5 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3}$

$r_6 \equiv \begin{matrix} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{matrix}$

Hallar los que tengan la misma pendiente.

SOLUCIÓN: r_1 y r_5 ; r_2 y r_6 ; r_3 y r_4

60. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - 5y + 11 = 0$; $3x + 2y + 12 = 0$ y es paralela a la determinada por los puntos P_1 (2, 5) y P_2 (4, −2).

SOLUCIÓN: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-7}$

61. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, −3) y es paralela a la $r \equiv 3x - 2y + 6 = 0$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3}$

SOLUCIÓN TERCER PROCEDIMIENTO: $3x - 2y - 12 = 0$

62. Dado un triángulo de vértices A (2, 3), B (4, 1) y C (2, −4), hallar la ecuación de la recta que contiene a la mediana correspondiente al vértice A.

SOLUCIÓN: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-9/2}$

63. Dado el triángulo de vértices A (−1, 3), B (4, 1) y C (−2, 2), hallar la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC.

SOLUCIÓN: $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-3}{1}$

64. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A (2, 1), B (5, 4) y C (−2, 8), hallar en forma implícita las ecuaciones de las rectas que contienen a los cuatro lados del paralelogramo.

SOLUCIÓN AB: $\mathbf{x - y - 1 = 0}$

SOLUCIÓN BC: $\mathbf{4x + 7y - 48 = 0}$

SOLUCIÓN CD: $\mathbf{x - y + 10 = 0}$

SOLUCIÓN AD: $\mathbf{4x + 7y - 15 = 0}$

65. Averiguar si los puntos A (−2, 1), B (2, 3) y C (2, −1) están alineados.

SOLUCIÓN: **A, B y C no están alineados**

66. Hallar el valor de *k* para que los puntos A (3, 1), B (−2, 4) y C (k, 7) estén alineados.

SOLUCIÓN: $\mathbf{k = -7}$

67. Determinar si los puntos A (2, 2), B (−1, 1), C (4, −3), D (−4, 0) y E (2, 2) están alineados.

SOLUCIÓN: **A, B, C, D, y E no están alineados**

68. Hallar la recta que pasa por el baricentro del triángulo de vértices A (0, 2), B (−1, 3) y C (−2, 4) y es paralela al lado BC.

SOLUCIÓN: $$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{1}$$

69. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A (2, 1), B (4, 7) y C (3, −2). Hallar las coordenadas del cuarto vértice.

SOLUCIÓN: **D (1, −8)**

70. Se sabe que tres vértices de un paralelogramo son los puntos (4, 0), (1, 2) y (3, 2). Hallar las coordenadas del cuarto vértice, encontrando todas las soluciones.

PRIMERA SOLUCIÓN: **D (6, 0)**

SEGUNDA SOLUCIÓN: **Q (2, 0)**

TERCERA SOLUCIÓN: **I (0, 4)**

71. Dado el $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ y siendo $\vec{v}_2$ un vector tal que $|\vec{v}_2| = 8$ y sabiendo que los $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ forman un ángulo de 60°, calcular su producto escalar.

SOLUCIÓN: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 20$

72. En una base ortonormal se dan los $\vec{v}_1$ (5, −2) y $\vec{v}_2$ (4, 3). Hallar su producto escalar y el ángulo que forman.

SOLUCIÓN I: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 14$

SOLUCIÓN II: $$\widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2} = \arccos \frac{14}{5\sqrt{29}}$$

73. Dados los $\vec{v}_1 = 5\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ y $\vec{v}_2 = -2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$ y siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal, hallar su producto escalar y el ángulo que forman.

SOLUCIÓN I: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

SOLUCIÓN II: $\widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2} = 90°$

74. Dados el vector libre $\vec{a}$, calcular $\vec{a} \cdot \vec{a}$ siendo $|\vec{a}| = 12$.

SOLUCIÓN: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 144$

75. Calcular el producto escalar de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{u} = 10$; $\vec{v} \cdot \vec{v} = 64$ y $\widehat{\vec{u}\, \vec{v}} = \frac{\pi}{4}$

SOLUCIÓN: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8\sqrt{5}$

76. Dados tres $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tales que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \text{ y } \vec{a} \cdot \vec{c} = 4$$

calcular

I. $\vec{a}\,(2\vec{b} + 5\vec{c})$ **II.** $\vec{a}\,(3\vec{b} - 4\vec{c})$

SOLUCIÓN I: $\vec{a}\,(2\vec{b} + 5\vec{c}) = 44$

SOLUCIÓN II: $\vec{a}\,(3\vec{b} - 4\vec{c}) = 20$

77. Sea la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, tal que $|\vec{u}_1| = 8$, $|\vec{u}_2| = 8$ y $\widehat{\vec{u}_1 \vec{u}_2} = \pi/2$. Calcular: $\vec{a} \cdot 3\vec{b}$, siendo:

$$\vec{a} = -2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 \ ; \ \vec{b} = 4\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$$

SOLUCIÓN: $\vec{a} \cdot 3\vec{b} = -4\,416$

78. Sea la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$ y $\widehat{\vec{e}_1 \vec{e}_2} = 60°$. Calcular el producto $\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2)$, siendo:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \ ; \ \vec{v}_2 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$

SOLUCIÓN: $\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2) = -28$

79. Calcular:

I. $(\vec{a} + \vec{b})^2$ **II.** $(\vec{a} - \vec{b})^2$ **III.** $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$

siendo: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ y $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN I: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 28$

SOLUCIÓN II: $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 12$

SOLUCIÓN III: $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 52$

80. Probar que A (1, 4); B (4, 1) y C (5, 5) son los vértices de un triángulo isósceles.

SOLUCIÓN: **El triángulo es isósceles, pues: d (AC) = d (BC) ≠ d (AB)**

81. Clasificar el triángulo de vértices A (3, 2); B (6, 2) y C (3, 6).

SOLUCIÓN: **El triángulo es rectángulo, pues:** $\mathbf{[d(AB)]^2 + [d(AC)]^2 = [d(BC)]^2}$

82. Dado el triángulo del vértices A (4, 8); B (6, 2) y C (2, 2) probar que es isósceles y hallar su área.

SOLUCIÓN I: **El triángulo es isósceles.**

SOLUCIÓN II: $\mathbf{S = 12\ u^2}$

83. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A (−2, 1) y B (4, 4).

SOLUCIÓN: $\vec{x} = (-2, 1) + t\,(6, 3)$

84. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el P_1 (2, −3) y cuyo vector director es $\vec{v}$ (2, 5).

SOLUCIÓN: $\vec{x} = (2, -3) + t\,(2, 5)$

85. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los puntos P_1 (−3, 1) y P_2 (2, 3).

SOLUCIÓN: $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

86. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A (2, 0) y cuyo vector director es $\vec{v}$ (1, −3).

SOLUCIÓN: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \end{cases}$

87. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 (2, 5) y P_2 (−2, −3) expresándola en forma implícita.

SOLUCIÓN: $2x - y + 1 = 0$

88. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (0, 2) y B (1, 4) expresándola en forma explícita.

SOLUCIÓN: $y = 2x + 2$

89. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, −1) y forma un ángulo de 45° con el eje OX.

SOLUCIÓN: $y + 1 = 1\,(x - 2)$

90. Determinar los puntos donde la recta 3x − 4y + 12 = 0 corta a los ejes y escribirla en forma canónica.

SOLUCIÓN I: A (−4, 0)

SOLUCIÓN II: B (0, 3)

SOLUCIÓN III: $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$

91. Dado el triángulo de vértices A (2, 1), B (1, 2) y C (3, 3) hallar:

I. La longitud del lado AB
II. Ecuación del lado AC en sus diversas formas
III. Coordenadas del baricentro G
IV. Coordenadas del circuncentro O
V. Coordenadas del ortocentro H
VI. El pie de la altura relativa al vértice A
VII. Longitud de la mediana relativa al lado AC
VIII. Longitud de la altura relativa al vértice A
IX. El punto de intersección de la altura relativa al vértice A con la mediatriz del lado BC
X. El ángulo que forman los lados AC y BC
XI. El área del triángulo

SOLUCIÓN I: $d = \sqrt{2}\,U$

SOLUCIÓN II:

SOLUCIÓN a): $\vec{x} = (2, 1) + t\,(1, 2)$

SOLUCIÓN b): $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

SOLUCIÓN c): $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 1}{2}$

SOLUCIÓN d): $y - 1 = 2\,(x - 2)$

SOLUCIÓN e): $y = 2x - 3$

SOLUCIÓN f): $2x - y - 3 = 0$

SOLUCIÓN g): $\dfrac{x}{3/2} + \dfrac{y}{-3} = 1$

SOLUCIÓN III: G (2, 2)

SOLUCIÓN IV: $O\left(\dfrac{13}{6}, \dfrac{13}{6}\right)$

SOLUCIÓN V: $H\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$

SOLUCIÓN VI: $\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$

SOLUCIÓN VII: $\dfrac{3}{2}\,U$

SOLUCIÓN VIII: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,U$

SOLUCIÓN IX): No se cortan

SOLUCIÓN X: $\alpha = \text{arc cos}\,\dfrac{4}{5}$

SOLUCIÓN XI: $S = \dfrac{3}{2}\,u^2$

92. Hallar el ángulo que forman las rectas $r_1 \equiv 5x - 3y + 4 = 0$; $r_2 \equiv y = 5x - 9$.

SOLUCIÓN: $\theta = \text{arc tg}\,\dfrac{5}{14}$

93. Hallar la ecuación de las rectas que pasan por el punto P (1, 3) y forman un ángulo de 45° con la recta de ecuación: 3x − y + 6 = 0.

PRIMERA SOLUCIÓN: $r_1 \equiv 2x + y - 5 = 0$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $r_2 \equiv x - 2y + 5 = 0$

94. Hallar la ecuación de las rectas que pasan por el punto P (−3, 1) y forman un ángulo de 60° con la recta de ecuación: *2x + y − 4 = 0*

PRIMERA SOLUCIÓN: $y - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{1 + 2\sqrt{3}}(x + 3)$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $y - 1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} - 1}(x + 3)$

95. Hallar la ecuación de la recta perpendicular al segmento determinado por A (2, 1) y B (4, −3) trazada por el punto A.

SOLUCIÓN: $x - 2y = 0$

96. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el P (4, 0) y es perpendicular a la recta $2x + 6y - 5 = 0$.

SOLUCIÓN: $3x - y - 12 = 0$

97. Hallar la distancia del punto de intersección de las rectas $x - 4y + 6 = 0$; $3x - 5y - 3 = 0$ a la recta que corta a los ejes en A (4, 0) y B (0, −3).

SOLUCIÓN: $d = \frac{6}{5}$ u

98. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por P_1 (2, −1) y P_2 (−4, 3).

SOLUCIÓN: $3x - 2y + 5 = 0$

99. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas:

$r_1 \equiv 4x + 3y - 24 = 0$ y $r_2 \equiv 12x - 5y + 24 = 0$

PRIMERA SOLUCIÓN: $x - 8y + 54 = 0$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $56x + 7y - 96 = 0$

100. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas:

$r_1 \equiv 3x - 4y + 12 = 0$ y $r_2 \equiv 5x + 12y - 30 = 0$

SOLUCIÓN: $7x - 56y + 153 = 0$; $32x + 4y + 3 = 0$

101. Un paralelogramo tiene un vértice en A (3, 2) y dos de sus lados son las rectas $2x + 3y = 7$; $x - 3y = -4$. Hallar las coordenadas de los otros vértices, probar que sus diagonales se cortan en el punto medio, clasificarlo y calcular su área.

SOLUCIÓN I: $B\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{9}\right)$; $C\left(1, \frac{5}{3}\right)$; $D\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{9}\right)$

SOLUCIÓN II: **Las diagonales se cortan en el punto medio.**

SOLUCIÓN III: **Es un romboide.**

SOLUCIÓN IV: $S = \frac{5}{9}$ u²

102. Hallar la ecuación de las rectas que son paralelas a la $2x - 3y + 4 = 0$ y distan $3\sqrt{13}$ unidades del punto P_1 (4, 2).

SOLUCIÓN: $r_1 \equiv 2x - 3y + 37 = 0$; $r_2 \equiv 2x - 3y - 41 = 0$

103. Dados los puntos A (1, 3) y B (3, 4) se toma el punto C, simétrico del A respecto de la recta $x - y = 2$. Hallar las coordenadas de los vértices del paralelogramo que tiene dos vértices consecutivos en A y B y su centro en C.

SOLUCIÓN: **A (1, 3) ; B (3, 4) ; D (9, −5) ; E (7, −6)**

104. Dos lados de un cuadrado están sobre las rectas:

$$3x - 4y + 8 = 0 \ ; \ y = \frac{3}{4}x - 7$$

Hallar el área del cuadrado.

SOLUCIÓN: $S = \frac{1296}{25}$ u²

105. Dados los puntos A (0, −1) y B (1, 2) hallar las coordenadas de un punto P de la recta $x + y = 2$, tal que las rectas PA y PB sean perpendiculares.

SOLUCIÓN: P_1 (2, 0) ; P_2 (0, 2)

106. Dadas las rectas:

$r_1 \equiv mx + (m - 1)y + 4 = 0$; $r_2 \equiv 2mx - (2m + 1)y - 3 = 0$

Hallar *m* para que sean perpendiculares y, en este supuesto, hallar su punto de intersección.

SOLUCIÓN I: $m = -1$

SOLUCIÓN II: $P\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

107. Dadas las rectas:

$r_1 \equiv (2m - 1)x + 2my - 8 = 0$

$r_2 \equiv (m + 1)x + (m + 2)y + 3m = 0$

hallar *m* para que sean paralelas y, en este supuesto, hallar la distancia entre ellas.

SOLUCIÓN I: $m = 2$ SOLUCIÓN II: $d = \frac{14}{5}$ u

108. Los puntos A (−3, −2) y C (2, 1) son vértices opuestos de un rombo ABCD. El vértice B está en el eje de ordenadas. Calcular los vértices B y D, y el área del rombo.

SOLUCIÓN I:

SOLUCIÓN a): $B\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ SOLUCIÓN b): $D\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

SOLUCIÓN II: $S = \frac{17}{3}$ u²

109. Un rectángulo tiene el lado AB en la recta $5x + 3y = 34$, siendo B (8, −2) y el vértice D, opuesto al B, el origen de coordenadas. Hallar las coordenadas de los vértices A y C.

SOLUCIÓN: **A (5, 3) ; C (3, −5)**

110. Dados los puntos A (3, 4) y B (7, 8) hallar un punto P perteneciente a la recta $r \equiv 3x - 5y + 25 = 0$, y equidistante de ambos puntos.

SOLUCIÓN: $P\left(\frac{15}{4}, \frac{29}{4}\right)$

111. La recta $x + 2y = 9$ es mediatriz del segmento AB, cuyo extremo A tiene de coordenadas (2, 1). Hallar las coordenadas del otro extremo.

SOLUCIÓN: **B (4, 5)**

112. De un paralelogramo OABC se sabe que el lado OA está en la recta $x - 2y = 0$; OC en la $3x + y = 0$, que B tiene de coordenadas (3, 5). Hallar las coordenadas de los otros vértices.

SOLUCIÓN: **A (4, 2) ; C (−1, 3)**

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

37. RESOLUCIÓN

I.

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = a' + a'_{11}x + a'_{21}y \\ y' = b' + a'_{12}x + a'_{22}y \end{cases} \\ \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{OO} = (a', b') = (0, 0) \\ \vec{u}_1 = (a'_{11}, a'_{12}) = (2, -1) \\ \vec{u}_2 = (a'_{21}, a'_{22}) = (-3, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 + 2x - 3y \\ y' = 0 - x + y \end{cases}$$

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x' = 2x - 3y} \\ \mathbf{y' = -x + y} \end{cases}$

II.

$$\left.\begin{aligned} 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= \vec{u}_1 \\ -3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{u}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 = -3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = a + a_{11}x' + a_{21}y' \\ y = b + a_{12}x' + a_{22}y' \end{cases} \\ \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{OO} = (a, b) = (0, 0) \\ \vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}) = (-1, -1) \\ \vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}) = (-3, -2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 - x' - 3y' \\ y = 0 - x' - 2y' \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x = -x' - 3y'} \\ \mathbf{y = -x' - 2y'} \end{cases}$

III. $\vec{x} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 = 2(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) - 3(-3\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 13\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$

SOLUCIÓN III): $\mathbf{\vec{x}_{B'} = (13, -5)}$

IV.

$\vec{z} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = -(-\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + 3(-3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) = -8\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$

SOLUCIÓN: IV) $\mathbf{\vec{z}_B = (-8, -5)}$

38. RESOLUCIÓN

I.

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = a' + a'_{11}x + a'_{21}y \\ y' = b' + a'_{12}x + a'_{22}y \end{cases} \\ \overrightarrow{O'O} = (a', b') = (2, 1) \\ \vec{u}_1 = (a'_{11}, a'_{12}) = (3, -2) \\ \vec{u}_2 = (a'_{21}, a'_{22}) = (-2, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2 + 3x - 2y \\ y' = 1 - 2x + y \end{cases}$$

SOLUCIÓN I): $\begin{cases} \mathbf{x' = 2 + 3x - 2y} \\ \mathbf{y' = 1 - 2x + y} \end{cases}$

II. *Partiendo de:* $\begin{cases} x' = 2 + 3x - 2y \\ y' = 1 - 2x + y \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= x' - 2 \\ -2x + y &= y' - 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 3x - 2y &= x' - 2 \\ -4x + 2y &= 2y' - 2 \end{aligned}\right\} \begin{cases} x = 4 - x' - 2y' \\ y = 7 - 2x' - 3y' \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\begin{cases} \mathbf{x = 4 - x' - 2y'} \\ \mathbf{y = 7 - 2x' - 3y'} \end{cases}$

III.

$$\begin{cases} P_R(2, -5) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x' = 2 + 3x - 2y = 18 \\ y' = 1 - 2x + y = -8 \end{cases} \end{cases}$$

SOLUCIÓN III): $\mathbf{P_{R'} = (-2, -8)}$

IV.

$$\begin{cases} Q_{R'}(-1, 3) \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 - x' - 2y' = -1 \\ y = 7 - 2x' - 3y' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

SOLUCIÓN IV): $\mathbf{Q_B = (-1, 6)}$

39. RESOLUCIÓN

I.

$$\begin{cases} \begin{cases} x = a + a_{11}x' + a_{21}y' \\ y = b + a_{12}x' + a_{22}y' \end{cases} \\ \overrightarrow{OO}' = (a, b) = (3, -1) \\ \vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}) = (2, -3) \\ \vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}) = (-1, 2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 2x' - y' \\ y = -1 - 3x' + 2y' \end{cases}$$

SOLUCIÓN: I) $\begin{cases} \mathbf{x = 3 + 2x' - y'} \\ \mathbf{y = -1 - 3x' + 2y'} \end{cases}$

II.

Partiendo de $\begin{cases} x = 3 + 2x' - y' \\ y' = -7 + 3x + 2y \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 2x' - y' &= x - 3 \\ -3x' + 2y' &= y + 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 4x' - 2y' &= 2x - 6 \\ -3x' + 2y' &= y + 1 \end{aligned}\right\} \begin{cases} x' = -5 + 2x + y \\ y' = -7 + 3x - 2y \end{cases}$$

SOLUCIÓN: II) $\begin{cases} \mathbf{x' = -5 + 2x + y} \\ \mathbf{y' = -7 + 3x + 2y} \end{cases}$

III.

$$\begin{cases} P_R(-3, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x' = -5 + 2x + y = -11 \\ y' = -7 + 3x + 2y = -16 \end{cases} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: III) $\mathbf{P_{R'} = (-11, -16)}$

IV.

$Q_{R'}(-2, -4) \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3 + 2x' - y' = 3 \\ y = -1 - 3x' + 2y' = -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: IV) $\mathbf{Q_R (3, -3)}$

40. RESOLUCIÓN

Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *y* $M(x, y)$ *se verifica:*

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 = \dfrac{3 + x_2}{2} \\ -3 = \dfrac{-2 + y_2}{2} \end{array}\right\} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **B (−1, −4)**

41. RESOLUCIÓN

Si $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ *y* $M(x, y)$ *es el punto medio de PQ se verifica:*

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right\} \begin{cases} x = \dfrac{-1 + 5}{2} = 2 \\ y = \dfrac{4 + 0}{2} = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **M (2, 2)**

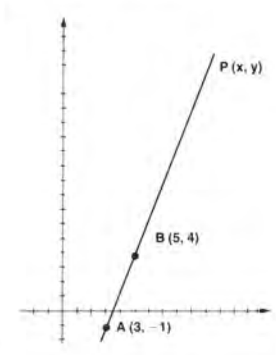
42. RESOLUCIÓN

Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *y* $M(x, y)$ *se verifica:*

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{x_1 + 3}{2} \\ 2 = \dfrac{y_1 + 5}{2} \end{array}\right\} \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **A (3, −1)**

43. RESOLUCIÓN



Como $(PAB) = \dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \dfrac{4}{3} = \lambda$, *deducimos:*

a) Que el punto P es exterior al segmento AB, por ser $\lambda = +$ *[para que* $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \lambda = +$ *los* $\overrightarrow{PA}$ *y* $\overrightarrow{PB}$ *han de tener el mismo sentido, cosa que sólo ocurre si P es exterior al segmento AB].*

b) Que el punto P está más alejado de A que de B, porque:

$$(PAB) = \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{4}{3} > 1$$

Si $P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$ *y* $B(x_2, y_2)$ *se verifica:*

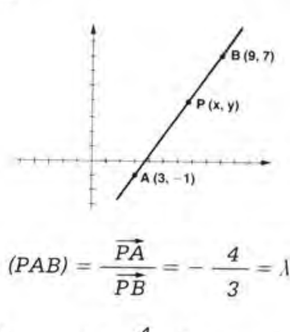
$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad ; \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

Puesto que estas fórmulas (x, y) son siempre las coordenadas del primer punto de la terna (PAB); (x_1, y_1) *las del segundo; y* (x_2, y_2) *las del tercero:*

$$x = \frac{3 - \frac{4}{3} \cdot 5}{1 - \frac{4}{3}} = 11 \quad ; \quad y = \frac{-1 - \frac{4}{3} \cdot 4}{1 - \frac{4}{3}} = 19$$

SOLUCIÓN: **P (11, 19)**

44. RESOLUCIÓN

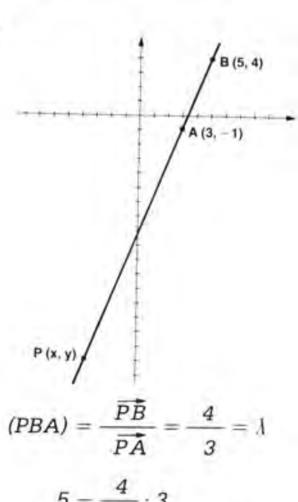


$$(PAB) = \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{4}{3} = \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{3 + \frac{4}{3} \cdot 9}{1 + \frac{4}{3}} = \dfrac{45}{7} \\ y = \dfrac{-1 + \frac{4}{3} \cdot 7}{1 + \frac{4}{3}} = \dfrac{25}{7} \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{P\left(\frac{45}{7}, \frac{25}{7}\right)}$

45. RESOLUCIÓN



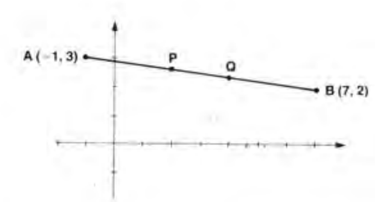
$$(PBA) = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{4}{3} = \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{5 - \frac{4}{3} \cdot 3}{1 - \frac{4}{3}} = -3 \\ y = \dfrac{4 - \frac{4}{3}(-1)}{1 - \frac{4}{3}} = -16 \end{array}$$

SOLUCIÓN: **P (−3, −16)**

NOTA: Fijémonos en que al escribir (PBA) nos obligamos a que: P (x, y) ; B (x_1, y_1) y A (x_2, y_2)

46. RESOLUCIÓN



a) *Calcular P:*

$$(PBA) = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PA}} = -2 = \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{7 + 2(-1)}{1 + 2} = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{2 + 2 \times 3}{1 + 2} = \dfrac{8}{3} \end{array}$$

SOLUCIÓN a): $\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)}$

b) *Cálculo de Q.*

$$(QAB) = \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = -2 = \lambda$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y &= \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{-1 + 2 \times 7}{1 + 2} = \frac{13}{3} \\ y &= \frac{3 + 2 \times 2}{1 + 2} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN b): $\boxed{\mathbf{Q}\left(\frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right)}$

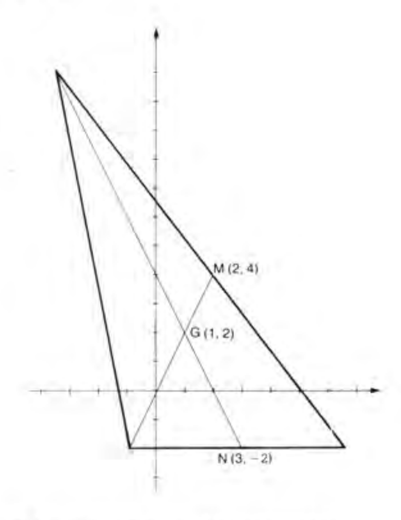
47. RESOLUCIÓN

Llamando G (x, y) al baricentro:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{2 + 4 + 0}{3} = 2 \\ y &= \frac{-3 + 1 + 7}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{G}\left(2, \frac{5}{3}\right)}$

48. RESOLUCIÓN



Si A (x_1, y_1) ; B (x_2, y_2) y C (x_3, y_3) tendremos:

- *Por ser G (1, 2) el baricentro:*

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ 2 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{aligned}\right\}$$

- *Por ser M (2, 4) el punto medio del lado AB:*

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 4 &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\}$$

- *Por ser N (3, −2) el punto medio del lado BC:*

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \frac{x_2 + x_3}{2} \\ -2 &= \frac{y_2 + y_3}{2} \end{aligned}\right\}$$

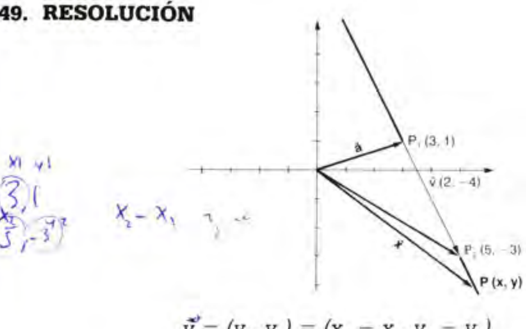
Resolviendo el sistema formado por estas seis ecuaciones obtenemos:

$$x_1 = -3\ ;\ y_1 = 10\ ;\ x_2 = 7\ ;\ y_2 = -2\ ;\ x_3 = -1\ ;\ y_3 = -2$$

SOLUCIÓN: **A (−3, 10) ; B (7, −2) ; C (−1, −2)**

NOTA: El sistema se resuelve muy fácilmente del siguiente modo: de la tercera y cuarta ecuaciones se despejan $(x_1 + x_2)$ e $(y_1 + y_2)$ sustituyendo estos valores en la primera y segunda, respectivamente. Así se obtienen ya x_3 e y_3. Análogamente $(x_2 + x_3)$ e $(y_2 + y_3)$ de la quinta y sexta y se llevan igualmente a la primera y segunda obteniendo x_1 e y_1. Finalmente se obtienen x_2 e y_2 de cualquiera de las dadas.

49. RESOLUCIÓN



$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (2, -4)$$

I. *En forma vectorial:*

$\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{v}$

$\vec{x} = (3, 1) + t\,(2, -4)$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\vec{\mathbf{x}} = (3, 1) + t\,(2, -4)}$

II. *En forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + (5 - 3)\,t \\ y = 1 + (-3 - 1)\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 3 + 2t} \\ \mathbf{y = 1 - 4t} \end{cases}}$

III. *En forma continua:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 1}{-3 - 1} \qquad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{-4}$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\frac{\mathbf{x - 3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y - 1}}{\mathbf{-4}}}$

IV. *En forma punto pendiente:*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \qquad y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-3 - 1}{5 - 3}\,(x - 3) \qquad y - 1 = \frac{-4}{2}\,(x - 3)$$

SOLUCIÓN IV): $\boxed{\mathbf{y - 1 = -2\,(x - 3)}}$

V. *En forma explícita:*

$$y = mx + n$$

A partir de la forma punto pendiente, por ejemplo, se sigue:

$$y - 1 = -2x + 6$$
$$y = -2x + 7$$

SOLUCIÓN V): $\boxed{\mathbf{y = -2x + 7}}$

VI. *En forma implícita o general:*

$$Ax + By + C = 0$$

A partir de la forma explícita, por ejemplo, se sigue:

$$y + 2x - 7 = 0$$

SOLUCIÓN VI): $\boxed{\mathbf{2x + y - 7 = 0}}$

VII. *En forma segmentaria:*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1$$

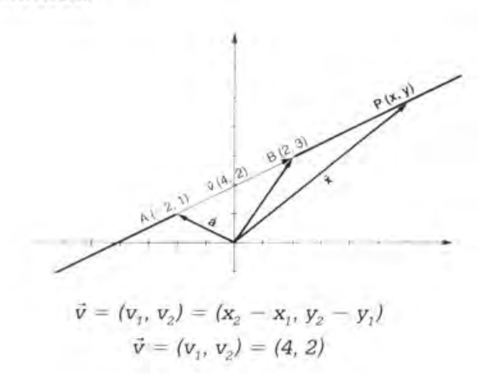
A partir, por ejemplo, de la forma implícita se sigue:

$$2x + y = 7$$

$$\frac{2x}{7} + \frac{y}{7} = 1 \qquad \frac{x}{7/2} + \frac{y}{7} = 1$$

SOLUCIÓN VII): $\boxed{\mathbf{\frac{x}{7/2} + \frac{y}{7} = 1}}$

50. RESOLUCIÓN



$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (4, 2)$$

I. *En forma vectorial:*

$\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{v}$

$\vec{x} = (-2, 1) + t\,(4, 2)$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{\vec{x} = (-2, 1) + t\,(4, 2)}}$

II. *En forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + (2 + 2)\,t \\ y = 1 + (3 - 1)\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\begin{matrix} \mathbf{x = -2 + 4t} \\ \mathbf{y = 1 + 2t} \end{matrix}}$

III. *En forma continua:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

$$\frac{x + 2}{2 + 2} = \frac{y - 1}{3 - 1} \qquad \frac{x + 2}{4} = \frac{y - 1}{2}$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\mathbf{\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 1}{2}}}$

IV. *En forma punto pendiente:*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \qquad y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{2 + 2}\,(x + 2) \qquad y - 1 = \frac{2}{4}\,(x + 2)$$

SOLUCIÓN IV): $\boxed{\mathbf{y - 1 = \frac{1}{2}\,(x + 2)}}$

V. *En forma explícita:*

$$y = mx + n$$

Partiendo de la forma continua, por ejemplo, se sigue:

$$\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 1}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 4y - 4$$

$$4y = 2x + 8 \;;\; y = \frac{2x}{4} + \frac{8}{4}$$

SOLUCIÓN V): $\boxed{\mathbf{y = \frac{1}{2}\,x + 2}}$

VI. *En forma implícita o general:*

$$Ax + By + C = 0$$

A partir de la forma explícita, por ejemplo, se sigue:

$$2y = x + 4 \;;\; x - 2y + 4 = 0$$

SOLUCIÓN VI): $\boxed{\mathbf{x - 2y + 4 = 0}}$

VII. *En forma segmentaria:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A partir, por ejemplo, de la forma implícita se sigue:

$$x - 2y = -4$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{-2y}{-4} = 1 \qquad \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$$

SOLUCIÓN VII): $\boxed{\mathbf{\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1}}$

51. RESOLUCIÓN

$$\vec{v} = MN = (x_N - x_M, y_N - y_M) = (2, -3)$$
$$\vec{v} = (2, -3)$$

La recta pedida pasa por A (1, 4) y su vector director es el $\vec{v}$ (2, −3)

$$\begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 1 + 2t} \\ \mathbf{y = 4 - 3t} \end{cases}}$

52. RESOLUCIÓN

Hallamos primero la ecuación continua:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad \frac{x - 4}{2} = \frac{y - 2}{-1}$$

de donde:

$$-x + 4 = 2y - 4 \;;\; x + 2y - 8 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x + 2y - 8 = 0}}$

53. RESOLUCIÓN

- *Hallamos un punto de la recta:*

$$y = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad A\,(3, 0)$$

- *Hallamos un vector director:*

$Ax + By + C = 0 \Rightarrow \vec{v} = (-B, A)$

$2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow \vec{v}\,(3, 2)$

I. *Ecuación continua:*

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 0}{2}$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\mathbf{\frac{x - 3}{3} = \frac{y}{2}}}$

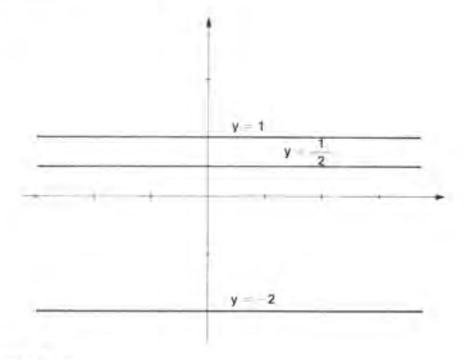
II. *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 0 + 2t \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 3 + 3t} \\ \mathbf{y = 2t} \end{cases}}$

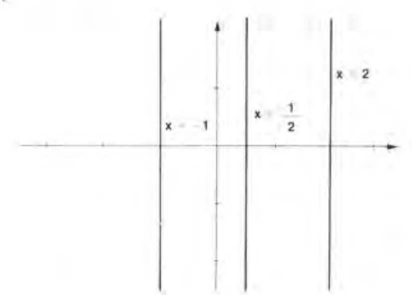
54. RESOLUCIÓN

SOLUCIÓN:



55. RESOLUCIÓN

SOLUCIÓN:



56. RESOLUCIÓN

Para que la recta dada pase por el P (2, −3) las coordenadas de P han de satisfacer la ecuación de la recta.

$$2a + 9 - 5a = 0 \Rightarrow a = 3$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a = 3}}$

57. RESOLUCIÓN

La pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$ *es* $m = -\dfrac{A}{B}$.

Por tanto: $-\dfrac{3}{k} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = -6$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{k = -6}}$

58. RESOLUCIÓN

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} = \frac{2}{5k} \quad ; \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2} = \frac{3}{2}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{2}{5k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{4}{15}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{k = \frac{4}{15}}}$

59. RESOLUCIÓN

RECTA		*PENDIENTE*
$r_1 \equiv 3x - 2y + 6 = 0$	⟶	$m_1 = \frac{3}{2}$
$r_2 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 1$	⟶	$m_2 = -\frac{3}{2}$
$r_3 \equiv 2x - 3y + 4 = 0$	⟶	$m_3 = \frac{2}{3}$
$r_4 \equiv y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$	⟶	$m_4 = \frac{2}{3}$
$r_5 \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{3}$	⟶	$m_5 = \frac{3}{2}$
$r_6 \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$	⟶	$m_6 = -\frac{3}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{r_1 \text{ y } r_5 \;;\; r_2 \text{ y } r_6 \;;\; r_3 \text{ y } r_4}}$

$x - x_1 \quad y$; $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2}$; $2x+2 = 3y-6$; $2x - 3y = -6+2$; $2x - 3y - 4 = 0$

60. RESOLUCIÓN

- *Cálculo del punto de intersección de las rectas dadas:*

$$\left.\begin{matrix} 2x - 5y + 11 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 4x - 10y + 22 = 0 \\ 15x + 10y - 60 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

- *Cálculo del vector director de la recta determinada por* $P_1\,(2, 5)$ *y* $P_2\,(4, -2)$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (4 - 2, -2 - 5) = (2, -7)$$

- *La recta pedida es la determinada por P (2, 3) y* $\vec{v}\,(2, -7)$.

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{-7}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{-7}}}$

61. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO

- *Cálculo de la pendiente:*

La pendiente de la recta buscada es la misma que la de la recta dada.

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow m = -\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

- *La recta buscada es la que pasa por A (2, −3) con pendiente 3/2.*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1); \qquad y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\boxed{\mathbf{y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2)}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

- *Cálculo del vector director de la recta dada:*

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow \vec{v} = (-B, A) = (2, 3)$$

- *La recta buscada es la determinada por A (2, −3) y $\vec{v}$ (2, 3)*

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \quad ; \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3}$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3}}$

TERCER PROCEDIMIENTO

- *Toda recta paralela a la dada:*

$r \equiv 3x - 2y + 6 = 0$ es de la forma.

$$3x - 2y + d = 0$$

- *Determinamos d para seleccionar la que pasa por A (2, −3).*

$$A \in 3x - 2y + d = 0 \Rightarrow 6 + 6 + d = 0 \Rightarrow d = -12$$

SOLUCIÓN TERCER PROCEDIMIENTO: $\boxed{3x - 2y - 12 = 0}$

NOTA: Evidentemente los tres resultados obtenidos corresponden a la misma recta, en distintas formas.

62. RESOLUCIÓN

La recta pedida es la determinada por el vértice A (2, 3) y el punto M (3, −3/2), siendo éste el punto medio del segmento BC.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad ; \quad \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{-3/2-3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-9/2}}$

63. RESOLUCIÓN

- *Cálculo del vector director de la recta determinada por B y C.*

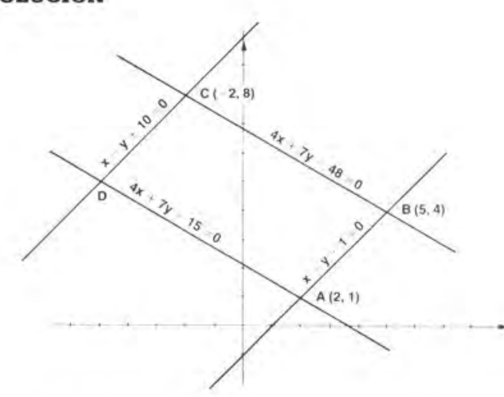
$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (-2-4, 2-1) = (-6, 1)$$

- *La recta pedida está determinada por A (−1, 3) y $\vec{v}$ (−6, 1).*

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad \frac{x+1}{-6} = \frac{y-3}{1}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x+1}{-6} = \frac{y-3}{1}}$

64. RESOLUCIÓN



a) *Ecuación de la recta que contiene al lado AB, determinada por A (2, 1) y B (5, 4).*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{4-1}$$

SOLUCIÓN AB): $\boxed{x - y - 1 = 0}$

b) *Ecuación de la recta que contiene al lado BC, determinada por B (5, 4) y C (−2, 8).*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x-5}{-2-5} = \frac{y-4}{8-4}$$

SOLUCIÓN BC): $\boxed{4x + 7y - 48 = 0}$

c) *Ecuación de la recta que contiene al lado CD, recta que es paralela a la AB y pasa por el punto C.*

- *Toda recta paralela a la AB tiene una ecuación de la forma:*

$$x - y + d = 0$$

- *Para que esta recta sea la que contiene al punto C (−2, 8) ha de verificarse:*

$$-2 - 8 + d = 0 \Rightarrow d = 10$$

SOLUCIÓN CD): $\boxed{x - y + 10 = 0}$

d) *Ecuación de la recta que contiene al lado AD, recta que es paralela a la BC y pasa por A.*

- *Toda recta paralela a la BC tendrá que tener una ecuación de la forma:*

$$4x + 7y + d = 0$$

- *Para que esta recta sea la que contiene al punto A ha de verificarse:*

$$4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -15$$

SOLUCIÓN AD): $\boxed{4x + 7y - 15 = 0}$

NOTA: Para hallar la ecuación de la recta que contiene al lado CD pueden usarse otras determinaciones:

I. C (−2, 8) y el $\vec{v}$ de la AB

II. C (−2, 8) y la m de la AB

Análogamente para la recta que contiene al lado AD.

65. RESOLUCIÓN

- *Hallamos la ecuación de la recta determinada por A (−2, 1) y B (2, 3).*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{2}$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

- *Como $2 + 2 + 4 \neq 0$, las coordenadas de C no satisfacen la ecuación de la recta AB, el punto C no pertenece a esa recta y, por tanto, A, B y C no están alineados.*

SOLUCIÓN: **A, B, y C no están alineados**

66. RESOLUCIÓN

- *Hallamos la ecuación de la recta determinada por A (3, 1) y B (−2, 4).*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{3}$$

$$3x + 5y - 14 = 0$$

- *Hallamos k para que el C (k, 7) pertenezca a esta recta:*

$$3k + 35 - 14 = 0 \Rightarrow k = -7$$

SOLUCIÓN: $\boxed{k = -7}$

67. RESOLUCIÓN

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por dos cualesquiera de los puntos dados y vemos si los demás pertenecen a la recta hallada.

- *Recta determinada por A (2, 2) y B (−1, 1).*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{-1}$$

$$x - 3y + 4 = 0$$

- *Comprobamos si pertenece el C a esta recta:*

$$4 + 9 + 4 \neq 0$$

Puesto que el C no pertenece a la recta determinada por A y B los puntos A, B y C no están alineados y, por tanto, ya no pueden estar todos. No es preciso analizar más.

SOLUCIÓN: **A, B, C, D y E no están alineados**

68. RESOLUCIÓN

- *Cálculo del baricentro G.*

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} & x = \dfrac{0 - 1 - 2}{3} = -1 \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} & y = \dfrac{2 + 3 + 4}{3} = 3 \end{cases}$$

$$G(-1, 3)$$

- *Vector director de la recta BC*

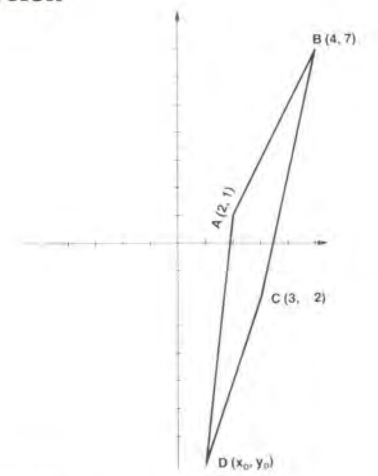
$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-2 + 1, 4 - 3)$$
$$\vec{v}(-1, 1)$$

- *La recta pedida está determinada por G (−1, 3) y $\vec{v}$ (−1, 1).*

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{1}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-3}{1}}$

69. RESOLUCIÓN



PRIMER PROCEDIMIENTO:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AB}(2, 6) \;;\; \overrightarrow{DC}(3 - x_D, -2 - y_D)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = 3 - x_D \\ 6 = -2 - y_D \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_D = 1 \\ y_D = -8 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: **D (1, −8)**

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

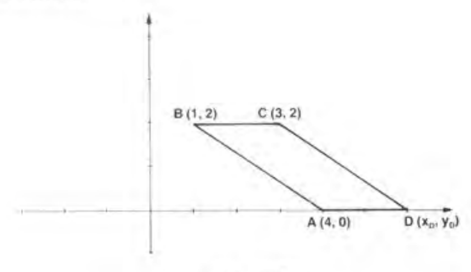
Puesto que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, el punto medio del segmento AC es el mismo que el del segmento BD. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2 + 3 = 4 + x_D \\ 1 - 2 = 7 + y_D \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_D = 1 \\ y_D = -8 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEMIDENTO: **D (1, −8)**

70. RESOLUCIÓN

PRIMERA SOLUCIÓN:

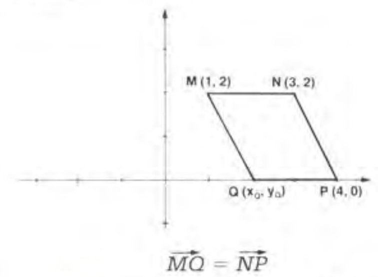


$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AD}(x_D - 4, y_D - 0) \;;\; \overrightarrow{BC}(2, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_D - 4 = 2 \\ y_D = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_D = 6 \\ y_D = 0 \end{array}\right.$$

PRIMERA SOLUCIÓN: **D (6, 0)**

SEGUNDA SOLUCIÓN:

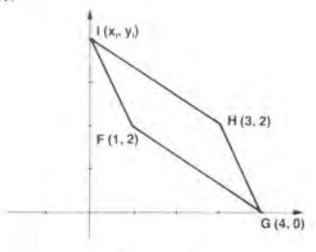


$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$$
$$\overrightarrow{MQ}(x_Q - 1, y_Q - 2) \;;\; \overrightarrow{NP}(1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_Q - 1 = 1 \\ y_Q - 2 = -2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_Q = 2 \\ y_Q = 0 \end{array}\right.$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: **Q (2, 0)**

TERCERA SOLUCIÓN:



$$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{GH}$$
$$\overrightarrow{FI}(x_I - 1, y_I - 2) \;;\; \overrightarrow{GH}(-1, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_I - 1 = -1 \\ y_I - 2 = 2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_I = 0 \\ y_I = 4 \end{array}\right.$$

TERCERA SOLUCIÓN: **I (0, 4)**

71. RESOLUCIÓN

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos [\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2]$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\vec{v}_1 (x_1, y_1)$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{9 + 16}$

$|\vec{v}_1| = 5$

SOLUCIÓN: **$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 20$**

72. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo del producto escalar:*

Si $\vec{v}_1 (x_1, y_1)$; $\vec{v}_2 (x_2, y_2)$:

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 3$

SOLUCIÓN I: **$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 14$**

II. *Cálculo del ángulo que forman:*

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos [\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2]$

$14 = \sqrt{29} \cdot 5 \cdot \cos [\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2]$

$\cos [\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2] = \frac{14}{5\sqrt{29}}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 14$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$|\vec{v}_2| = \sqrt{16 + 9} = 5$

SOLUCIÓN II: **$\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2 = \arccos \frac{14}{5\sqrt{29}}$**

73. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo del producto escalar:*

Si $\vec{v}_1 (x_1, y_1)$; $\vec{v}_2 (x_2, y_2)$:

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 5 \cdot (-2) + (-2)(-5)$

SOLUCIÓN I: **$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$**

II. *Cálculo del ángulo que forman:*

Siendo el $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ y $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ se deduce que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ han de ser perpendiculares.

SOLUCIÓN II: **$\vec{v}_1 \widehat{\ } \vec{v}_2 = 90°$**

74. RESOLUCIÓN

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \, |\vec{a}| \cos 0°$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 12^2$

SOLUCIÓN: **$\vec{a} \cdot \vec{a} = 144$**

75. RESOLUCIÓN

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos [\vec{u} \widehat{\ } \vec{v}]$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{10} \cdot 8 \cdot \cos 45°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{20}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

$|\vec{u}|^2 = 10$

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

$|\vec{v}|^2 = 64$

$|\vec{v}| = 8$

SOLUCIÓN: **$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8\sqrt{5}$**

76. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo de $\vec{a}(2\vec{b} + 5\vec{c})$*

$\vec{a}(2\vec{b} + 5\vec{c}) = \vec{a} \cdot (2\vec{b}) + \vec{a} \cdot (5\vec{c}) =$

$= 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 5(\vec{a} \cdot \vec{c}) =$

$= 2 \cdot 12 + 5 \cdot 4 = 24 + 20 = 44$

SOLUCIÓN I: **$\vec{a}(2\vec{b} + 5\vec{c}) = 44$**

II. *Cálculo de $\vec{a}(3\vec{b} - 4\vec{c})$*

$\vec{a}(3\vec{b} - 4\vec{c}) = \vec{a} \cdot (3\vec{b}) - \vec{a} \cdot (4\vec{c}) =$

$= 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{c}) =$

$= 3 \cdot 12 - 4 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$

SOLUCIÓN II: **$\vec{a}(3\vec{b} - 4\vec{c}) = 20$**

77. RESOLUCIÓN

$\vec{a} \cdot 3\vec{b} = (-2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) \cdot (12\vec{u}_1 - 15\vec{u}_2)$

$\vec{a} \cdot 3\vec{b} = -24(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) +$

$+ 36(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) - 45(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2)$

$\vec{a} \cdot 3\vec{b} = -24 \cdot 64 - 45 \cdot 64$

$\vec{a} \cdot 3\vec{b} = -1\,536 - 2\,880$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3\vec{b} = 3(4\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2)$

$\mathbf{3\vec{b} = 12\vec{u}_1 - 15\vec{u}_2}$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = |\vec{u}_1|^2 = 64$

$\mathbf{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 64}$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_2|^2 = 64$

$\mathbf{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 64}$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2| \cos \frac{\pi}{2}$

$\mathbf{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0}$

SOLUCIÓN: **$\vec{a} \cdot 3\vec{b} = -4\,416$**

78. RESOLUCIÓN

$\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2) = (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot (-2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2)$

$\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2) = -4(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) +$

$+ 12(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + 2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) - 6(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2)$

$\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2) = -4 \cdot 4 + 12 \cdot 3 +$

$+ 2 \cdot 3 - 6 \cdot 9$

$\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2) = -16 + 36 + 6 - 54$

CÁLCULOS AUXILIARES

$-2\vec{v}_2 = -2(\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)$

$\mathbf{-2\vec{v}_2 = -2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2}$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 4$

$\mathbf{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 4}$

$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 9$

$\mathbf{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 9}$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cos 60°$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$

$\mathbf{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 3}$

SOLUCIÓN: **$\vec{v}_1 \cdot (-2\vec{v}_2) = -28$**

79. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo de $(\vec{a} + \vec{b})^2$*

$(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{b}$

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = 16 + 8 + 4$

SOLUCIÓN I: **$(\vec{a} + \vec{b})^2 = 28$**

II. *Cálculo de $(\vec{a} - \vec{b})^2$*

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{b}$

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 - 8 + 4$

SOLUCIÓN II: **$(\vec{a} - \vec{b})^2 = 12$**

CÁLCULOS AUXILIARES

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 16$

$\mathbf{\vec{a} \cdot \vec{a} = 16}$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 4$

$\mathbf{\vec{b} \cdot \vec{b} = 4}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\vec{a} \widehat{\ } \vec{b})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$\mathbf{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = 4}$

III. *Cálculo de* $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$

$(2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 4\,(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 12\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 9\,(\vec{b} \cdot \vec{b})$

$(2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 4 \cdot 16 - 12 \cdot 4 + 9 \cdot 4$

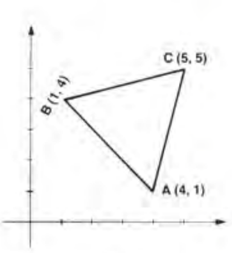
$(2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 64 - 48 + 36$

SOLUCIÓN III: **$(2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 52$**

80. RESOLUCIÓN

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- $d\,(AB) = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$
- $d\,(AC) = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$
- $d\,(BC) = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$



SOLUCIÓN: **El triángulo es isósceles, pues: d (AC) = d (BC) ≠ d (AB)**

81. RESOLUCIÓN

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- $d\,(AB) = \sqrt{9 + 0} = 3$
- $d\,(AC) = \sqrt{0 + 16} = 4$
- $d\,(BC) = \sqrt{9 + 16} = 5$

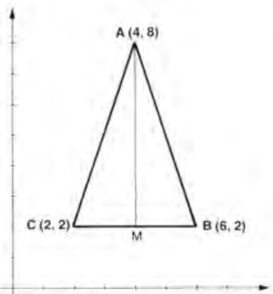
SOLUCIÓN: **El triángulo es rectángulo, pues: $[d\,(AB)]^2 + [d\,(AC)]^2 = [d\,(BC)]^2$**

82. RESOLUCIÓN

I. *Probemos que es isósceles:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- $d\,(AC) = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$
- $d\,(AB) = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$
- $d\,(BC) = \sqrt{16 + 0} = 4$



SOLUCIÓN I: **El triángulo es isósceles**

II. *Cálculo del área:*

- *Tomamos como base el lado desigual BC.*
- *Calculamos M, punto medio de BC:*

$$M\left(\frac{6 + 2}{2}, \frac{2 + 2}{2}\right)$$

$$M\,(4, 2)$$

- *Hallamos la altura:*

$$d\,(MA) = \sqrt{0 + 36} = 6$$

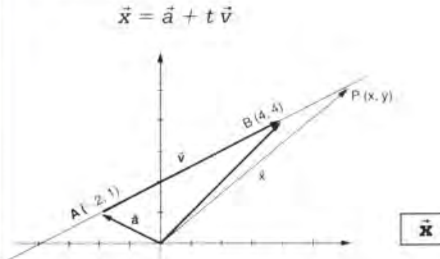
- *El área será:*

$$S = \frac{d\,(BC) \cdot d\,(MA)}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2}$$

SOLUCIÓN II: **$S = 12\ u^2$**

83. RESOLUCIÓN

$$\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{v}$$



$\vec{x} = (-2, 1) + t\,(6, 3)$

SOLUCIÓN: **$\vec{x} = (-2, 1) + t\,(6, 3)$**

84. RESOLUCIÓN

$$\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{v}$$

$$\vec{x} = (2, -3) + t\,(2, 5)$$

SOLUCIÓN: **$\vec{x} = (2, -3) + t\,(2, 5)$**

85. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -3 + (2 + 3)\,t \\ y &= 1 + (3 - 1)\,t \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **$x = -3 + 5t$, $y = 1 + 2t$**

86. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 1t \\ y &= 0 - 3t \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN: **$x = 2 + t$, $y = -3t$**

87. RESOLUCIÓN

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - 2}{-2 - 2} = \frac{y - 5}{-3 - 5}$$

$$\frac{x - 2}{-4} = \frac{y - 5}{-8}$$

que llevada a la forma implícita resulta:

SOLUCIÓN: **$2x - y + 1 = 0$**

88. RESOLUCIÓN

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 2}{4 - 2}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 2}{2}$$

que llevada a la forma explícita resulta:

SOLUCIÓN: **$y = 2x + 2$**

89. RESOLUCIÓN

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

- *Calculando la pendiente:*

$$m = tg\,\alpha = tg\,45^\circ = 1$$

- *La recta en la forma punto pendiente, es:*

$$y + 1 = 1\,(x - 2)$$

SOLUCIÓN: **$y + 1 = 1\,(x - 2)$**

90. RESOLUCIÓN

I. *Intersección con OX*

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 12 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN I: **A (−4, 0)**

II. *Intersección con OY*

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 12 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array}$$

SOLUCIÓN II: **B (0, 3)**

III. *Ecuación canónica:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1}$

91. RESOLUCIÓN

I. *La longitud del lado AB.*

$$d\,(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d\,(AB) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{d = \sqrt{2}\,U}$

II. *Ecuacón del lado AC en sus diversas formas.*

a) *En forma vectorial:*

$$\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{v}$$

SOLUCIÓN a): $\mathbf{\vec{x} = (2, 1) + t\,(1, 2)}$

b) *En forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{cases}$$

SOLUCIÓN b): $\mathbf{x = 2 + t}$, $\mathbf{y = 1 + 2t}$

c) *En forma continua:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

SOLUCIÓN c): $\mathbf{\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2}}$

d) *En forma punto pendiente:*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

SOLUCIÓN d): $\mathbf{y - 1 = 2\,(x - 2)}$

e) *En forma explícita:*

$$y = mx - n$$

SOLUCIÓN e): $\mathbf{y = 2x - 3}$

f) *En forma implícita:*

$$Ax + By + C = 0$$

SOLUCIÓN f): $\mathbf{2x - y - 3 = 0}$

g) *En forma segmentaria:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

SOLUCIÓN g): $\mathbf{\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1}$

III. *Coordenadas del baricentro.*

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\[2ex] y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{2 + 1 + 3}{3} = 2 \\[2ex] y = \dfrac{1 + 2 + 3}{3} = 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN: **G (2, 2)**

IV. *Coordenadas del cincuncentro O.*

a) *Ecuación de la mediatriz del lado AB:*

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

$$x - y = 0$$

NOTA: Para hallar la ecuación de la mediatriz del segmento AB, basta tener en cuenta que un punto P (x, y) pertenece a la meditariz si y solo si:

d (AP) = d (BP)

b) *Ecuación de la mediatriz del lado AC:*

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 3)^2}$$

$$2x + 4y - 13 = 0$$

c) *Intersección de las mediatrices:*

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x + 4y - 13 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{13}{6} \\[2ex] y = \dfrac{13}{6} \end{array}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{O\left(\frac{13}{6}, \frac{13}{6}\right)}$

V. *Coordenadas del ortocentro H.*

a) *Ecuación de la altura relativa al lado BC:*

- *Pendiente de BC:*

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

- *Pendiente de la altura relativa al lado BC:*

$$m = -\frac{1}{m_{BC}} = -2$$

- *La recta buscada pasa por A (2, 1) con m = −2. Su ecuación es:*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2\,(x - 2)$$

$$2x + y - 5 = 0$$

b) *Ecuación de la altura relativa al lado AC:*

- *Pendiente de AC:*

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{3 - 2} = 2$$

- *Pendiente de la altura relativa al lado AC:*

$$m = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{1}{2}$$

- *La recta buscada pasa por B (1, 2) con m = −1/2. Su ecuación es:*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$x + 2y - 5 = 0$$

c) *Intersección de las alturas:*

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{array}$$

SOLUCION V: $\boxed{\mathbf{H}\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

VI. *El pie de la altura relativa al vértice A.*

El pie de dicha altura es la intersección de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A, con la recta que contiene a la base BC.

- *Ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A (ver 38-V-a).*

$$2x + y - 5 = 0$$

- *Ecuación de la recta que contiene al lado BC:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1}$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

- *Intersección de las dos rectas:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{array}$$

SOLUCIÓN VI: $\boxed{\left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)}$

VII. *Longitud de la mediana relativa al lado AC.*

La longitud de esta mediana es la distancia del vértice B a M, siendo M el punto medio de AC.

- *Cálculo de M, punto medio de AC:*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

- *Cálculo de la distancia entre B y M:*

$$d(BM) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(BM) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (2 - 2)^2} = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN VII: $\boxed{\frac{3}{2}\ \mathbf{U}}$

VIII. *Longitud de la altura relativa al vértice A.*

La longitud de esta altura es la distancia del vértice A a la recta que contiene al lado BC.

- *Ecuación de la recta que contiene al lado BC (ver 38-VI).*

$$x - 2y + 3 = 0$$

- *Distancia del vértice A (2, 1) a la recta y ≡ x − 2y + 3 = 0*

$$d(Ay) = \left|\frac{Ax_1 1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d(Ay) = \left|\frac{2 - 2 + 3}{\sqrt{1 + 4}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

SOLUCIÓN VIII: $\boxed{\frac{3}{\sqrt{5}}\ \mathbf{U}}$

IX. *El punto de intersección de la altura relativa al vértice A con la mediatriz del lado BC.*

- *Ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A (ver 38-V).*

$$2x + y - 5 = 0$$

- *Ecuación de la mediatriz del lado BC:*

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 3)^2}$$

$$4x + 2y - 13 = 0$$

- *Intersección de las dos rectas:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x + 2y - 13 = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema no tiene solución; las rectas no se cortan, son paralelas.

SOLUCIÓN IX **No se cortan**

X. *El ángulo que forman los dos lados AC y BC.*

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = |\vec{AC}|\,|\vec{BC}| \cos\alpha$$

$$4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos\alpha$$

$$4 = 5 \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\vec{AC}(1, 2)$; $\vec{BC}(2, 1)$

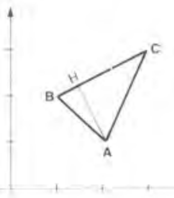
$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 2 + 2 = 4$

$|\vec{AC}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

SOLUCIÓN X: $\boxed{\alpha = \mathbf{arc\ cos}\ \frac{4}{5}}$

XI. *El área del triángulo.*



Tomando como base el lado BC:

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}$$

- *Cálculo de la longitud del lado BC:*

$$d(BC) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(BC) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$d(BC) = \sqrt{5}$$

- *Cálculo de la longitud de la altura AH (ver 38-V).*

$$\overline{AH} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

- *Cálculo del área del triángulo:*

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$$

SOLUCIÓN XI: $\boxed{\mathbf{S} = \frac{3}{2}\ \mathbf{u}^2}$

92. RESOLUCIÓN

Llamando θ al ángulo que forman:

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$tg\,\theta = \frac{5 - \dfrac{5}{3}}{1 + \dfrac{5}{3}\cdot 5} = \frac{\dfrac{10}{3}}{\dfrac{28}{3}}$$

$$tg\,\theta = \frac{5}{14}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$r_1 \equiv 5x - 3y + 4 = 0$

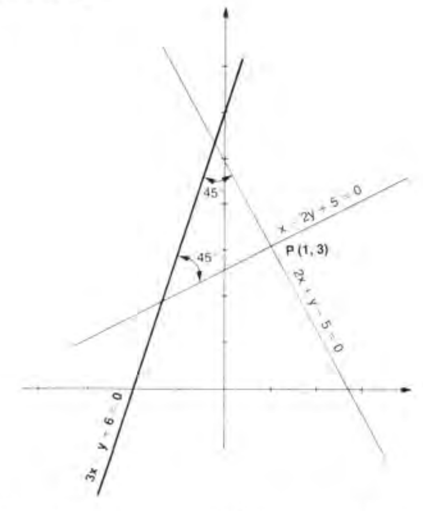
$m_1 = \dfrac{5}{3}$

$r_2 \equiv y = 5x - 9$

$m_2 = 5$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\theta = \text{arc tg}\,\dfrac{5}{14}}$

93. RESOLUCIÓN



PRIMERA SOLUCIÓN:

Tomando $m_1 = 3$

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$1 = \frac{m_2 - 3}{1 + 3m_2}$$

$$m_2 = -2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$r \equiv 3x - y + 6 = 0$

$m = 3$

NOTA: El valor de m = 3 puede tomarse para m_1 o para m_2:

$\theta = 45° \Rightarrow tg\,\theta = 1$

La recta pedida pasa por el P (1, 3) con pendiente −2.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 3 = -2\,(x - 1)$$

PRIMERA SOLUCIÓN: $\mathbf{r_1 \equiv 2x + y - 5 = 0}$

SEGUNDA SOLUCIÓN:

Tomando $m_2 = 3$

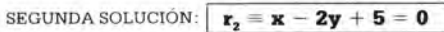
$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$1 = \frac{3 - m_1}{1 + 3m_1}$$

$$m_1 = \frac{1}{2}$$

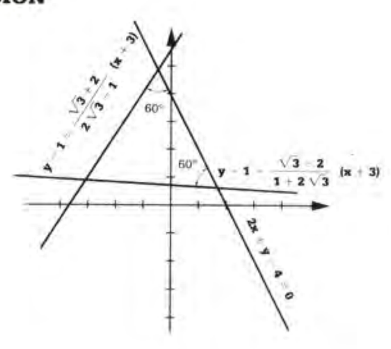
La recta pedida pasa por el P (1, 3) con pendiente 1/2.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{1}{2}\,(x - 1)$$



SEGUNDA SOLUCIÓN: $\mathbf{r_2 \equiv x - 2y + 5 = 0}$

94. RESOLUCIÓN



PRIMERA SOLUCIÓN:

Tomando $m_1 = -2$

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{m_2 + 2}{1 - 2m_2}$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{3} - 2}{1 + 2\sqrt{3}}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$r \equiv 2x + y - 4 = 0$

$m = -2$

NOTA: El valor de m = −2 puede tomarse para m_1 o para m_2:

$\theta = 60° \Rightarrow tg\,\theta = \sqrt{3}$

La recta pedida pasa por el P (−3, 1) con pendiente $\dfrac{\sqrt{3} - 2}{1 + 2\sqrt{3}}$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

PRIMERA SOLUCIÓN:

$$\mathbf{y - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{1 + 2\sqrt{3}}\,(x + 3)}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN:

Tomando $m_2 = -2$

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{-2 - m_1}{1 - 2m_1}$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} - 1}$$

La recta pedida pasa por el P (−3, 1) con pendiente $\dfrac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} - 1}$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $\mathbf{y - 1 = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} - 1}\,(x + 3)}$

95. RESOLUCIÓN

• *Cálculo de la pendiente de la recta determinada por A (2, 1) y B (4, −3).*

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{4 - 2}$$

$$m_{AB} = -2$$

• *Cálculo de la pendiente de cualquier perpendicular a la recta AB.*

$$m = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{2}$$

• *Ecuación de la recta que pasa por A (2, 1) con pendiente m = 1/2.*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}\,(x - 2)$$

SOLUCIÓN: **$x - 2y = 0$**

96. RESOLUCIÓN

• *Pendiente de la recta $r_1 \equiv 2x + 6y - 5 = 0$*

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{3}$$

• *Pendiente de la recta buscada*

$$m = -\frac{1}{m_1} = 3$$

• *Recta que pasa por P (4, 0) con m = 3*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 0 = 3\,(x - 4)$$

SOLUCIÓN: **$3x - y - 12 = 0$**

97. RESOLUCIÓN

• *Punto de intersección de las rectas:*

$$x - 4y + 6 = 0\ ;\ 3x - 5y - 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 4y + 6 = 0 \\ 3x - 5y - 3 = 0 \end{array}\right\}\ P\,(6,\ 3)$$

• *Recta que corta a los ejes en A (4, 0) y B (0, −3).*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$3x - 4y - 12 = 0$$

• *Distancia del P (6, 3) a la recta $r \equiv 3x - 4y - 12 = 0$*

$$d\,(Pr) = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d\,(Pr) = \left|\frac{18 - 12 - 12}{\sqrt{9 + 16}}\right| = \frac{6}{5}$$

SOLUCIÓN: **$d = \frac{6}{5}$ u**

98. RESOLUCIÓN

Basta tener en cuenta que un P (x, y) pertenece a la mediatriz del segmento de extremos P_1 y P_2 si, y sólo si:

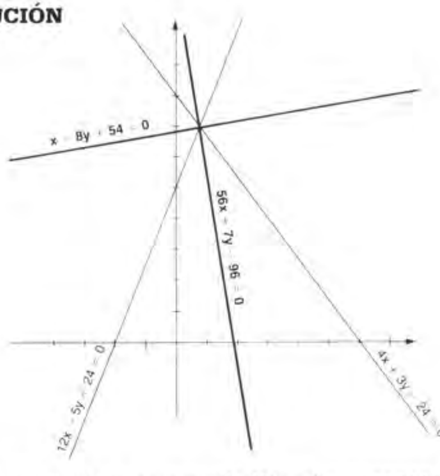
$$d\,(PP_1) = d\,(PP_2)$$

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 3)^2}$$

SOLUCIÓN: **$3x - 2y + 5 = 0$**

NOTA: También se puede hallar la ecuación de la recta que pasa por M, punto medio de $\overline{P_1P_2}$, y es perpendicular a la determinada por los puntos P_1 y P_2.

99. RESOLUCIÓN



Basta tener en cuenta que un punto P (x, y) pertenece a la bisectriz del ángulo determinado por r_1 y r_2 si, y sólo si:

$$d\,(Pr_1) = d\,(Pr_2)$$

$$\left|\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right| = \left|\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right|$$

$$\left|\frac{4x + 3y - 24}{\sqrt{16 + 9}}\right| = \left|\frac{12x - 5y + 24}{\sqrt{144 + 25}}\right|$$

$$\frac{4x + 3y - 24}{\pm 5} = \frac{12x - 5y + 24}{13}$$

PRIMERA SOLUCIÓN:

$$\frac{4x + 3y - 24}{5} = \frac{12x - 5y + 24}{13}$$

PRIMERA SOLUCIÓN: **$x - 8y + 54 = 0$**

SEGUNDA SOLUCIÓN:

$$\frac{4x + 3y - 24}{-5} = \frac{12x - 5y + 24}{13}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: **$56x + 7y - 96 = 0$**

100. RESOLUCIÓN

$$d\,(Pr_1) = d\,(Pr_2) \qquad \text{(ver 46)}$$

$$\left|\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right| = \left|\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right|$$

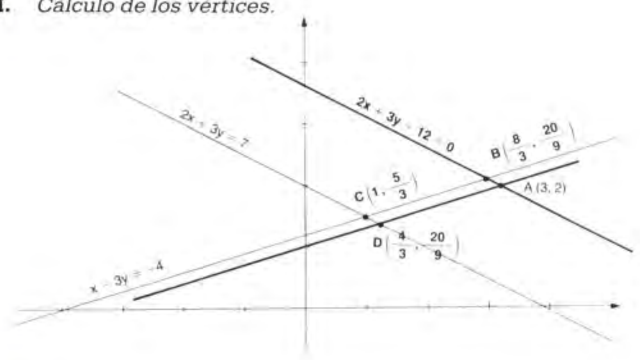
$$\left|\frac{3x - 4y + 12}{\sqrt{9 + 16}}\right| = \left|\frac{5x + 12y - 30}{\sqrt{25 + 144}}\right|$$

$$\frac{3x - 4y + 12}{\pm 5} = \frac{5x + 12y - 30}{13}$$

SOLUCIÓN: **$7x - 56y + 153 = 0\ ;\ 32x + 4y + 3 = 0$**

101. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo de los vértices.*



a) *Cálculo de C:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 7 \\ x - 3y = -4 \end{array}\right\} ;\ C\left(1, \frac{5}{3}\right)$$

b) *Cálculo de B:*

- *Recta que pasa por A (3, 2) y es paralela a* $r \equiv 2x + 3y = 7$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}\,(x - 3)$$

$$2x + 3y - 12 = 0$$

- *Intersección de las rectas* $x - 3y = -4$; $2x + 3y - 12 = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y \quad = -4 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{array}\right\} ;\ B\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{9}\right)$$

c) *Cálculo de D:*

$$\vec{AD} = \vec{BC}$$

$$\vec{AD}\,(x_D - 3, y_D - 2)\ ;\ BC\left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_D - 3 = -\dfrac{5}{3} \\ y_D - 2 = -\dfrac{5}{9} \end{array}\right\} ;\ D\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{9}\right)$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{B\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{9}\right) ; C\left(1, \frac{5}{3}\right) ; D\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{9}\right)}$

II. *Cálculo del punto medio de sus diagonales.*

- *Sea M el punto medio de la diagonal AC:*

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$M\left(2, \frac{11}{3}\right)$$

- *Sea **N** el punto medio de la diagonal BD:*

$$N\left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$N\left(2, \frac{11}{3}\right)$$

SOLUCIÓN II: **Las diagonales se cortan en el punto medio.**

III. *Clasificación del cuadrilátero.*

$$d\,(AB) = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{20}{9} - 2\right)^2}$$

$$d\,(AB) = \frac{\sqrt{13}}{9}\ u$$

$$d\,(BC) = \sqrt{\left(1 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{20}{9}\right)^2}$$

$$d\,(BC) = \frac{\sqrt{250}}{9}\ u$$

Como $d\,(AB) \neq d\,(BC)$ *no puede ser un cuadrado o un rombo.*

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1}{3}$$

Como:

$$m_{AB} \neq -\frac{1}{m_{BC}}$$

no puede ser rectángulo (el cuadrado ya quedó descartado anteriormente).

SOLUCIÓN III: **Es un romboide.**

IV. *Cálculo del área*

Tomamos como base el lado CB.

- *Longitud de la base (ver III).*

$$d\,(BC) = \frac{\sqrt{250}}{9}\ u$$

- *Longitud de la altura.*

Es la distancia del vértice A (3, 2) a la recta $r \equiv x - 3y + 4 = 0$.

$$d\,(Ar) = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \frac{3 - 6 + 4}{\sqrt{1 + 9}}$$

$$d\,(Ar) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

- *Área del paralelogramo.*

$$S = \text{BASE} \times \text{ALTURA} = \frac{\sqrt{250}}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{9\sqrt{10}}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{S = \frac{5}{9}\ u^2}$

102. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación general de todas las rectas paralelas a la dada.*
Toda recta paralela a la $2x - 3y + 4 = 0$ *es de la forma:*

$$r \equiv 2x - 3y + C = 0$$

b) *Determinación de C para que la distancia de* P_1 *(4, 2) a la* $r \equiv 2x - 3y + C = 0$ *sea* $3\sqrt{13}$.

$$d\,(P_1r) = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

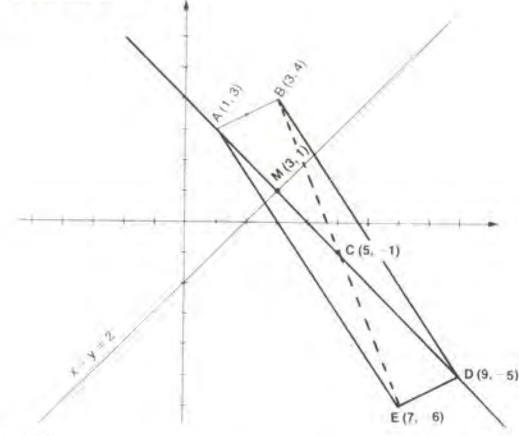
$$\left|3\sqrt{13} = \frac{8 - 6 + C}{\sqrt{4 + 9}}\right|$$

$$\left|3\sqrt{13} = \frac{2 + C}{\pm\sqrt{13}}\right|$$

$$C_1 = 37\ ;\ C_2 = -41$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{r_1 \equiv 2x - 3y + 37 = 0\ ;\ r_2 \equiv 2x - 3y - 41 = 0}$

103. RESOLUCIÓN



a) *Cálculo C*

- *Recta que pasa por A y es perpendicular a* $x - y = 2$.

$$x + y - 4 = 0$$

- *Intersección de la recta hallada y la dada, obtenemos M, punto medio del segmento AC.*

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} M\,(3, 1)$$

- *Cálculo de C*

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{1 + x_C}{2} \\ 1 = \dfrac{3 + y_C}{2} \end{array}\right\} C\,(5,\,-1)$$

b) *Cálculo del vértice D.*

Como C es el punto medio de la diagonal AD.

$$\left.\begin{array}{l} x_C = \dfrac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_D}{2} \end{array}\right\} D\,(9,\,-5)$$

c) *Como C es también el punto medio de la diagonal BE.*

$$\left.\begin{array}{l} x_C = \dfrac{x_B + x_E}{2} \\ y_C = \dfrac{y_B + y_E}{2} \end{array}\right\} E\,(7,\,-6)$$

SOLUCIÓN: **A (1, 3) ; B (3, 4) ; D (9, −5) ; E (7, −6)**

104. RESOLUCIÓN

a) *Cálculo del lado del cuadrado.*

Las rectas:

$$r_1 \equiv 3x - 4y + 8 = 0 \;;\; r_2 \equiv y = \frac{3}{4}x - 7$$

son paralelas, por lo que la distancia entre ellas nos dará el lado del cuadrado.

- *Un punto arbitrario de r_2:*

$$P\,(0,\,-7)$$

- *Distancia de P (0, −7) a $r_1 \equiv 3x - 4y + 8 = 0$*

$$d\,(Pr_1) = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d\,(Pr_1) = \frac{0 + 28 + 8}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{36}{5}$$

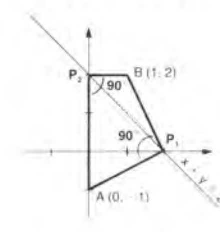
$$l = \frac{36}{5}\,u$$

b) *Cálculo del área del cuadrado.*

$$S = l^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \dfrac{1296}{25}\ u^2}$

105. RESOLUCIÓN



Sea P (x_1, y_1) el punto buscado.

$$m_{AP} = \frac{y_1 + 1}{x_1} \;;\; m_{BP} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1}$$

- *Por ser PA y PB perpendiculares:*

$$m_{AP} = -\frac{1}{m_{BP}}$$

$$\frac{y_1 + 1}{x_1} = -\frac{x_1 - 1}{y_1 - 2}$$

- *Por pertenecer P (x_1, y_1) a la $r \equiv x + y = 2$*

$$x_1 + y_1 = 2$$

- *Por tener que cumplirse los dos apartados anteriores:*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + y_1 = 2 \\ \dfrac{y_1 + 1}{x_1} = -\dfrac{x_1 - 1}{y_1 - 2} \end{array}\right\} ;\; P_1\,(2,\,0) \;;\; P_2\,(0,\,2)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{P_1\,(2,\,0)\ ;\ P_2\,(0,\,2)}$

106. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo de m para que sean perpendiculares.*

$$m_1 = \frac{-m}{m - 1} \;;\; m_2 = \frac{-2m}{-(2m + 1)}$$

$$r_1 \perp r_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{-m}{m - 1} = \frac{2m + 1}{-2m}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{m = -1}$

II. *Punto de intersección P.*

Para m = −1 ; $r_1 \equiv x + 2y - 4 = 0$; $r_2 \equiv 2x - y + 3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{11}{5} \end{array}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{P\left(-\dfrac{2}{5},\,\dfrac{11}{5}\right)}$

107. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo de m para que sean paralelas.*

$$m_1 = \frac{-(2m - 1)}{2m} \;;\; m_2 = \frac{-(m + 1)}{m + 2}$$

$$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{-(2m - 1)}{2m} = \frac{-(m + 1)}{m + 2}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{m = 2}$

II. *Distancia entre ellas.*

Para m = 2 ; $r_1 \equiv 3x + 4y - 8 = 0$; $r_2 \equiv 3x + 4y + 6 = 0$

- *Un punto arbitrario de r_1:*

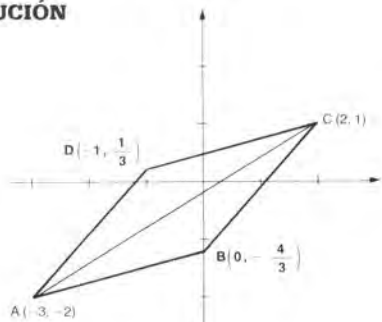
$$P_1\,(0,\,2)$$

- *Distancia de P_1 (0, 2) a $r_2 \equiv 3x + 4y + 6 = 0$:*

$$d\,(P_1r_2) = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \qquad d\,(P_1r_2) = \left|\frac{0 + 8 + 6}{\sqrt{9 + 16}}\right|$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{d = \dfrac{14}{5}\ u}$

108. RESOLUCIÓN



I. *Cálculo de los vértices.*

a) *Cálculo del vértice B*

- *Ecuación de la mediatriz de AC*

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

$$5x + 3y + 4 = 0$$

• *Intersección de esta recta con el eje de ordenadas.*

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{array}$$

SOLUCIÓN a): $\boxed{\mathbf{B\left(0, -\dfrac{4}{3}\right)}}$

b) *Cálculo del vértice D*

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AD}\,(x_D + 3,\, y_D + 2) \;;\; \overrightarrow{BC}\,(2,\, 7/3)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_D + 3 = 2 \\ y_D + 2 = \dfrac{7}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_D = -1 \\ y_D = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

SOLUCIÓN b): $\boxed{\mathbf{D\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)}}$

II. *Cálculo del área del rombo.*

• *Longitud de la diagonal AC.*

$$d_1 = d\,(AC) = \sqrt{34}$$

• *Longitud de la diagonal BD.*

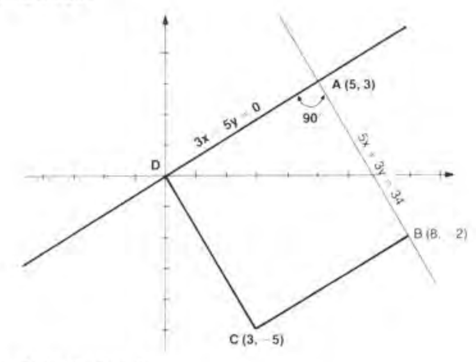
$$d_2 = d\,(BD) = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{34} \cdot \dfrac{\sqrt{34}}{3}}{2}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{S = \dfrac{17}{3}\ u^2}}$

109. RESOLUCIÓN



a) *Cálculo del vértice A.*

• *Ecuación de la recta que pasa por D (0, 0) y es perpendicular a la 5x + 3y = 34*

$$3x - 5y = 0$$

• *Intersección de las rectas 5x + 3y = 34 ; 3x − 5y = 0*

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 34 \\ 3x - 5y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array}$$

$$A\,(5,\, 3)$$

b) *Cálculo del vértice C*

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{DC}\,(x_C - 0,\, y_C - 0) \;;\; \overrightarrow{AB}\,(3,\, -5) \qquad \left.\begin{array}{l} x_C = 3 \\ y_C = -5 \end{array}\right\} C\,(3,\, -5)$$

SOLUCIÓN: **A (5, 3) ; C (3, −5)**

110. RESOLUCIÓN

Si buscamos un punto equidistante de A y B hay que buscarlo en la mediatriz del segmento AB, que es donde están todos los que cumplen esa condición.

• *Ecuación mediatriz segmento AB:*

$$x + y + 11 = 0$$

Si el problema nos exige que pertenezca el punto buscado a la recta 3x − 5y + 25 = 0, el punto será la intersección de ambas rectas.

• *Intersección de las dos rectas:*

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 11 = 0 \\ 3x - 5y + 25 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{15}{4} \\ y = \dfrac{29}{4} \end{array}$$

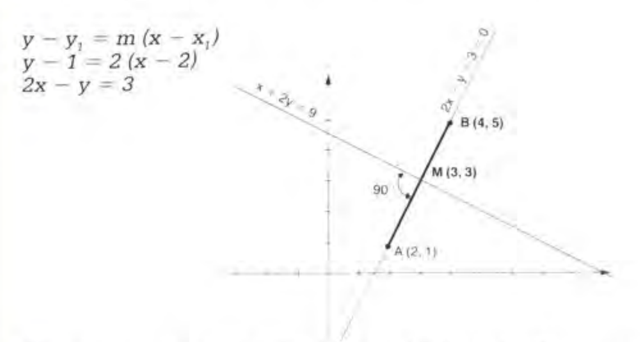
SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P\left(\dfrac{15}{4}, \dfrac{29}{4}\right)}}$

NOTA: Hágase la representación gráfica para comprobarlo.

111. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación de la recta que pasa por A (2, 1) y es perpendicular a la x + 2y = 9.*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 1 = 2\,(x - 2)$$
$$2x - y = 3$$



b) *Intersección de las rectas halladas y dada. Obtenemos M, punto medio del segmento AB.*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \end{array}\right\} M\,(3,\, 3)$$

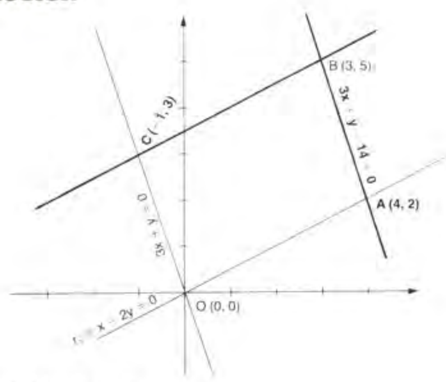
c) *Cálculo del extremo B.*

$$M\,(3,\, 3) \;;\; A\,(2,\, 1) \;;\; B\,(x_B,\, y_B)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{2 + x_B}{2} \\ 3 = \dfrac{1 + y_B}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_B = 4 \\ y_B = 5 \end{array}$$

SOLUCIÓN: **B (4, 5)**

112. RESOLUCIÓN



a) *Cálculo del vértice A*

• *Recta que pasa por B (3, 5) y es paralela a $r_2 \equiv 3x + y = 0$*

$$r_3 \equiv 3x + y - 14 = 0$$

• *Intersección de las rectas:*

$$r_1 \equiv x - 2y = 0 \;;\; r_3 \equiv 3x + y - 14 = 0$$

Obtenemos el vértice A.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y \quad\;\; = 0 \\ 3x + y - 14 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

$$A\,(4,\, 2)$$

b) *Cálculo del vértice C*

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OC}\,(x_C - 0,\, y_C - 0) \;;\; \overrightarrow{AB}\,(-1,\, 3)$$

$$x_C = -1 \;;\; y_C = 3$$

SOLUCIÓN: **A (4, 2) ; C (−1, 3)**

Bloque 6

- ✔ Problemas sobre límites de sucesiones
- ✔ Problemas relacionados con el número «e»
- ✔ Problemas sobre límites de funciones
- ✔ Problemas sobre continuidad y discontinuidad de funciones

PROBLEMAS SOBRE LÍMITES DE SUCESIONES

Sucesiones de números reales

Se llama sucesión de números reales a toda aplicación del conjunto N^* *(conjunto de los números naturales excluido el cero) en el conjunto* R *de los números reales.*

Generalmente se expresa la sucesión en la forma:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

donde a_1 *es la imagen del número* 1 *en la citada aplicación,* a_2 *imagen del* 2, *y, en general,* a_n *la imagen del número natural* n.

En la sucesión anterior:

a_1 *es el primer término*
a_2 *es el segundo término*
. . . .
a_n *es el n-ésimo término*

Frecuentemente se expresa la sucesión por su término general, de la forma: (a_n) *o* $\{a_n\}$

Sucesiones monótonas

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales es monótona creciente, si para todo valor de* $n \in N^*$ *se verifica:*

$$a_{n+1} \geqslant a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geqslant 0$$

es decir, si cada término de la sucesión es mayor o igual que el anterior.

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales es monótona decreciente, si para todo valor de* $n \in N^*$ *se verifica:*

$$a_{n+1} \leqslant a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \leqslant 0$$

es decir, si cada término de la sucesión es menor o igual que el anterior.

Sucesiones acotadas

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales está acotada superiormente, si existe un número real* K' *(cota superior), tal que para todo valor de* n *se verifica:*

$$a_n \leqslant K'$$

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales está acotada inferiormente, si existe un número real* K'' *(cota inferior), tal que para todo valor de* n *se verifica:*

$$a_n \geqslant K''$$

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales está acotada y que una cota es* K, *si para todo valor de n se verifica:*

$$|a_n| \leqslant K \Leftrightarrow -K \leqslant a_n \leqslant K$$

En general:

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales es una sucesión acotada, si está acotada superior e inferiormente, es decir:*

$$K'' \leqslant a_n \leqslant K'$$

Límite de una sucesión

I. Definición: *Se dice que una sucesión* (a_n) *de números reales tiene por límite el número real fijo* l, *cuando existe un número* $n_0 \in N^*$ *tal que, todos los términos de la sucesión a partir del que ocupa el lugar enésimo,* $n > n_0$ *verifican:*

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad ó \quad |l - a_n| < \varepsilon$$

siendo $\varepsilon > 0$ *un número positivo tan pequeño como se desee.*

Para expresar que l *es el límite de la sucesión* (a_n), *se escribe:*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \quad ó \quad a_n \longrightarrow l$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in N^* / \forall n > n_0 : |a_n - l| < \varepsilon$$

II. Definición:

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales tiene por límite el número real* l, *cuando para todo número real* $\varepsilon > 0$ *existe un término* a_{n_0} de la sucesión a partir de la cual todos los términos siguientes están en el entorno abierto del punto l *y radio* ε, *es decir,* $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

Se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \quad o \quad a_n \longrightarrow l$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in N^* / \forall n > n_0, l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

III. Definición:

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales tiene por límite el número real* l, *cuando para todo número real* $\varepsilon > 0$, *se puede determinar un número natural* n_0 *tal que para todo* $n > n_0$, *se verifica que* $a_n \in E(l, \varepsilon)$, *siendo* $E(l, \varepsilon)$ *el entorno de centro* l *y radio* ε.

Se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \quad o \quad a_n \longrightarrow l$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in N^* / \forall n > n_0, a_n \in E(l, \varepsilon)$$

Límites infinitos

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales tiene límite infinito, cuando para todo número* $K \in R$ *por grande que sea, existe un número* $n_0 \in N^*$ *tal que para todo* $n > n_0$ *se verifica:* $|a_n| > K$.

Se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad o \quad a_n \longrightarrow \infty$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall K \in R \ \exists \ n_0 \in N^* / \forall n > n_0, |a_n| > K$$

Clasificación de las sucesiones:

Las sucesiones, atendiendo a su límite, se clasifican en:

— *Convergentes, si tienen límite finito.*
— *Divergentes, si tienen límite infinito* ($\pm\infty$).
— *Oscilantes, si carecen de límite finito o infinito.*

Sucesión nula

Se dice que una sucesión (a_n) *de números reales es nula si se verifica que:*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \quad \textit{luego} \quad |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

Se dice también que (a_n) *es una sucesión infinitesimal o un infinitésimo.*

Propiedades de los límites

I. *Si una sucesión* (a_n) *tiene límite, éste es único, es decir:*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

II. *Si una sucesión* (c_n) *está comprendida entre otras dos* (a_n) *y* (b_n), *que tienen el mismo límite* l, *dicha sucesión* (c_n) *tiene el mismo límite que las anteriores:*

$$Si\ (a_n) \leqslant (c_n) \leqslant (b_n) \ y \ \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = l$$

se verifica:

$$\lim_{n \to \infty} c_n = l$$

III. *Si una sucesión* (a_n) *tiene por límite* l *y desde un cierto valor de* n *en adelante se conserva* $a_n > K$, *siendo* $K \in R$, *entonces* $l \geqslant K$.

IV. *Si una sucesión* (a_n) *tiene por límite* l *y desde un cierto valor de* n *en adelante se conserva* $a_n \leqslant K$ *entonces* $K \geqslant l$.

V. *Si las sucesiones* (a_n) *y* (b_n) *tienen por límites* l_1 *y* l_2 *siendo* $l_1 < l_2$, *se verifica que desde un valor de n en adelante es* $a_n < b_n$.

Cálculo de límites

Sean (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones convergentes tales que:*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l_1 \quad y \quad \lim_{n \to \infty} b_n = l_2$$

se verifica:

I. $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = l_1 + l_2$

II. $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = l_1 - l_2$

III. *Si K es una constante:*

$$\lim_{n\to\infty} (K \cdot a_n) = K \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = K \cdot l_1$$

IV. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = l_1 \cdot l_2$

V. *Si* $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

VI. *Si* $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} (\log_a b_n) = \log_a (\lim_{n\to\infty} b_n) = \log_a l_2$$

VII. *Si* $a > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{bn} = a^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^{l_2}$$

VIII. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = l_1^{\lim_{n\to\infty} b_n} = l_1^{l_2}$$

Expresiones indeterminadas

I. Forma: $\infty - \infty$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty - \infty$

Normalmente para calcular su verdadero valor se halla la diferencia de las dos sucesiones y se calcula el límite de la sucesión diferencia.

II. Forma: $\frac{\infty}{\infty}$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$

Cuando ambas sucesiones, numerador y denominador son polinomios en n, esta indeterminación desaparece dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de n.

III. Forma: $0 \cdot \infty$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0 \cdot \infty$

Normalmente para calcular su verdadero valor se efectúa el producto de las dos sucesiones y se halla el límite de la sucesión producto.

IV. Forma: $\frac{0}{0}$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{0}$

Normalmente para calcular su verdadero valor se efectúa el cociente de las dos sucesiones y se halla el límite de la sucesión cociente o también, la indeterminación suele desaparecer simplificando cuanto sea posible numerador y denominador.

NOTA: *No existen criterios que nos permitan dar reglas que solucionen el cálculo de los diversos tipos de límites, o de los distintos casos de indeterminación. Solamente la práctica de la resolución de límites nos puede orientar acerca del artificio que se debe seguir en cada caso.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

I. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$

II. $\left(2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \ldots\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{a_n = \frac{n}{n+1}}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{a_n = \frac{3n-1}{n}}$

2. Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

I. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \ldots\right)$

II. $\left(\frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{9}{6}, \frac{10}{7}, \ldots\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{a_n = \frac{n}{3^n}}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{a_n = \frac{n+5}{n+2}}$

3. Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

I. $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \frac{1}{256}, \ldots\right)$

II. $\left(4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n^n}}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{4^{n-2}}}$

4. Escribir los primeros términos de las siguientes sucesiones:

I. $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$

II. $(b_n) = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)$

III. $(c_n) = \left(\frac{8}{2^{n-1}}\right)$

IV. $(d_n) = \left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{10}{11}, \frac{13}{14}, \ldots\right)}$

SOLUCIÓN III: $\boldsymbol{\left(\frac{8}{1}, \frac{8}{2}, \frac{8}{2^2}, \frac{8}{2^3}, \ldots\right)}$

SOLUCIÓN IV: $\boldsymbol{\left(\frac{3}{1}, \frac{9}{4}, \frac{19}{9}, \frac{33}{16}, \ldots\right)}$

5. Dada la sucesión $(a_n) = (-1)^n\left(\frac{n+2}{n}\right)$. Calcular los términos: a_1, a_3, a_6.

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{a_1 = -3,\ a_3 = -\frac{5}{3},\ a_6 = \frac{4}{3}}$

6. Calcular el término a_{16} de la sucesión $(a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{a_{16} = 31}$

7. Dada la sucesión $(a_n) = \left(1 + \frac{2n}{n^2+1}\right)$. Hallar k sabiendo que: $a_k = \frac{36}{26}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{k_1 = 5}$

8. Dadas las sucesiones:

$$(a_n) = \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right) \quad \text{y} \quad (b_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Hallar:

I. Los tres primeros términos de las sucesiones (a_n) y (b_n)

II. Los tres primeros términos de la sucesión $(a_n \cdot b_n)$

III. El término general de la sucesión $(a_n \cdot b_n)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{(a_n) = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \ldots\right)}$ $\boldsymbol{(b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right)}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \ldots\right)}$

SOLUCIÓN III: $\boldsymbol{a_n \cdot b_n = \frac{n}{1+n^2}}$

9. Hallar los siguientes límites:

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{2n-3}{n}\right)$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{n^2} + \frac{n}{n+1}\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{2n-3}{n}\right) = 3}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{n^2} + \frac{n}{n+1}\right) = 3 + 1 = 4}$

10. Hallar los siguientes límites:

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2}{2n^2+1} - \frac{1-3n^2}{n^2}\right)$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2-1} - \frac{n+2}{n-1}\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2}{2n^2+1} - \frac{1-3n^2}{n^2}\right) = 7}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2-1} - \frac{n+2}{n-1}\right) = -1}$

11. Hallar los siguientes límites:

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n} \cdot \frac{5n^2+5}{n^2+1}\right)$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+1} \cdot \frac{5n+3}{n}\right)$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n} \cdot \frac{5n^2+5}{n^2+1}\right) = \frac{10}{3}}$

SOLUCIÓN II: $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+1} \cdot \frac{5n+3}{n}\right) = 0}$

12. Hallar los siguientes límites:

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1} : \frac{n+1}{n-1}\right)$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{n+3} : \frac{n}{n+1}\right)$

SOLUCIÓN I: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} : \frac{n+1}{n-1} \right) = 1$

SOLUCIÓN II: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5n+2}{n+3} : \frac{n}{n+1} \right) = 5$

13. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} 2^{\frac{6n+1}{3n}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{\frac{6n-1}{3n}} = 4$

14. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} 3^{\frac{n+8}{1+n^2}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{\frac{n+8}{1+n^2}} = 1$

15. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^{\frac{4n+5}{n-3}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^{\frac{4n+5}{n-3}} = 1$

16. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2n+3}{n-1}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2n+3}{n-1}} = \sqrt{2}$

17. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+2n+5}{5n^2+1}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2+2n+5}{5n^2+1} = \frac{3}{5}$

18. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{8n^2-10n+4}{6n^2+8n-2}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{8n^2-10n+4}{6n^2+8n-2} = \frac{4}{3}$

19. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2+2n-3}{5n^2+6}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n^2+2n-3}{5n^2+6} = \frac{4}{5}$

20. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}$

21. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdots$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdots = 2$

22. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}\cdots$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}\cdots = \sqrt{2}$

23. Hallar:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot b_n$, sabiendo que los términos generales de las dos sucesiones son: $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = n^2$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = +\infty$

24. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} (1+n)\, n^{-1/2}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} (1+n)\, n^{-1/2} = +\infty$

25. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}[3+6+9+\cdots+3n]$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}[3+6+9+\cdots+3n] = \frac{3}{2}$

26. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n}{4n+\sqrt{9n^2-2}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n}{4n+\sqrt{9n^2-2}} = \frac{3}{7}$

27. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} \right]$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} \right] = \frac{5}{2}$

28. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1} = 8$

29. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4n^4+n-1}+3}{n^2+n+2}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4n^4+n-1}+3}{n^2+n+2} = 2$

30. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}} = 1$

31. Hallar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^4+2n-1}}$$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^4+2n-1}} = +\infty$

32. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2-3n}{1-n}}\right)^{\frac{n-1}{n+3}}$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2-3n}{1-n}}\right)^{\frac{n-1}{n+3}} = \sqrt[3]{3}$$

33. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$$

34. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = 0$$

35. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{4n^2-1}-(2n-1)\right]$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{4n^2+1}-(2n-1)\right] = 1$$

36. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1})$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1}) = \frac{3}{2}$$

37. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) = 1$$

38. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3-2n}-\sqrt{n^2+1}}$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3-2n}-\sqrt{n^2+1}} = +\infty$$

39. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8n^2-1}}{\sqrt{n^2+2n-1}}$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8n^2-1}}{\sqrt{n^2+2n-1}} = 2\sqrt{2}$$

40. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)\sqrt{16n^2-1}}{4n^3-6n^2+2}$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)\sqrt{16n^2-1}}{4n^3-6n^2+2} = 1$$

41. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{2n+1}{n}\right]$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{2n+1}{n}\right] = \log 2$$

42. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{1+n^2}{2+n^2}\right]$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{1+n^2}{2+n^2}\right] = 0$$

43. Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{4n+5}{n^2+5}\right]$$

SOLUCIÓN: $$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{4n+5}{n^2+5}\right] = -\infty$$

PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL NÚMERO «e»

El número «e»

La sucesión definida por $(a_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *es:*

1.° *Monótona creciente.*
2.° *Está acotada superiormente.*
3.° *Tiene límite.*

El límite de esta sucesión $(a_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *es un número muy importante en la matemática superior y se le representa por la letra «e», es decir:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty = e$$

El número e *es la base de los logaritmos naturales o neperianos; es un número irracional, cuyas primeras cifras son:*

$$e = 2{,}718281\ldots$$

Este número está acotado entre 2 *y* 3, *es decir:*

$$2 < e < 3$$

Aplicaciones del número «e»

I. $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$ (1)

Si hacemos: $\alpha = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{\alpha}$, *sustituyendo en* (1) *y teniendo en cuenta que cuando* $\alpha \to 0$, $n \to \infty$, *resulta:*

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

II. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (2)

Si hacemos: $\alpha = \frac{x}{n} \Rightarrow n = \frac{x}{\alpha}$, *sustituyendo en* (2) *y teniendo en cuenta que cuando* $n \to \infty$, $\alpha \to 0$, *resulta:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{x/\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^x = e^x$$

III. $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log e$

En efecto:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left[\log(1+\alpha)^{1/\alpha}\right] = \log\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right] = \log e$$

IV. *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones tales que:*

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *se verifica:*

$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 1^\infty$, *podemos escribir:*

$$a_n^{b_n} = \left[(1+a_n-1)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n(a_n-1)}$$

y como $a_n - 1 \to 0$, *resulta:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[(1+a_n-1)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n(a_n-1)} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$$

NOTA: Esta fórmula es de gran utilidad para calcular límites de la forma 1^∞, es decir, para calcular límites del número e.

EJERCICIOS PROPUESTOS

44. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}}$$

45. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2}$$

46. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = e^3}$$

47. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+4}{n}\right)^{3n}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+4}{n}\right)^{3n} = e^{12}}$$

48. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2}$$

49. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+4}{3n}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+4}{3n}\right)^n = e\sqrt[3]{e}}$$

50. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{5n}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{5n} = e^{10}}$$

51. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1}$$

52. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^n = e^{-6}}$$

53. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{2n}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{2n} = e^{-2}}$$

54. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} (1 + 5x)^{1/x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + 5x)^{1/x} = e^5}$$

55. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{1/x^2}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{1/x^2} = \infty}$$

56. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2+2}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2+2} = e^2}$$

57. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{1-n}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{1-n} = e^{-5}}$$

58. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = e}$$

59. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n+6}{4n}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n+6}{4n}\right)^n = e^{3/2}}$$

60. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{2n+7}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{2n+7} = e^{8/3}}$$

61. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2}\right)^{4n^2}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2}\right)^{4n^2} = e^{16}}$$

62. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2-5n+7}{n^2-5n}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2-5n+7}{n^2-5n}\right)^n = 1}$$

63. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} = e^7}$$

64. Calcular:

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}}$$

65. Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2-2}\right)^{\frac{2n^2}{3-3n}}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2-2}\right)^{\frac{2n^2}{3-3n}} = 1}$$

PROBLEMAS SOBRE LÍMITES DE FUNCIONES

Límite de una función en un punto

I. Definición:

Se dice que una función f *tiene por límite el número real* «l» *cuando* x *tiende hacia* «x_0» *si para todo entorno de centro* l *y radio* ε, E (l, ε) *se puede encontrar un entorno* E_1 (x_0, δ) *de centro* x_0 *y radio* δ *tal que si* $x \in E_1(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$, *se verifica:* $f(x) \in E(l, \varepsilon)$ *y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall E(l, \varepsilon), \exists E_1(x_0, \delta) / \forall_{x \neq x_0} x \in E_1(x_0, \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \in E(l, \varepsilon)$$

II. Definición:

Se dice que una función f *tiene por límite* «l» *cuando para todo número real* $\varepsilon > 0$ *existe un número real* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in E_1(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$, *se verifica:* $f(x) \in E(l, \varepsilon)$ *y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall_{x \neq x_0} x \in E_1(x_0, \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \in E(l, \varepsilon)$$

$$f(x) \in E(l, \varepsilon) \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

III. Definición:

Se dice que una función f *tiene por límite* «l» *cuando* x *tiende hacia* x_0 *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < |x - x_0| < \delta$ *entonces* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

NOTA: Esta última definición es la que se utiliza más por su sencillez.

Límites laterales

Se dice que una función f *tiene por límite* «k» *cuando* x *tiende hacia* x_0 *por la derecha y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = k \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - k| < \varepsilon$$

Análogamente:

Se dice que una función f *tiene por límite* «h» *cuando* x *tiende hacia* x_0 *por la izquierda y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = h \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x_0 - x| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - h| < \varepsilon$$

Los límites por la derecha o por la izquierda de f *en* x_0 *se llaman* límites laterales *de* f *en el punto* x_0. *Si estos dos límites existen y son iguales, entonces, se dice que existe* $\lim_{x \to x_0} f(x)$, *es decir:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Límites infinitos

Sea f *una función. Se dice que el límite de* f (x) *cuando* $x \to x_0$ *es más infinito, y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \text{ si } \forall A > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

Análogamente:

Sea f *una función. Se dice que el límite de* f (x) *cuando* $x \to x_0$ *es menos infinito, y se escribe:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \text{ si } \forall A > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

Límites en el infinito

Se dice que el límite de f (x) *cuando* $x \to +\infty$ *es* «l», *y se escribe:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists A / x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Análogamente:

Se dice que el límite de f (x) *cuando* $x \to -\infty$ *es* «l», *y se escribe:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists A / x < A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Propiedades de los límites

1.ª *El límite de una función constante* f (x) = k *es* k, *es decir:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k$$

2.ª *El límite de la función identidad* f (x) = x *cuando* $x \to x_0$ *es* x_0, *es decir:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

3.ª *El límite de una función* f, *si existe, es único, es decir, una función no puede tener más que un límite.*

4.ª *El límite de una función polinómica* f (x) = p (x) *cuando* $x \to x_0$ *es* p (x_0), *es decir:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

5.ª *Sean* f *y* g *dos funciones tales que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$. *Si es* $l_1 < l_2$, *existe un entorno reducido de* x_0 *en cuyos puntos se verifica* f (x) < g (x).

6.ª *Sea* f *una función tal que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R}$; *siendo* $l > 0$, *existe un entorno reducido de* x_0, *en cuyos puntos es* f (x) > 0.

7.ª *Si dos funciones* f *y* g *toman valores iguales en los puntos de un cierto entorno reducido de* x_0 *y una de ellas tiene límite cuando* $x \to x_0$; *la otra tiene el mismo límite cuando* $x \to x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Cálculo de límites

Sean f *y* g *dos funciones tales que:* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *entonces se verifica:*

I. *El límite de la suma de estas dos funciones es igual a la suma de sus límites:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

II. *El límite de la diferencia de estas dos funciones es igual a la diferencia de sus límites:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 - l_2$$

III. *El límite del producto de estas dos funciones es igual al producto de sus límites:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

IV. *El límite del cociente de estas dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \neq 0$$

V. *El límite del logaritmo es el logaritmo del límite:*

Sea f *tal que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, *resulta:*

$$\lim_{x \to x_0} [\log f(x)] = \log [\lim_{x \to x_0} f(x)] = \log l$$

VI. *El límite de una exponencial es igual a la exponencial del límite:*

Sea f *tal que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *y* $a > 0$, *resulta:*

$$\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \to x_0} f(x)} = a^l$$

VII. *El límite de una potencia es igual a la potencia del límite:*

Sea f *tal que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ *y* $n \in \mathbf{R}$, *se verifica:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n$$

VIII. *El límite de una función elevada a otra función es igual al límite de la primera elevado al límite de la segunda:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim_{x \to x_0} g(x)} = l_1^{l_2} \quad \text{si } l_1 > 0$$

Infinitésimos equivalentes

Dos infinitésimos se dice que son equivalentes si el límite de su cociente es la unidad.

Teorema: *El límite de una expresión no se altera si se sustituye un infinitésimo por otro equivalente (si figura como factor o divisor).*

A continuación se representa una tabla de infinitésimos equivalentes, ya que facilita la resolución de muchas cuestiones.

TABLA DE EQUIVALENCIAS	
$\lim_{x \to 0} \text{sen}\, n\,x = \lim_{x \to 0} n\,x$	$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2}$
$\lim_{x \to 0} \text{tg}\, n\,x = \lim_{x \to 0} n\,x$	$\lim_{x \to 0} (1 - \cos n\,x) = \lim_{x \to 0} \frac{n^2 x^2}{2}$
$\lim_{x \to 0} [(1 + x)^n - 1] = \lim_{x \to 0} n\,x$	$\lim_{x \to 0} (a^x - 1) = \lim_{x \to 0} x \,\text{L}\, a$

EJERCICIOS PROPUESTOS

66. Probar que $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$

SOLUCIÓN: $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}}$

67. Probar que $\lim_{x\to 2} 3x = 6$

SOLUCIÓN: $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbf{3}}$

68. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Halla, si existe, $\lim_{x\to 1} f(x)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1} f(x) = 1}$

69. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Halla: $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2}$; $\mathbf{\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3}$; **No existe** $\mathbf{\lim_{x\to 1} f(x)}$

70. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

SOLUCIÓN: **No existe** $\mathbf{\lim_{x\to 0} f(x)}$

71. Demuestra que $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, aplicando la definición.

SOLUCIÓN: $\delta = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{A}}}$

72. Demuestra que $\lim_{x\to 3} \frac{1}{3x-9} = +\infty$, aplicando la definición.

SOLUCIÓN: $\delta = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3A}}$

73. Demuestra que $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$. Dado $\varepsilon = 0{,}1$, hallar el correspondiente A.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 1,5}$

74. Demuestra que $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{4x-1} = \frac{1}{2}$. Dado $\varepsilon = 0{,}1$, hallar el correspondiente a A.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 1,5}$

75. Calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{5x+1}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{5x+1} = 0}$

76. Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+5}{3-x}\right)^x$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+5}{3-x}\right)^x = 1}$

77. Calcular:

$$\lim_{x\to 1} (3x^2+5x-6)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1} (3x^2+5x-6) = 2}$

78. Calcular:

$$\lim_{x\to 1} (1+x^3)^{\frac{1}{1+x^3}}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1} (1+x^3)^{\frac{1}{1+x^3}} = \sqrt{2}}$

79. Calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}} = 2}$

80. Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{4}}$

81. Calcular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{2}{3}}$

82. Calcular:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{1}{7}}$

83. Calcular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+x-3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+x-3} = \frac{1}{5}}$

84. Calcular:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = 5}$

85. Calcular:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \frac{9}{2}}$

86. Calcular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}}$

87. Calcular:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 3x^2 + 4} = 2}$

88. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2}$

89. Calcular:

$$\lim_{x \to 1/3} \frac{3x^3 - 16x^2 + 5x}{3x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 1/3} \frac{3x^3 - 16x^2 + 5x}{3x^3 - 4x^2 + 4x - 1} = -\frac{2}{3}}$

90. Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{2x^2 + x - 3} = \frac{2}{5}}$

91. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} = 0}$

92. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = 2}$

93. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x} = -\frac{1}{2}}$

94. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}}$

95. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = 54\sqrt{3}}$

96. Calcular:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} = 4}$

97. Calcular:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}} = 0}$

98. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} = \frac{1}{4}}$

99. Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}}$

100. Calcular:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 4a\sqrt{a}}$

101. Calcular:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 6a^2\sqrt{a}}$

102. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = 0}$

103. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x} = -1}$

104. Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - x^3}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - x^3}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

105. Calcular:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0}$

106. Calcular:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

107. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} = \frac{1}{12}}$$

108. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}, \text{ siendo } f(x) = x^3$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 27}$$

109. Calcular:

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x^2-11x+30}, \text{ siendo } f(x) = x^2-3x$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x^2-11x+30} = -7}$$

110. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1}$$

111. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{2x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{2x} = 3}$$

112. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x \cos x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x \cos x} = 2}$$

113. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{8x^3-4x^2}{1-\cos x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{8x^3-4x^2}{1-\cos x} = -8}$$

114. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{10x^3 \cdot \text{sen } x}{\text{tg}^4 x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{10x^3 \cdot \text{sen } x}{\text{tg}^4 x} = 10}$$

115. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{8 \text{ tg } 2x}{(1+x)^2-1}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{8 \text{ tg } 2x}{(1+x)^2-1} = 8}$$

116. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \text{L } a}$$

117. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1}$$

118. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = 5}$$

119. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 3x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 3x} = \frac{5}{3}}$$

120. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } mx}{\text{sen } nx}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } mx}{\text{sen } nx} = \frac{m}{n}}$$

121. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

122. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 2x}{x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 2x}{x} = 2}$$

123. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{tg } 2x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{tg } 2x} = \frac{3}{2}}$$

124. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 2x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 2x} = \frac{3}{2}}$$

125. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \text{ sen } 3x}{x \cos 2x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{5 \text{ sen } 3x}{x \cos 2x} = 15}$$

126. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}$$

SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} = 0}$$

127. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3}$$

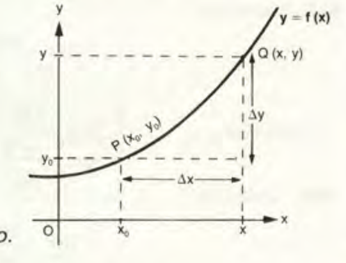
SOLUCIÓN: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3} = \frac{1}{2}}$$

PROBLEMAS SOBRE CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES

Concepto de función continua en un punto

Intuitivamente consideramos una función continua cuando su gráfica no presenta saltos y podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel.

$P(x_0, y_0)$ un punto fijo.
$Q(x, y)$ un punto variable.
$\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$
La continuidad en $P(x_0, y_0)$ significa que:
$\Delta x = x - x_0$ *e* $\Delta y = y - y_0$
tienden simultáneamente a cero.



I. Definición:

Se dice que una f es continua en $x = x_0$ si el incremento de la función en ese punto tiende a cero cuando lo hace el incremento de la variable independiente, es decir, si $\Delta x \longrightarrow 0$ también $\Delta y \longrightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

de donde: $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

II. Definición:
Se dice que una función f es continua en el punto $x = x_0$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1.ª *Existe $f(x_0)$, es decir, la función está definida para $x = x_0$*

2.ª *Existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, es decir, la función tiene límite cuando $x \longrightarrow x_0$*

3.ª *Es $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, es decir, el límite de la función es igual al valor de la función en ese punto.*

III. Definición:
Recordando la definición de límite de una función, podemos dar la siguiente definición:

Se dice que una función f es continua en $x = x_0$ si dado un número $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Simbólicamente se expresa así:

f continua $x = x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Propiedades de las funciones continuas

I. *Si f y g son funciones continuas en x_0, entonces $f + g$ es continua en x_0. Resulta:*

$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) =$

$= (f + g)(x_0)$

II. *Si f es una función continua en x_0, entonces $-f$ es continua en x_0. Resulta:*

$\lim_{x \to x_0} (-f)(x) = -\lim_{x \to x_0} f(x) = -f(x_0)$

III. *Si f y g son funciones continuas en x_0, entonces $f - g$ es continua en x_0. Resulta:*

$\lim_{x \to x_0} [f + (-g)](x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} [-g(x)] =$

$= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) - g(x_0) = (f - g)(x_0)$

IV. *Si f es una función continua en x_0 y $k \in \mathbf{R}$, entonces kf es continua en x_0. Resulta:*

$\lim_{x \to x_0} (kf)(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = kf(x_0) = (kf)(x_0)$

V. *Si f y g son funciones continuas en x_0, entonces $f \cdot g$ es continua en x_0. Resulta:*

$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) =$

$= (f \cdot g)(x_0)$

VI. *Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en x_0. Resulta:*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)} = \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)$$

VII. *Si f y g son funciones continuas en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0, resulta:*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} =$$

$$= f(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

VIII. *Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces la función compuesta $g \cdot f$ es continua en x_0. Resulta:*

$\lim_{x \to x_0} (g \cdot f)(x) = \lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{f(x) \to f(x_0)} g[f(x)] =$

$= g[f(x_0)] = (g \cdot f)(x_0)$

Continuidad de algunas funciones elementales

I. *Toda función constante es continua en cualquier punto:* $f(x) = k \; \forall x$.

II. *La función identidad es continua en todo punto:* $f(x) = x \; \forall x$.

III. *La función lineal es continua en todo punto:* $f(x) = a x$.

IV. *La función afín es continua en todo punto:* $f(x) = a x + b$.

V. *La función cuadrática es continua en todo punto:* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

VI. *Las funciones $x^2, x^3, ..., x^n$, son continuas en cualquier punto.*

VII. *Todas las funciones polinómicas son continuas en cualquier punto:* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

VIII. *La función potencial es continua, excepto en el origen cuando el exponente sea negativo:* $f(x) = x^m$

IX. *La función exponencial es continua* $(a > 0)$: $f(x) = a^x$

X. *La función logarítmica es continua para todo x positivo:* $f(x) = \log_a x$

XI. *Las funciones racionales son continuas, salvo en los puntos en que se anula el denominador.*

XII. *Las funciones* $f(x) = \text{sen } x$; $f(x) = \cos x$, *son continuas para todo valor de x.*

Continuidad en un intervalo

Una función f se dice que es continua en un intervalo cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

Discontinuidades de una función

Cuando una función deja de cumplir alguna de las condiciones de continuidad en x_0, se dice que es discontinua.

El siguiente esquema nos da una idea de la discontinuidad de una función en $x = x_0$.

f discontinua en $x = x_0 \Leftrightarrow$

I. DISCONTINUIDAD EVITABLE

No existe $f(x_0)$
Existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

II. DISCONTINUIDAD DE PRIMERA ESPECIE

Existe $f(x_0)$
Existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

III. DISCONTINUIDAD DE SEGUNDA ESPECIE

1.er CASO: *Salto finito.*
Existe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Existe $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

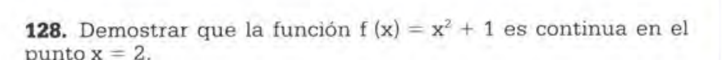
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Salto:
$S = |\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)|$

2.º CASO: *Salto infinito.*
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

$S = |\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)|$



EJERCICIOS PROPUESTOS

128. Demostrar que la función $f(x) = x^2 + 1$ es continua en el punto $x = 2$.

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 2**

129. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$ en el punto $x = 3$.

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 3**

130. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = 2x + 1$ en el punto $x = 3$.

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 3**

131. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en el punto } x = 1.$$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1**

132. Comprobar que la función $f(x)$ es continua en el punto $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1**

133. Estudiar la continuidad de la función f: **R** ⟶ **R** definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$.

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1**

134. Estudiar la continuidad de la función f: **R** ⟶ **R** definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 2**

135. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 2x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

I. Estudiar la continuidad de la función en el punto $x = 1$.
II. Dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 1**

136. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 1**

137. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 11-4x & \text{si } x > 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 2**

138. Sea la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que dicha función sea continua.

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1 cuando k = 1**

139. Comprobar que la función $f(x)$ es continua en el punto $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 0**

140. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

se pide la continuidad de la función en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 0**
La función es continua en x = 1

141. Sea la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ x+k & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que la función sea continua en $x = 3$.

SOLUCIÓN: **La función es continua para k = 3**

142. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 0**

143. Se considera la función f: **R** ⟶ **R** definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ -6+5x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Esta función tiene solamente dos puntos donde es continua, ¿cuáles son esos dos puntos?

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 2 ; x = 3**

144. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 1**

145. Comprobar que la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ presenta en el punto $x = 1$, una discontinuidad evitable.

SOLUCIÓN: **Discontinuidad evitable en x = 1**

146. Comprobar que el punto $x = 2$ la función:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$$

presenta una discontinuidad evitable.

SOLUCIÓN: **Discontinuidad evitable en el punto x = 2**

147. Comprobar que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$, presenta una discontinuidad de primera especie.

SOLUCIÓN: **La función presenta una discontinuidad de primera especie en el punto $x = 1$**

148. Comprobar que la función:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$, presenta una discontinuidad de segunda especie, con salto finito.

SOLUCIÓN: **Discontinuidad de segunda especie en $x = 0$**
Salto finito: $S = 2$

149. Comprobar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en el punto $x = 2$, presenta una discontinuidad de segunda especie, con salto infinito.

SOLUCIÓN: **Función discontinua de segunda especie en $x = 2$. Salto infinito: $S = \infty$**

150. En qué puntos es discontinua la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

SOLUCIÓN: **La función es discontinua en $x = 2$; $x = 3$**

151. ¿En qué intervalo la función $f(x) = \sqrt{-(x+5)(x-3)}$ es continua?

SOLUCIÓN: **La función solamente es continua en el intervalo abierto $]-5, 3[$**

152. Estudiar en qué intervalos la función f(x) es continua.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$$

SOLUCIÓN:

La función es continua en los intervalos: $]-\infty, 2[$ y $[3, +\infty[$

153. ¿Para qué valores de x es continua la función f (x)?

$$f(x) = \frac{x - |x|}{x}$$

SOLUCIÓN: **La función es continua $\forall\, x \neq 0$**

154. En qué puntos es discontinua la función:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

SOLUCIÓN: **La función es discontinua en los puntos: $x = 1$; $x = 2$**

155. Hallar el valor de k para que la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 12x^2 + 11x - k}{3x - 9}$$

tenga en el punto $x = 3$ una discontinuidad evitable.

SOLUCIÓN: **$k = -48$**

156. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^3 + 3x}{\text{sen } x}$$

en el punto $x = 0$, verificándose que $f(0) = 0$.

SOLUCIÓN: **La función es discontinua, con discontinuidad evitable en $x = 0$**

157. Dadas las funciones cuyas gráficas son las figuras I, II y III se pide:

I. Expresión analítica de cada una de dichas funciones.
II. Estudiar la continuidad de dichas funciones.

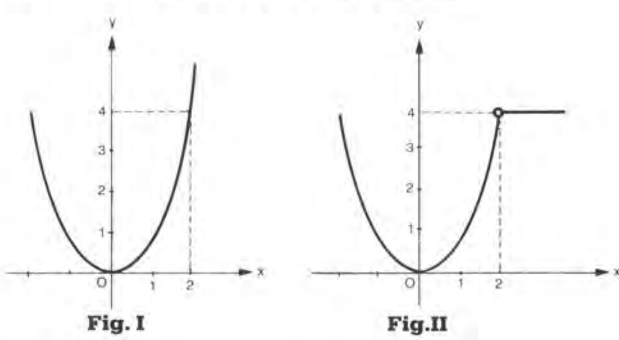


Fig. I **Fig. II**

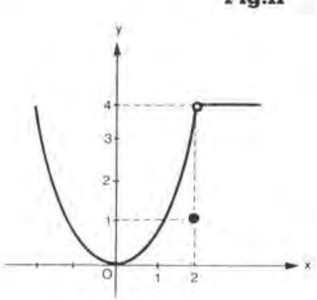


Fig. III

SOLUCIÓN II: **Fig. I: Función continua en $x = 2$**
Fig. II: Función discontinua en $x = 2$
Fig. III: La función no es continua en $x = 2$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

I. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right)$

CÁLCULOS AUXILIARES

El numerador de I *es una* ÷ *cuyo* $a_1 = 1$ *y* $d = 1$*, luego:*

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 1 + (n-1)\cdot 1 = 1 + n - 1 = n$

El denominador de I *es una* ÷ *cuyo* $a_1 = 2$ *y* $d = 1$*, luego:*

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 2 + (n-1)\,1 = 2 + n - 1 = n + 1$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{n}{n+1}}}$

II. $\left(2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \ldots, \frac{3n-1}{n}, \ldots\right)$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 2 + (n-1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 1 + (n-1)\cdot 1 = 1 + n - 1 = n$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{3n-1}{n}}}$

2. RESOLUCIÓN

I. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \ldots\right) =$

$= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}, \frac{4}{3^4}, \frac{5}{3^5}, \ldots, \frac{n}{3^n}, \ldots\right)$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ *siendo* $a_1 = 3$ *y* $r = 3$

$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{n}{3^n}}}$

II. $\left(\frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{9}{6}, \frac{10}{7}, \ldots, \frac{n+5}{n+2}, \ldots\right)$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 6 + (n-1)\cdot 1 = 6 + n - 1 = n + 5$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 3 + (n-1)\cdot 1 = 3 + n - 1 = n + 2$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{n+5}{n+2}}}$

3. RESOLUCIÓN

I. $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \frac{1}{256}, \ldots\right) =$

$= \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^4}, \ldots, \frac{1}{n^n}, \ldots\right)$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{1}{n^n}}}$

II. $\left(4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots,\right) =$

$= \left(\frac{1}{4^{-1}}, \frac{1}{4^0}, \frac{1}{4^1}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots, \frac{1}{4^{n-2}}, \ldots,\right)$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4^{-1} \cdot 4^{n-1} = 4^{-1+n-1} = 4^{n-2}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{a_n = \frac{1}{4^{n-2}}}}$

4. RESOLUCIÓN

I. *para* $n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}$ *para* $n = 3 \Rightarrow \frac{3}{4}$

para $n = 2 \Rightarrow \frac{2}{3}$ *para* $n = 4 \Rightarrow \frac{4}{5}$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)}$

II. *para* $n = 1 \Rightarrow \frac{4}{5}$ *para* $n = 3 \Rightarrow \frac{10}{11}$

para $n = 2 \Rightarrow \frac{7}{8}$ *para* $n = 4 \Rightarrow \frac{13}{14}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{10}{11}, \frac{13}{14}, \ldots\right)}$

III. *para* $n = 1 \Rightarrow \frac{8}{2^0} = \frac{8}{1}$ *para* $n = 3 \Rightarrow \frac{8}{2^2} = \frac{8}{2^2}$

para $n = 2 \Rightarrow \frac{8}{2^1} = \frac{8}{2}$ *para* $n = 4 \Rightarrow \frac{8}{2^3} = \frac{8}{2^3}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\left(\frac{8}{1}, \frac{8}{2}, \frac{8}{2^2}, \frac{8}{2^3}, \ldots\right)}$

IV. *para* $n = 1 \Rightarrow \frac{2+1}{1^2} = \frac{3}{1}$ *para* $n = 3 \Rightarrow \frac{18+1}{3^2} = \frac{19}{9}$

para $n = 2 \Rightarrow \frac{8+1}{2^2} = \frac{9}{4}$ *para* $n = 4 \Rightarrow \frac{32+1}{4^2} = \frac{33}{16}$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\left(\frac{3}{1}, \frac{9}{4}, \frac{19}{9}, \frac{33}{16}, \ldots\right)}$

5. RESOLUCIÓN

$a_1 = (-1)^1\left(\frac{1+2}{1}\right) = (-1)^1 \cdot 3 = (-1)\cdot 3 = -3$

$a_3 = (-1)^3\left(\frac{3+2}{3}\right) = (-1)^3\,\frac{5}{3} = (-1)\cdot\frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$

$a_6 = (-1)^6\left(\frac{6+2}{6}\right) = (-1)^6\,\frac{8}{6} = 1\cdot\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a_1 = -3,\ a_3 = -\frac{5}{3},\ a_6 = \frac{4}{3}}}$

6. RESOLUCIÓN

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$*; siendo:* $n = 16$*;* $a_1 = 1$*;* $d = 2$

luego: $a_{16} = 1 + (16-1)\,2 = 1 + 15\cdot 2 = 1 + 30 = 31$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a_{16} = 31}}$

7. RESOLUCIÓN

$a_k = \frac{36}{26} = \frac{18}{13} = 1 + \frac{2k}{k^2+1} = \frac{k^2+1+2k}{k^2+1}$

$18k^2 + 18 = 13k^2 + 13 + 26k$

$5x^2 - 26k + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 5 \\ \cancel{k_2 = \frac{1}{5}} \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{k_1 = 5}}$

8. RESOLUCIÓN

I. $(a_n) = \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \ldots, \frac{1+n}{1+n^2}, \ldots\right)$

$(b_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right.$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\begin{array}{l}(\mathbf{a_n}) = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \ldots\right) \\ (\mathbf{b_n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right)\end{array}}$

II. $(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}, \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{4}, \ldots\right.$

$\left.\ldots, \frac{1+n}{1+n^2}\cdot\frac{n}{n+1}, \ldots\right)$

$$(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{1+n}{1+n^2} \cdot \frac{n}{n+1}, \ldots\right)$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \ldots\right)}}$

III. $a_n \cdot b_n = \dfrac{1+n}{1+n^2} \cdot \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{1+n^2}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{a_n \cdot b_n = \frac{n}{1+n^2}}}$

9. RESOLUCIÓN

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n} + \dfrac{2n-3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} + \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{1} = 1 + 2 = 3$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{2n-3}{n}\right) = 3}}$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{n^2} + \dfrac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{1} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 3 + 1 = 4$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{n^2} + \frac{n}{n+1}\right) = 3 + 1 = 4}}$

10. RESOLUCIÓN

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n^2}{2n^2+1} - \dfrac{1-3n^2}{n^2}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2}{2n^2+1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1-3n^2}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{2+\frac{1}{n^2}} - \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-3}{1} = \frac{8}{2} - \frac{-3}{1} = 4 + 3 = 7$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2}{2n^2+1} - \frac{1-3n^2}{n^2}\right) = 7}}$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n}{n^2-1} - \dfrac{n+2}{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n^2-1} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n-1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} - \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} - \frac{1}{1} = -1$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2-1} - \frac{n+2}{n-1}\right) = -1}}$

11. RESOLUCIÓN

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n} \cdot \dfrac{5n^2+5}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+5}{n^2+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n} \cdot \frac{5n^2+5}{n^2+1}\right) = \frac{10}{3}}}$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{n+1} \cdot \dfrac{(5n+3)}{n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n+3)}{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1} = \frac{0}{1} \cdot 5 = 0$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+1} \cdot \frac{5n+3}{n}\right) = 0}}$

12. RESOLUCIÓN

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1} : \dfrac{n+1}{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n-1} : \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n-1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} : \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1 : 1 = 1$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1} : \frac{n+1}{n-1}\right) = 1}}$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{n+3} : \dfrac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+2}{n+3} : \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 5 : 1 = 5$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{n+3} : \frac{n}{n+1}\right) = 5}}$

13. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{6n+1}{3n}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{6n+1}{3n}} = 4}}$

14. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n+8}{1+n^2}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+8}{1+n^2}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n+8/n^2}{1/n^2+1}} = 3^{0/1} = 3^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{n+8}{1+n^2}} = 1}}$

15. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{\frac{4n+5}{n-3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+1/n}{3+2/n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+5/n}{1-3/n}} = 1^4 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{\frac{4n+5}{n-3}} = 1}}$

16. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3}{n-1}} = \sqrt{2}}}$

17. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+5}{5n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+5}{5n^2+1} = \frac{3}{5}}}$

18. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 10n + 4}{6n^2 + 8n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 - \frac{10}{n} + \frac{4}{n^2}}{6 + \frac{8}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 10n + 4}{6n^2 + 8n - 2} = \frac{4}{3}}$

19. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 2n - 3}{5n^2 + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{5 + \frac{6}{n^2}} = \frac{4}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 2n - 3}{5n^2 + 6} = \frac{4}{5}}$

20. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+n)\,n}{2}}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 + 2 + 3 + \ldots + n$ es una $\div$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{(1+n)\,n}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}}$

21. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdot 2^{1/8}\ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots} = \lim_{n\to\infty} 2^1 = 2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdots$ es la suma de una progresión geométrica de infinitos términos.

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}} = 2}$

22. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\cdots}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/3}\cdot 2^{1/9}\cdot 2^{1/27}\ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{1/3 + 1/9 + 1/27 + \ldots} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\cdots}}} = \sqrt{2}}$

23. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty}$

24. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} (1+n)\,n^{-1/2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^{1/2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = 0 + \frac{1}{0} = +\infty$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} (1+n)\,n^{-1/2} = +\infty}$

25. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,[3 + 6 + 9 + \ldots + 3n] = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 6 + 9 + \ldots + 3n}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(3+3n)\,n}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 3/n}{2} = \frac{3}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$3 + 6 + 9 + \ldots + 3n = \frac{(3+3n)\,n}{2}$$

por ser la suma de los términos de una $\div$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,[3 + 6 + 9 + \cdots + 3n] = \frac{3}{2}}$

26. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n + \sqrt{9n^2 - 2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 + \sqrt{9 - \frac{2}{n^2}}} =$$

$$= \frac{3}{4 + \sqrt{9}} = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Dividimos numerador y denominador por la potencia de n de mayor exponente que no esté bajo el signo radical.

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n + \sqrt{9n^2 - 2}} = \frac{3}{7}}$

27. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 + 1 + \frac{n^2 - n}{2n^2}\right] = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\binom{n}{0} = 1;\quad \binom{n}{1} = n;\quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2}\right] = \frac{5}{2}}$

28. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 - 8n^3 + 12n^2 - 6n + 1}{3n^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{24n^2 + 2}{3n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{24 + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{24}{3} = 8$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2 + 1} = 8}$

29. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+n-1}+3}{n^2+n+2}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{\sqrt{4}}{1}=\frac{2}{1}=2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^4+n-1}+3}{n^2+n+2}=2}$

30. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n}+1}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=1-0=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}}=1}$

31. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^4+2n-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{n^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}-\dfrac{1}{n^6}}}=$$

$$=\frac{1}{0}=+\infty$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^4+2n-1}}=+\infty}$

32. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2-3n}{1-n}}\right)^{\frac{n-1}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-3n}{1-n}\right)^{\frac{n-1}{3n+9}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{2}{n}-3}{\dfrac{1}{n}-1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-1/n}{3+9/n}}=\left(\frac{-3}{-1}\right)^{1/3}=3^{1/3}=\sqrt[3]{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{2-3n}{1-n}}\right)^{\frac{n-1}{n+3}}=\sqrt[3]{3}}$

33. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0}$

34. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\infty}=0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0}$

35. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}[\sqrt{4n^2-1}-(2n-1)]=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{4n^2-1}-(2n-1)][\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)]}{\sqrt{4n^2-1}+(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2-1})^2-(2n-1)^2}{\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1-4n^2+4n-1}{\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{4}{\sqrt{4}+2}=\frac{4}{2+2}=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{4n^2+1}-(2n-1)]=1}$

36. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1})=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1})(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-2n-1})}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-n^2+2n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1})=\dfrac{3}{2}}$

37. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}})^2-(\sqrt{n-\sqrt{n}})^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n+\sqrt{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{\dfrac{n-\sqrt{n}}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=1}$

38. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3-2n}-\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{n}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^2}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt[3]{1}-\sqrt{1}}=\frac{5}{0}=+\infty$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3-2n}-\sqrt{n^2+1}} = +\infty}$

39. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{8n^2-1}}{\sqrt{n^2+2n-1}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{8-\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{1}} = 2\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{8n^2-1}}{\sqrt{n^2+2n-1}} = 2\sqrt{2}}$

40. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)\sqrt{16n^2-1}}{4n^3-6n^2+2} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n^2-1)\sqrt{16n^2-1}}{n^3}}{\dfrac{4n^3-6n^2+2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n^2-1)}{n^2}\cdot\dfrac{\sqrt{16n^2-1}}{n}}{4-\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\sqrt{16-\dfrac{1}{n^2}}}{4-\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^3}} = \frac{1\cdot\sqrt{16}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-1)\sqrt{16n^2-1}}{4n^3-6n^2+2} = 1}$

41. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{2n+1}{n}\right] = \log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}\right] =$$

$$= \log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{1}\right] = \log 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\log\dfrac{2n+1}{n}\right] = \log 2}$

42. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{1+n^2}{2+n^2}\right] = \log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{2+n^2}\right] =$$

$$= \log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}+1}{\dfrac{2}{n^2}+1}\right] = \log 1 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\log\dfrac{1+n^2}{2+n^2}\right] = 0}$

43. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{4n+5}{n^2+5}\right] = \log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{n^2+5}\right] =$$

$$= \log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{5}{n^2}}\right] = \log 0 = -\infty$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\log\dfrac{4n+5}{n^2+5}\right] = -\infty}$

44. RESOLUCIÓN

1.er MÉTODO:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-1/\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$-\frac{1}{n} = \alpha \Rightarrow n = -\frac{1}{\alpha}$$

$$Si\ n \longrightarrow \infty\ ;\ \alpha \longrightarrow 0$$

2.° MÉTODO:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{n}{-1}}\right)^{n/-1}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

3.er MÉTODO:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Teniendo en cuenta el apartado II de las aplicaciones del número e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

En este caso: $x = -1$

4.° MÉTODO:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n-1}{n}-1\right)} =$$

$$e^{\lim_{n\to\infty} n\,\frac{n-1-n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} -n/n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Aplicación del apartado IV.

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}}$

45. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 = e^2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = e^2}$

46. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Apartado II *de las aplicaciones del número* e.

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n = e^3}$

47. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{n}{4}}\right)^{n/4}\right]^{3\cdot 4} = e^{12}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{3n} = e^{12}}$

48. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-1}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1-n+1}{n-1}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{2}{n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}}=e^{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}=e^{2}}$

49. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n}\right)^{n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{3n}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{3n/4}\right]^{4/3}=e^{4/3}=\sqrt[3]{e^{4}}=e\sqrt[3]{e}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n}\right)^{n}=e\sqrt[3]{e}}$

50. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{5}=(e^{2})^{5}=e^{10}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n}=e^{10}}$

51. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)^{n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)^{n^{2}}\right]^{1/n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}1/n}=e^{0}=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)^{n}=1}$

52. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n-3}{n+3}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n-3-n-3}{n+3}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n}{n+3}}=e^{-6}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n}=e^{-6}}$

53. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{2n}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\frac{3n+1}{3n+4}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\frac{3n+1-3n-4}{3n+4}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n}{3n+4}}=e^{-6/3}=e^{-2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{2n}=e^{-2}}$

54. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{5}=e^{5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5x=\frac{1}{n}$; $x=\frac{1}{5n}$; cuando $x\to 0$; $n\to\infty$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}=e^{5}}$

55. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/x^{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{9n^{2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{9n}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}9n}=e^{\infty}=\infty$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x=\frac{1}{n}\Rightarrow n=\frac{1}{3x}$. Cuando $x\to 0$; $n\to\infty$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x^{2}}=\infty}$

56. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}+1}{n^{2}-1}\right)^{n^{2}+2}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2}+2)\left(\frac{n^{2}+1}{n^{2}-1}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2}+2)\left(\frac{n^{2}+1-n^{2}+1}{n^{2}-1}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{2}+4}{n^{2}-1}}=e^{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}+1}{n^{2}-1}\right)^{n^{2}+2}=e^{2}}$

57. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{1-n}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)\left(\frac{n+3}{n-2}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)\left(\frac{n+3-n+2}{n-2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-5n}{n-2}}=e^{-5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{1-n}=e^{-5}}$

58. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}=e}$

59. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+6}{4n}\right)^{n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{4n}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n}{6}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{2n/3}\right]^{3/2}=e^{3/2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+6}{4n}\right)^{n}=e^{3/2}}$

60. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{2n+7}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{7}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{2n}\cdot 1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{3n+1}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{4}}\right)^{\frac{3n+1}{4}}\right]^{\frac{4}{3n+1}\cdot 2n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{3n+1}}=e^{8/3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{2n+7}=e^{8/3}}$

61. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}+4}{n^{2}}\right)^{4n^{2}}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^{2}}\right)^{4n^{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^{2}}{4}}\right)^{n^{2}/4}\right]^{16}=e^{16}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}+4}{n^{2}}\right)^{4n^{2}}=e^{16}}$

62. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}-5n+7}{n^{2}-5n}\right)^{n}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^{2}-5n+7}{n^{2}-5n}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^{2}-5n+7-n^{2}+5n}{n^{2}-5n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n}{n^{2}-5n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7/n}{1-5/n}}=e^{0/1}=$$

$$=e^{0}=1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}-5n+7}{n^{2}-5n}\right)^{n}=1}$

63. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n+2}\left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n+2}\left(\frac{n^2+3n-5-n^2+4n-2}{n^2-4n+2}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n+2}\left(\frac{7n-7}{n^2-4n+2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3-7n^2+35n-35}{n^3-2n^2-6n+4}} = e^7$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} = e^7}$

64. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$1-x = \frac{1}{n}\ ;\ x = 1-\frac{1}{n}\ ;\ si\ x\longrightarrow 1 \Rightarrow n\longrightarrow\infty$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}}$

65. RESOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2-2}\right)^{\frac{2n^2}{3-3n}} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3-3n}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2-2}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3-3n}\left(\frac{3n^2-1-3n^2+2}{3n^2-2}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3-3n}\left(\frac{1}{3n^2-2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{-9n^3+9n^2+6n-6}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2/n}{-9+9/n+6/n^2-6/n^3}} = e^{0/-9} = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2-2}\right)^{\frac{2n^2}{3-3n}} = 1}$

66. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 / 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$

Hay que establecer una conexión entre $|f(x)-3|$ *y* $|x-2|$*, para determinar el valor de* δ.

Luego:

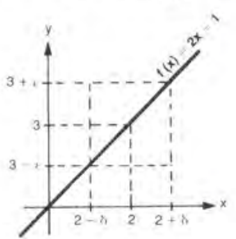
$|f(x)-3| = |(2x-1)-3| = |2x-4| = 2|x-2|$ (1)

para que (1) sea menor que ε*, necesitamos tomar* $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$,

resulta $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ *y por tanto:*

$|f(x)-3| = 2|x-2| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Si $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x-2| < \varepsilon$



SOLUCIÓN: $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2}}$

67. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 / 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$

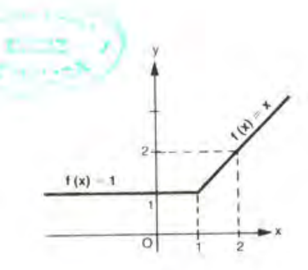
Luego:

$|f(x)-6| = |3x-6| = 3|x-2| < \varepsilon$, *para que esto sea cierto basta tomar:* $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ *luego si* $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ *y* $|x-2| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |3x-6| = 3|x-2| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

SOLUCIÓN: $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{3}}$

68. RESOLUCIÓN



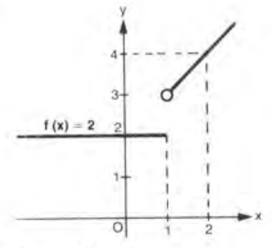
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$

como: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow$ *Existe* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1}$

69. RESOLUCIÓN



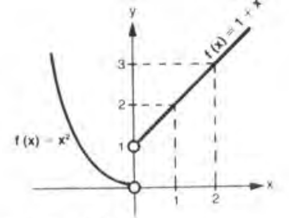
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2 = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+2) = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow$ *No existe* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2;\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3;\ \text{No existe} \lim\limits_{x\to 1} f(x)}$

70. RESOLUCIÓN



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$ *No Existe* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\text{No existe} \lim\limits_{x\to 0} f(x)}$

71. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, *si* $\forall A > 0\ \exists\delta > 0 / 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow f(x) > A$

Como $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} > A \Rightarrow \frac{1}{A} > (x-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{1}{\sqrt{A}}$, *tomando* $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$, *resulta:*

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}}$

72. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{3x-9} = +\infty$, *si* $\forall A > 0\ \exists\ \delta > 0 / 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > A$

Como $f(x) = \frac{1}{3x-9} > A \Rightarrow \frac{1}{A} > 3x-9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{A} > 3|x-3| \Rightarrow |x-3| < \frac{1}{3A}$, *tomando* $\delta = \frac{1}{3A}$,

resulta:

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\delta = \frac{1}{3A}}$

73. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ *si* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ A / x > A \Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$

$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{x}{3x+2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x-3x-2}{3(3x+2)}\right| =$

$= \left| \dfrac{-2}{3\,(3x+2)} \right| = \dfrac{2}{3\,|3x+2|} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{2}{3\varepsilon} < 3x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3\varepsilon} - 2 < 3x \Rightarrow \dfrac{2-6\varepsilon}{3\varepsilon} < 3x \Rightarrow \dfrac{2-6\varepsilon}{9\varepsilon} < x$

Tomando $A = \dfrac{2-6\varepsilon}{9\varepsilon}$, *entonces si* $x > A \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{1}{3} \right| < \varepsilon$

Si $\varepsilon = 0{,}1$; *resulta* $A = \dfrac{2 - 6 \cdot 0{,}1}{9 \cdot 0{,}1} = \dfrac{2-0{,}6}{0{,}9} = \dfrac{1{,}4}{0{,}9} = 1{,}5$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{A = 1{,}5}}$

74. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{4x-1} = \dfrac{1}{2}$, si $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A / x > A \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$

$\left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| = \left| \dfrac{2x}{4x-1} - \dfrac{1}{2} \right| = \left| \dfrac{4x - 4x + 1}{2\,(4x-1)} \right| =$

$= \dfrac{1}{2\,(4x-1)} < 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{0{,}2} < 4x - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{0{,}2} + 1 < 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1 + 0{,}2}{0{,}8} < x \Rightarrow \dfrac{1{,}2}{0{,}8} < x \Rightarrow 1{,}5 < x$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{A = 1{,}5}}$

75. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{5x+1} = \dfrac{2^2 - 7 \cdot 2 + 10}{5 \cdot 2 + 1} = \dfrac{4 - 14 + 10}{10 + 1} =$

$= \dfrac{0}{11} = 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\mathbf{x^2 - 7x + 10}}{\mathbf{5x + 1}} = \mathbf{0}}$

76. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+5}{3-x} \right)^x = \left(\dfrac{0+5}{3-0} \right)^0 = \left(\dfrac{5}{3} \right)^0 = 1$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\mathbf{x+5}}{\mathbf{3-x}} \right)^{\mathbf{x}} = \mathbf{1}}$

77. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 + 5x - 6) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 6 = 3 + 5 - 6 = 8 - 6 = 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \mathbf{(3x^2 + 5x - 6) = 2}}$

78. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 2} (1 + x^3)^{\frac{1}{1+x^3}} = (1+1)^{\frac{1}{1+1}} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \mathbf{(1 + x^3)^{\frac{1}{1+x^3}} = \sqrt{2}}}$

79. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{(x-2)\,(x+2)}}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} =$

$\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{\mathbf{(x-2)\,(x+2)}}}{\sqrt{\mathbf{x-2}}} = \mathbf{2}}$

80. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2}}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2 - x - 2}{2x + 4}}{x} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x\,(2x+4)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{2x+4} = -\dfrac{1}{4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+2}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{x}} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}$

81. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\,(x+1)}{(x-1)\,(x^2 + x + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1+1}{1+1+1} = \dfrac{2}{3}$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	−1
1		1	1
	1	1	0
−1		−1	
	1	0	

$x^2 - 1 = (x-1)\,(x+1)$

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^3 - 1 = (x-1)\,(x^2 + x + 1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathbf{x^2 - 1}}{\mathbf{x^3 - 1}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$

82. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)\,(x+3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{4+3} = \dfrac{1}{7}$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	−1	−12
4		4	12
	1	3	0
−3		−3	
	1	0	

$x^2 - x - 12 = (x-4)\,(x+3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{x^2 - x - 12}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}}$

83. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\,(x-1)}{2\,(x-1)\,(x + 3/2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{1}{2+3} = \dfrac{1}{5}$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	−1	0
1		1	0
	1	0	0

$x^2 - x = x\,(x-1)$

	2	1	−3
1		2	3
	2	3	0
−3/2		−3	
	2	0	

$2x^2 + x - 3 = 2\,(x-1)\,(x + 3/2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathbf{x^2 - x}}{\mathbf{2x^2 + x - 3}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}}$

84. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)\,(x+2)}{x-3} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} (x+2) = 5$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	−1	−6
3		3	6
	1	2	0
−2		−2	
	1	0	

$x^2 - x - 6 = (x-3)\,(x+2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\mathbf{x^2 - x - 6}}{\mathbf{x - 3}} = \mathbf{5}}$

85. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)(x + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	0	−27
3		3	9	27
	1	3	9	0

$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

	1	0	−9
3		3	9
	1	3	0
−3		−3	
	1	0	

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{9}{2}}$

86. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{1 - 2}{1 - 3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	−3	2
1		1	−2
	1	−2	0
2		2	
	1	0	

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

	1	−4	3
1		1	−3
	1	−3	0
3		3	
	1	0	

$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{2}}$

87. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)^2 (x + 4)}{(x - 2)^2 (x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x + 4}{x + 1} = \frac{2 + 4}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	−12	16
2		2	4	−16
	1	2	−8	0
2		2	8	
	1	4	0	
−4		−4		
	1	0		

$x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2 (x + 4)$

	1	−3	0	4
2		2	−2	−4
	1	−1	−2	0
2		2	2	
	1	1	0	
−1		−1		
	1	0		

$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2 (x + 1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 3x^2 + 4} = 2}$

88. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2}$

89. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 1/3} \frac{3x^3 - 16x^2 + 5x}{3x^3 - 4x^2 + 4x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1/3} \frac{x(3x^2 - 16x + 5)}{3x^3 - 4x^2 + 4x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1/3} \frac{3x(x - 1/3)(x - 5)}{3(x - 1/3)(3x^2 - 3x + 3)} = \lim_{x \to 1/3} \frac{x(x - 5)}{3x^2 - 3x + 3} =$$

$$= \frac{1/3\,(1/3 - 5)}{3 \cdot 1/9 - 3 \cdot 1/3 + 3} = \frac{-14/9}{7/3} = -\frac{14 \cdot 3}{7 \cdot 9} = -\frac{2}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	3	−16	5
1/3		1	−5
	3	−15	0
5		15	
	3	0	

$3x^2 - 16x + 5 = 3(x - 1/3)(x - 5)$

	3	−4	4	−1
1/3		1	−1	1
	3	−3	3	0

$3x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 3(x - 1/3)(3x^2 - 3x + 3)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 1/3} \frac{3x^3 - 16x^2 + 5x}{3x^3 - 4x^2 + 4x - 1} = -\frac{2}{3}}$

90. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{2x^2 + x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2 - 1)}{2x^2 + x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)(x + 1)}{2(x - 1)(x + 3/2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x + 1)}{2(x + 3/2)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{2(1 + 3/2)} = \frac{2}{5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	2	1	−3
1		2	3
	2	3	0
−3/2		−3	
	2	0	

$2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)(x + 3/2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{2x^2 + x - 3} = \frac{2}{5}}$

91. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 4)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x - 4} = \frac{0}{3 - 4} = \frac{0}{-1} = 0$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	−6	9
3		3	−9
	1	−3	0
3		3	
	1	0	

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

	1	−7	12
3		3	−12
	1	−4	0
4		4	
	1	0	

$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} = 0}$

92. RESOLUCIÓN

Se multiplica el numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador que es: $1 + \sqrt{1 - x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{(1 - \sqrt{1 - x})(1 + \sqrt{1 - x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{1 - (\sqrt{1 - x})^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{\not{1} - \not{1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} (1 + \sqrt{1 - x}) = 1 + 1 = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = 2}$

93. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{x + 1})(1 + \sqrt{x + 1})}{x(1 + \sqrt{x + 1})} =$$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1-(\sqrt{x+1})^2}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-x-1}{x(1+\sqrt{x+1})} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} = -\dfrac{1}{2}}$

94. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} =$

$= \lim_{x\to 3} (\sqrt{x}+\sqrt{3}) = \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}}$

95. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x^3-27)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} =$

$= \lim_{x\to 3} (x^2+3x+9)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = (9+9+9)(\sqrt{3}+\sqrt{3}) =$

$= 27\cdot 2\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	0	−27
3		3	9	27
	1	3	9	0

$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = 54\sqrt{3}}$

96. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} =$

$= \lim_{x\to 2} (\sqrt{x+2}+2) = 4$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = 4}$

97. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{\sqrt{x-2}} =$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-2})}{x-2} =$

$= \lim_{x\to 2} (x-1)\sqrt{x-2} = 1\cdot 0 = 0$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	−3	2
2		2	−2
	1	−1	0
1		1	
	1	0	

$x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}} = 0}$

98. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{4}}$

99. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}}$

100. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$

$= \lim_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{x-a} = \lim_{x\to a} (x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a}) =$

$= 2a\cdot 2\sqrt{a} = 4a\sqrt{a}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 4a\sqrt{a}}$

101. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to a} \dfrac{(x^3-a^3)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$

$= \lim_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x^2+ax+a^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{x-a} =$

$= \lim_{x\to a} (x^2+ax+a^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = 3a^2\cdot 2\sqrt{a} = 6a^2\sqrt{a}$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	0

$x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 6a^2\sqrt{a}}$

102. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = 0}$

103. RESOLUCIÓN

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-x)-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = \dfrac{-2}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = -1}$

104. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1-x)(1+x)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{1+x}}=\sqrt{\frac{1+1+1}{1+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}}$

105. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=\frac{0}{2}=0$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=0}$

106. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3-8}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2+2x+4}}=\sqrt{\frac{4}{12}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$x^3+8=(x-2)(x^2+2x+4)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3-8}}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

107. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^3-8}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)}=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^2+2y+4}=$$

$$=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$y^3-8=(y-2)(y^2+2y+4)$

$\sqrt[3]{x+8}=y$: Si $x\longrightarrow 0 \Rightarrow y\longrightarrow 2$

$x+8=y^3$

$x=y^3-8$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\frac{1}{12}}$

108. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=$$

$$=3^2+3\cdot 3+9=27$$

CÁLCULOS AUXILIARES

	1	0	0	−27
3		3	9	27
	1	3	9	0

$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=27}$

109. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x^2-11x+30}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x^2-11x+30}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x-6)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+2}{x-6}=\frac{5+2}{5-6}=\frac{7}{-1}=-7$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(5)=5^2-15=10$

	1	−3	−10
5		5	10
	1	2	0
−2		−2	
	1	0	

	1	−11	30
5		5	−30
	1	−6	0
6		6	
	1	0	

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$ $x^2-11x+30=(x-5)(x-6)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x^2-11x+30}=-7}$

110. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x=\lim_{x\to 0}x$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1}$

111. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 6x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{2}=3$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} 6x=\lim_{x\to 0}6x$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 6x}{2x}=3}$

112. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} 2x=\lim_{x\to 0}2x$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x\cos x}=2}$

113. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^3-4x^2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^3-4x^2}{\frac{x^2}{2}}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{16x^3-8x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2(2x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}8(2x-1)=-8$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{8x^3-4x^2}{1-\cos x}=-8}$

114. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{10x^3 \text{ sen } x}{tg^4 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{10x^3 \cdot x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{10x^4}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 10 = 10$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\lim_{x \to 0} \text{sen } x = \lim_{x \to 0} x$$

$$\lim_{x \to 0} tg\ x = \lim_{x \to 0} x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{10x^3 \cdot \text{sen } x}{tg^4 x} = 10}$

115. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{8\ tg\ 2x}{(1+x)^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{8 \cdot 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{16}{2} = 8$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\lim_{x \to 0} tg\ 2x = \lim_{x \to 0} 2x$$

$$\lim_{x \to 0} [(1+x)^2 - 1] = \lim_{x \to 0} 2x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{8\ tg\ 2x}{(1+x)^2 - 1} = 8}$

116. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\ L\ a}{x} = L\ a$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\lim_{x \to 0} (a^x - 1) = \lim_{x \to 0} x\ L\ a$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = L\ a}$

117. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0^0} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1}$

118. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \left(5 \cdot \frac{\text{sen } 5x}{5x}\right) = 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} =$$

$$= 5 \cdot \lim_{z \to 0} \frac{\text{sen } z}{z} = 5 \cdot 1 = 5$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5x = z$; cuando $x \longrightarrow 0 \Rightarrow z \longrightarrow 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = 5}$

119. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } 5x}{x}}{\frac{\text{sen } 3x}{x}} = \frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 3x} = \frac{5}{3}}$

120. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } mx}{\text{sen } nx} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } mx}{x}}{\frac{\text{sen } nx}{x}} = \frac{m}{n}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } mx}{\text{sen } nx} = \frac{m}{n}}$

121. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$

122. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ 2x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{z \to 0} \frac{tg\ z}{\frac{z}{2}} = 2 \lim_{z \to 0} \frac{tg\ z}{z} = 2 \cdot 1 = 2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$2x = z$$

$$x = \frac{z}{2}$$

$$x \longrightarrow 0 \Rightarrow z \longrightarrow 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{tg\ 2x}{x} = 2}$

123. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{tg\ 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } 3x}{x}}{\frac{tg\ 2x}{x}} = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{tg\ 2x} = \frac{3}{2}}$

124. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ 3x}{tg\ 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg\ 3x}{x}}{\frac{tg\ 2x}{x}} = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{tg\ 3x}{tg\ 2x} = \frac{3}{2}}$

125. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{5\ \text{sen } 3x}{x \cos 2x} = \frac{0}{0} = 5 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } 3x}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos 2x} =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cos 0^0} = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{5\ \text{sen } 3x}{x \cos 2x} = 15}$

126. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x - \text{sen } x}{x}}{\frac{x + \text{sen } x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{\text{sen } x}{x}}{1 + \frac{\text{sen } x}{x}} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} = 0}$

127. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} - \text{sen } x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x - \text{sen } x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x\,(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x\,(1 - \cos x)\,(1 + \cos x)}{x^3 \cos x\,(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x\,(1 - \cos^2 x)}{x^3 \cos x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x \cdot \text{sen}^2 x}{x^3 \cos x\,(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^3 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x\,(1 + \cos x)} = 1 \cdot \frac{1}{1\,(1 + 1)} = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3} = \dfrac{1}{2}}$

128. RESOLUCIÓN

1.° $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

2.° $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$

3.° $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5 = f(2)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 2**

129. RESOLUCIÓN

1.° $f(3) = \dfrac{3 \cdot 3 + 1}{3 - 1} = \dfrac{9 + 1}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

2.° $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{3x + 1}{x - 1} = \dfrac{10}{2} = 5$

3.° $\lim_{x \to 3} \dfrac{3x + 1}{x - 1} = 5 = f(3)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 3**

130. RESOLUCIÓN

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [f(3 + \Delta x) - f(3)] = \lim_{\Delta x \to 0} (7 + 2\Delta x - 7) = \lim_{\Delta x \to 0} 2\,\Delta x = 0$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\Delta x = x - x_0$

$x = x_0 + \Delta x$

$f(3 + \Delta x) = 2\,(3 + \Delta x) + 1 = 7 + 2\,\Delta x$

$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 3**

131. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = 2$

2.° $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} =$

$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$

3.° $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = f(1)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1**

132. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = 2$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

3.° $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1**

133. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 3$

3.° $\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1**

134. RESOLUCIÓN

1.° $f(2) = 0$

2.° $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$

3.° $\lim_{x \to 2} x^2 \neq f(2)$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 2**

135. RESOLUCIÓN

I.

1.° $f(1) = 2$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$

II.

Cuando $x < 1$:

para $x = 0 \Rightarrow f(x) = x = 0$

para $x = -1 \Rightarrow f(x) = x = -1$

Cuando $x = 1$:

$f(x) = 2$

Cuando $x > 1$:

para $x = 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 2 = 2$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 1**

136. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = 3$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3 = 3 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x + 3) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 1**

137. RESOLUCIÓN

1.° $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (11 - 4x) = 11 - 8 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 1) = 4 - 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 3$

3.° $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 2**

138. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = 1^2 = 1$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} kx = k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Para que exista:* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = k = 1$

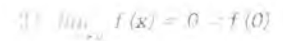
3.° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = k = 1 = f(1)$

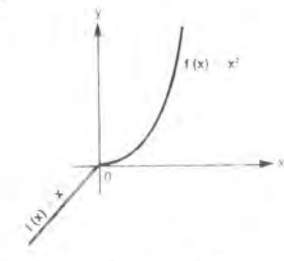
SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 1 cuando k = 1**

139. RESOLUCIÓN

1.° $f(0) = 0$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Existe:* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$


3.° $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$



SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 0**

140. RESOLUCIÓN

Para x = 0

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *No existe:* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Para x = 1

1.° $f(1) = x + 1 = 1 + 1 = 2$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Existe:* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

3.° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 0**
La función es continua en x = 1

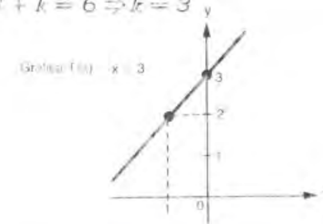
141. RESOLUCIÓN

1.° $f(3) = 3 + k$

2.° $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$

Para que sea continua, se tiene que verificar:

3.° $f(3) = 3 + k = 6 \Rightarrow k = 3$



SOLUCIÓN: **La función es continua para k = 3**

142. RESOLUCIÓN

1.° $f(0) = 1$

2.° $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Existe:* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3.° $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 0**

143. RESOLUCIÓN

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Q}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \notin Q}} f(x)$

luego:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Q}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Q}} x^2 = x_0^2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \notin Q}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \notin Q}} (-6 + 5x) = 6 + 5x_0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x_0^2 = -6 + 5x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_0 = 2 \ ; \ x_0 = 3 \end{array}$

SOLUCIÓN: **La función es continua en x = 2 ; x = 3**

144. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = 0$

2.° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$

3.° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

SOLUCIÓN: **La función no es continua en x = 1**

145. RESOLUCIÓN

1.° $f(1) = \dfrac{1^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$

2.° $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

Existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Se dice que en x = 1 es un punto de discontinuidad evitable, ya que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$*, se reduce a* $f(x) = x + 1$ *que es continua* $x = 1$.

SOLUCIÓN: **Discontinuidad evitable en x = 1**

146. RESOLUCIÓN

1.° $f(2) = \dfrac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{x - 2} = \dfrac{10 - 10}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$

2.° $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x - 3) = 2 - 3 = 1$

SOLUCIÓN: **Discontinuidad evitable en el punto x = 2**

147. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

SOLUCIÓN: **La función presenta una discontinuidad de primera especie en el punto x = 1**

148. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{|x|} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{|x|} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$$

$$S = \left|\lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to 1^-} f(x)\right| =$$

$$= |1 - (-1)| = 2$$

SOLUCIÓN: **Discontinuidad de segunda especie en x = 0 Salto finito: S = 2**

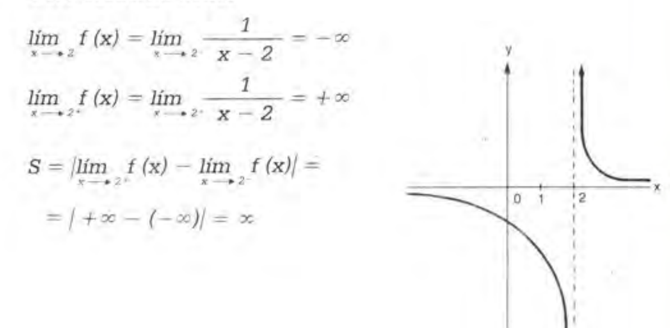
149. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$S = \left|\lim_{x \to 2^+} f(x) - \lim_{x \to 2^-} f(x)\right| =$$

$$= |+\infty - (-\infty)| = \infty$$



SOLUCIÓN: **Función discontinua de segunda especie en x = 2. Salto infinito: S = ∞**

150. RESOLUCIÓN

Hacemos: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN: **La función es discontinua en x = 2 ; x = 3**

151. RESOLUCIÓN

$$(x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \\ \text{ó} \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **La función solamente es continua en el intervalo abierto]−5, 3[**

152. RESOLUCIÓN

$$\text{Para que } \frac{x-3}{x-2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \text{ Signo } + \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ Signo } + \end{cases} S_1 = [3, +\infty[\\ \text{ó} \\ \begin{cases} x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3 \text{ Signo } - \\ x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \text{ Signo } - \end{cases} S_2 =]-\infty, 2[$$

SOLUCIÓN: **La función es continua en los intervalos]−∞, 2[y [3, +∞[**

153. RESOLUCIÓN

Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x - x}{x} = 0$

Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x - x}{-x} = 2$

Si $x = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{0}{0}$ no está definida

SOLUCIÓN: **La función es continua ∀ x ≠ 0**

154. RESOLUCIÓN

Hacemos: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN: **La función es discontinua en los puntos: x = 1 ; x = 2**

155. RESOLUCIÓN

Será aquel valor que haga que el numerador se anule para x = 3.

	1	−12	11	−k
3		3	−27	−48
	1	−9	−16	−k − 48 = 0 ⇒ k = −48

SOLUCIÓN: **k = −48**

156. RESOLUCIÓN

1.° $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 + 2x^3 + 3x}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 + 2x^3 + 3x}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} (x^4 + 2x^2 + 3) = 3$

2.° $f(0) = 0$

3.° $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

SOLUCIÓN: **La función es discontinua, con discontinuidad evitable en x = 0**

157. RESOLUCIÓN

I. *La expresión analítica de la* Fig. I, *es una parábola de ecuación:* $f(x) = x^2$

La de la Fig. II *es una parábola* $f(x) = x^2$ *y una recta de ecuación* $f(x) = 4$; *luego:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

La de la Fig. III, *es una parábola* $f(x) = x^2$, *un punto (2, 1) y una recta* $f(x) = 4$, *luego:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

II.

Fig. I

1.° $f(2) = x^2 = 2^2 = 4$

2.° $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

3.° $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4 = f(2)$

SOLUCIÓN I: **Función continua en x = 2**

Fig. II

1.° f (2) = No existe

2.° $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

SOLUCIÓN II: **Función discontinua en x = 2**

Fig. III

1.° $f(2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 2.° \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} 4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Existe } \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

3.° $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

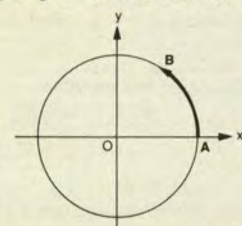
SOLUCIÓN III: **La función no es continua en x = 2**

Bloque 7

- ✔ Trigonometría
- ✔ Ecuaciones trigonométricas
- ✔ Resolución de triángulos
- ✔ Los números complejos

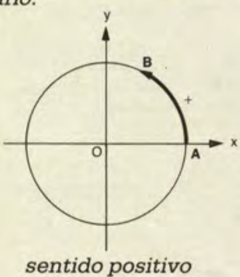
TRIGONOMETRÍA

Origen y sentido de arcos



A origen de arcos
B extremo de arcos

Un arco se considera positivo cuando para ir de A *a* B *se sigue un movimiento contrario a las agujas del reloj y negativo en el caso contrario.*

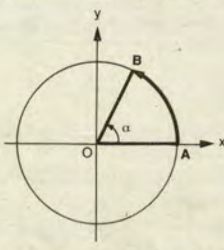


sentido positivo

sentido negativo

Relación entre ángulos y arcos

El valor de un ángulo central es igual a la amplitud del arco que le corresponde.



Lo que se diga para un arco se hace extensivo para el ángulo central correspondiente.

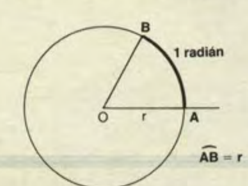
Medida de ángulos y arcos: el radián

Las unidades de medida de ángulos y arcos son:

El grado sexagesimal, *que es la amplitud del arco obtenido al dividir la circunferencia en* 360 *partes iguales:*

$$1 \text{ grado} = 60 \text{ minutos } (1° = 60')$$
$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos } (1' = 60'')$$

El radián, *se define como la medida del ángulo central correspondiente a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.*



Longitud circunferencia:

$$l = 2 \pi r$$

Su medida en radianes es:

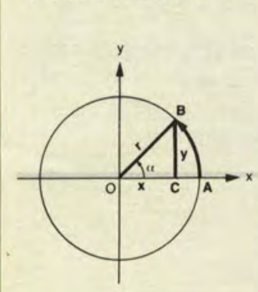
$$\frac{l}{r} = \frac{2 \pi r}{r} = 2 \pi$$

La relación entre grados sexagesimales y radianes es:

360° —— 2 π radianes
y —— x "

o bien: $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{y}{360°}$

Razones trigonométricas de un ángulo



$$\text{sen } \widehat{AB} = \text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tg } \widehat{AB} = \text{tg } \alpha = \frac{y}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

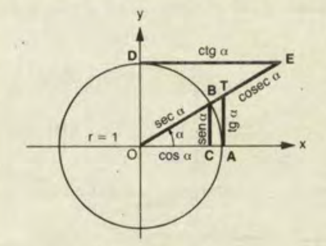
$$\text{cosec } \widehat{AB} = \text{cosec } \alpha = \frac{r}{y} \quad ; \quad y \neq 0$$

$$\sec \widehat{AB} = \sec \alpha = \frac{r}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

$$\text{ctg } \widehat{AB} = \text{ctg } \alpha = \frac{x}{y} \quad ; \quad y \neq 0$$

Representación geométrica de las razones de un ángulo

La circunferencia de radio unidad se llama circunferencia goniométrica *o* circunferencia unidad.

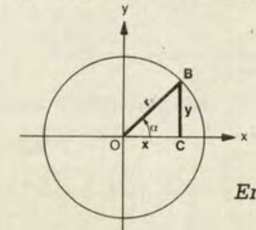


sen α = BC ; cosec α = 0E
cos α = 0C ; sec α = 0T
tg α = AT ; ctg α = DE

Signo de las razones trigonométricas

Cuadrante	sen α	cos α	tg α
1.°	+	+	+
2.°	+	–	–
3.°	–	–	+
4.°	–	+	–

Relaciones entre las razones trigonométricas



$$\text{sen } \alpha = y$$
$$\cos \alpha = x$$
$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

En el triángulo $O\hat{C}B$ *se verifica:*

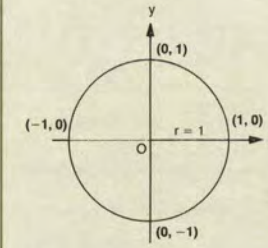
$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

De esta fórmula se deduce:

$$1 + \text{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \quad ; \quad \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

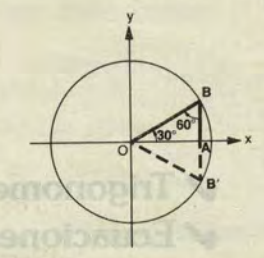
Razones trigonométricas de algunos ángulos

I. Razones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°



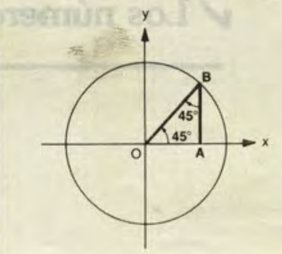
	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	∞	0	–∞	0

II. Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°



	30°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

III. Razones trigonométricas del ángulo de 45°



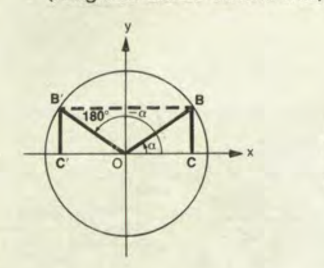
$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = 1$$

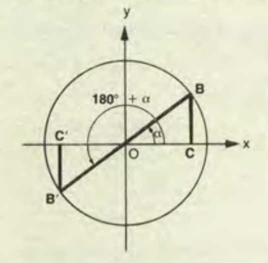
Reducción de razones trigonométricas al primer cuadrante

I. Razones de ángulos suplementarios:
(Ángulos del 2.° cuadrante)



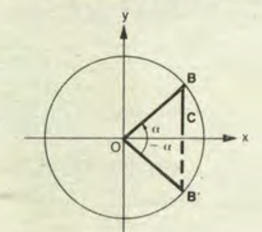
$$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

II. Razones de ángulos que difieren en 180° o π:
(Ángulos del 3.er cuadrante)



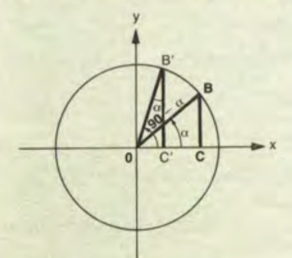
$$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}\,(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

III. Razones de ángulos opuestos:
(Ángulos del 4.° cuadrante)



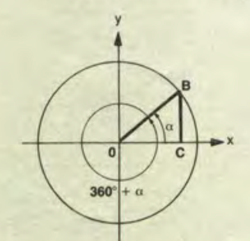
$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

IV. Razones de ángulos complementarios



$$\text{sen}\,(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\,(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\text{tg}\,(90° - \alpha) = \text{ctg}\,\alpha$$

V. Razones de ángulos que difieren en un número entero de circunferencias.



$$\left.\begin{aligned}\text{sen}\,(\alpha + 360° \cdot k) &= \text{sen}\,\alpha\\ \cos\,(\alpha + 360° \cdot k) &= \cos\alpha\\ \text{tg}\,(\alpha + 360° \cdot k) &= \text{tg}\,\alpha\end{aligned}\right\}\ k \in Z$$

VI. Razones de ángulos que no difieren un número entero de circunferencias: (Ángulos mayores de 360°)

Las razones trigonométricas de un ángulo mayor de 360° son iguales a las del resto de dividir dicho ángulo por 360°.

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos

I. Seno de la suma de dos ángulos:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

II. Coseno de la suma de dos ángulos:

$$\cos\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

III. Seno de la diferencia de dos ángulos:

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

IV. Coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$\cos\,(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

V. Tangente de la suma de dos ángulos:

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} \quad \textit{siendo}\ \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \neq 1$$

VI. Tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} \quad \textit{siendo}\ \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \neq 1$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$
$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \quad \textit{siendo}\ |\text{tg}\,\alpha| \neq 1$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$
$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \quad \textit{siendo}\ \cos \neq 1$$

Transformación de sumas y diferencias de dos razones trigonométricas en producto

$$\text{sen}\,\widehat{A} + \text{sen}\,\widehat{B} = 2\,\text{sen}\,\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}$$
$$\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} = 2\cos\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}$$
$$\text{sen}\,\widehat{A} - \text{sen}\,\widehat{B} = 2\cos\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\,\text{sen}\,\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}$$
$$\cos\widehat{A} - \cos\widehat{B} = -2\,\text{sen}\,\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\,\text{sen}\,\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}$$

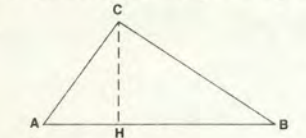
Ecuaciones trigonométricas

Se llaman ecuaciones trigonométricas a las ecuaciones en las que aparecen una o varias razones trigonométricas.

Para resolver una ecuación trigonométrica conviene expresar dicha ecuación en función de una sola razón trigonométrica o factorizarla, aplicando las fórmulas ya conocidas de la trigonometría.

Relaciones entre los elementos de un triángulo cualquiera

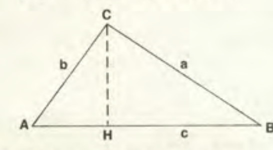
I. Relaciones entre los ángulos de un triángulo:



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

II. Teorema de los senos:

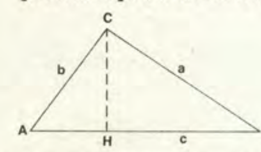
En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}$$

III. Teorema del coseno:

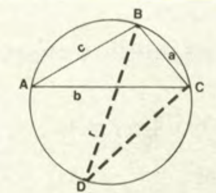
En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman (comprendido).



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\widehat{C}$$

IV. Interpretación geométrica del teorema de los senos:

La razón de un lado al seno del ángulo opuesto es, en todo triángulo, igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2\,r$$

V. Teorema de las tangentes o teorema de Neper:

a) En función de dos lados y de los ángulos opuestos:

En todo triángulo se verifica que la diferencia de dos lados es a su suma como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a dichos lados es a la tangente de la semisuma.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}$$

b) En función de dos lados y de los tres ángulos:

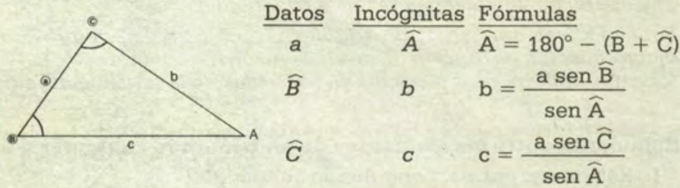
$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\widehat{B}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2}$$

Resolución de triángulos oblicuángulos

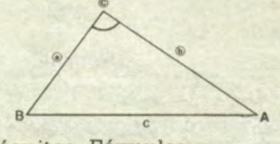
I. Dados un lado y dos ángulos:



Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	$\widehat{A}$	$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C})$
$\widehat{B}$	*b*	$b = \dfrac{a \operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$
$\widehat{C}$	*c*	$c = \dfrac{a \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$

Discusión: *Tiene solución siempre que* $\widehat{B} + \widehat{C} < 180°$

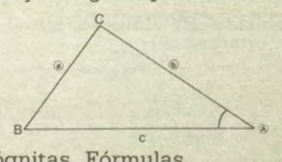
II. Dados dos lados y el ángulo comprendido:



Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	$\widehat{A}$	$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
b	$\widehat{B}$	$\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\widehat{C}}{2}$
$\widehat{C}$	*c*	$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\widehat{C}$

Discusión: *Tiene solución y es única si* $\widehat{C} < 180°$

III. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos:



Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	*c*	$c = \dfrac{a \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$
b	$\widehat{B}$	$\operatorname{sen}\widehat{B} = \dfrac{b \operatorname{sen}\widehat{A}}{a} \Rightarrow$
$\widehat{A}$	$\widehat{C}$	$C = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B})$

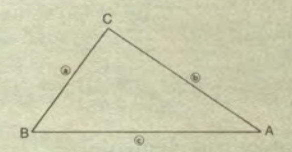
$\Rightarrow$

- *Si* $\operatorname{sen}\widehat{B} > 1$: *No tiene solución.*
- *Si* $\operatorname{sen}\widehat{B} = 1 \Rightarrow \widehat{B} = 90°$: *Solución única cuando:* $\widehat{A} < 90°$: *Sin solución si* $\widehat{A} \geqslant 90°$
- *Si* $\operatorname{sen}\widehat{B} < 1 \Rightarrow \begin{cases}\widehat{B}_1\\ \widehat{B}_2\end{cases}$ *luego:* $\begin{matrix}\widehat{B}_1 + \widehat{A} < 180°\\ \widehat{B}_2 + \widehat{A} < 180°\end{matrix}$ *Dos soluciones*

Si $\begin{cases}\widehat{B}_1 + \widehat{A} < 180°\\ \widehat{B}_2 + \widehat{A} > 180°\end{cases}$ *Una solución, corresponde al valor de* $\widehat{B}_1$

Si $\begin{cases}\widehat{B}_1 + \widehat{A} > 180°\\ \widehat{B}_2 + \widehat{A} > 180°\end{cases}$ *No tiene solución*

IV. Dados tres lados



Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	$\widehat{A}$	$\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$
b	$\widehat{B}$	$\cos\widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$
c	$\widehat{C}$	$\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$

Discusión: *Tiene solución única, excepto cuando un lado sea mayor que la suma de los otros dos.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{2}$ y $0° < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcular las restantes razones trigonométricas.

SOLUCIÓN: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}$; $\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\text{cosec}\,\alpha = 2$

2. Sabiendo que cos $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular las restantes razones trigonométricas.

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = -1$; $\text{ctg}\,\alpha = -1$; $\sec\alpha = -\sqrt{2}$; $\text{cosec}\,\alpha = \sqrt{2}$

3. Sabiendo que tg $\alpha = 2$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, hallar sen α y cos α.

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,\alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

4. Sabiendo que ctg $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, hallar sen α, cos α y tg α.

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$

5. Sabiendo que sec $\alpha = 3$ y $0° < \alpha < \frac{\pi}{2}$, hallar sen α, cos α y tg α.

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$

6. Sabiendo que cosec $\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, hallar: sen α, cos α y ctg α.

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; $\text{ctg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 135°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\,135° = -1$; $\text{ctg}\,135° = -1$; $\sec 135° = -\sqrt{2}$; $\text{cosec}\,135° = \sqrt{2}$

NOTA: En los siguientes ejercicios solamente calcularemos el sen α, cos α y tg α.

8. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 240°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 240° = -\frac{1}{2}$; $\text{tg}\,240° = \sqrt{3}$

9. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 330°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,330° = -\frac{1}{2}$; $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -240°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,(-240°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-240°) = -\frac{1}{2}$; $\text{tg}\,(-240°) = -\sqrt{3}$

11. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 600°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,600° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 600° = -\frac{1}{2}$; $\text{tg}\,600° = \sqrt{3}$

12. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 930°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,930° = -\frac{1}{2}$; $\cos 930° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,930° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

13. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 1140°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,1140° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 1140° = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\,1140° = \sqrt{3}$

14. Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -1830°$:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,(-1830°) = -\frac{1}{2}$; $\cos(-1830°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,(-1830°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. Calcular las razones trigonométricas del ángulo de 75°, observando que 75° = 45° + 30°:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\text{tg}\,75° = 2+\sqrt{3}$

16. Calcular las razones trigonométricas del ángulo de 15°, observando que 15° = 45° − 30°:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\text{tg}\,15° = 2-\sqrt{3}$

17. Calcular las razones trigonométricas del ángulo de 105°, observando que 105° = 60° + 45°:

SOLUCIÓN: $\text{sen}\,105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$; $\text{tg}\,105° = -2-\sqrt{3}$

18. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}^2\alpha-\text{sen}^2\beta$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{sen}(\alpha-\beta)=\mathbf{sen}^2\alpha-\mathbf{sen}^2\beta$

19. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos}(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{cos}(\alpha-\beta)=\mathbf{cos}^2\alpha-\mathbf{sen}^2\beta$

20. Hallar: $\text{sen}(\alpha+\beta+\gamma)$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=\mathbf{sen}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta\,\mathbf{cos}\,\gamma+\mathbf{sen}\,\beta\,\mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\gamma+\mathbf{sen}\,\gamma\,\mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta-\mathbf{sen}\,\alpha\cdot\mathbf{sen}\,\beta\cdot\mathbf{sen}\,\gamma$

21. Hallar: $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos}(\alpha+\beta+\gamma)=\mathbf{cos}\,\alpha\cdot\mathbf{cos}\,\beta\cdot\mathbf{cos}\,\gamma-\mathbf{cos}\,\alpha\cdot\mathbf{sen}\,\beta\cdot\mathbf{sen}\,\gamma-\mathbf{cos}\,\beta\cdot\mathbf{sen}\,\alpha\cdot\mathbf{sen}\,\gamma-\mathbf{cos}\,\gamma\cdot\mathbf{sen}\,\alpha\cdot\mathbf{sen}\,\beta$

22. Hallar: $\text{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\mathbf{tg}\alpha+\mathbf{tg}\beta+\mathbf{tg}\gamma-\mathbf{tg}\alpha\cdot\mathbf{tg}\beta\cdot\mathbf{tg}\gamma}{1-\mathbf{tg}\alpha\cdot\mathbf{tg}\beta-\mathbf{tg}\alpha\cdot\mathbf{tg}\gamma-\mathbf{tg}\beta\cdot\mathbf{tg}\gamma}$

23. Demostrar que si $\alpha+\beta+\gamma=180°$ se verifica:

$$\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta+\text{tg}\,\gamma=\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta\cdot\text{tg}\,\gamma$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}\,\alpha+\mathbf{tg}\,\beta+\mathbf{tg}\,\gamma=\mathbf{tg}\,\alpha\cdot\mathbf{tg}\,\beta\cdot\mathbf{tg}\,\gamma$

24. Demostrar que si $\alpha+\beta+\gamma=90°$ se verifica:

$$\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta+\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\gamma+\text{tg}\,\beta\cdot\text{tg}\,\gamma=1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}\,\alpha\cdot\mathbf{tg}\,\beta+\mathbf{tg}\,\alpha\cdot\mathbf{tg}\,\gamma+\mathbf{tg}\,\beta\cdot\mathbf{tg}\,\gamma=\mathbf{1}$

25. Calcular $\text{sen}\,3\,\alpha$ en función de $\text{sen}\,\alpha$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}\,3\,\alpha=\mathbf{3}\,\mathbf{sen}\,\alpha-\mathbf{4}\,\mathbf{sen}^3\alpha$

26. Calcular $\cos 3\,\alpha$ en función de $\cos\alpha$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos}\,3\,\alpha=\mathbf{4}\,\mathbf{cos}^3\alpha-\mathbf{3}\,\mathbf{cos}\,\alpha$

27. Calcular $\text{tg}\,3\,\alpha$ en función de $\text{tg}\,\alpha$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}\,3\,\alpha=\dfrac{\mathbf{3}\,\mathbf{tg}\,\alpha-\mathbf{tg}^3\alpha}{\mathbf{1}-\mathbf{3}\,\mathbf{tg}^2\alpha}$

28. Sabiendo que $\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calcular sen 15°, cos 15° y tg 15°.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}\,15°=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\mathbf{cos}\,15°=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\mathbf{tg}\,15°=2-\sqrt{3}$

29. Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}\,60°+\text{sen}\,30°}{\text{sen}\,60°-\text{sen}\,30°}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{sen}\,60°+\mathbf{sen}\,30°}{\mathbf{sen}\,60°-\mathbf{sen}\,30°}=2+\sqrt{3}$

30. Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\text{tg}\,120°-\text{tg}\,45°}{\text{ctg}\,90°+\cos 360°}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{tg}\,120°-\mathbf{tg}\,45°}{\mathbf{ctg}\,90°+\mathbf{cos}\,360°}=-\sqrt{3}-1$

31. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,2\,\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\,\alpha}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{sen}\,\alpha+\mathbf{sen}\,2\,\alpha}{1+\mathbf{cos}\,\alpha+\mathbf{cos}\,2\,\alpha}=\mathbf{tg}\,\alpha$

32. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,3\,\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\,\alpha}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{sen}\,\alpha+\mathbf{sen}\,3\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha+\mathbf{cos}\,3\,\alpha}=\mathbf{ctg}\,\alpha$

33. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{cos}(\alpha+\beta)-\mathbf{cos}(\alpha-\beta)}{\mathbf{sen}(\alpha+\beta)+\mathbf{sen}(\alpha-\beta)}=-\mathbf{tg}\,\beta$

34. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\text{sen}(\alpha+45°)=\frac{\sqrt{2}(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}(\alpha+45°)=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}(\mathbf{cos}\,\alpha+\mathbf{sen}\,\alpha)}{\mathbf{2}}$

35. Demostrar que cualquiera que sea α se verifica:

$$\text{tg}(45°+\alpha)-\text{tg}(45°-\alpha)=2\,\text{tg}\,2\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}(45°+\alpha)-\mathbf{tg}(45°-\alpha)=\mathbf{2}\,\mathbf{tg}\,\mathbf{2}\,\alpha$

36. Demostrar que:

$$\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}(60°+\alpha)\cdot\text{tg}(60°-\alpha)=\text{tg}\,3\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}\,\alpha\cdot\mathbf{tg}(60°+\alpha)\cdot\mathbf{tg}(60°-\alpha)=\mathbf{tg}\,3\,\alpha$

37. Demostrar que:

$$\text{tg}\,3\,\alpha-\text{tg}\,2\,\alpha-\text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,3\,\alpha\cdot\text{tg}\,2\,\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}\,3\,\alpha-\mathbf{tg}\,2\,\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\mathbf{tg}\,3\,\alpha\cdot\mathbf{tg}\,2\,\alpha\cdot\mathbf{tg}\,\alpha$

38. Demostrar la siguiente relación:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\text{sen}\,2\,\alpha+\text{sen}\,2\,\beta)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{cos}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{sen}\,\mathbf{2}\,\alpha+\mathbf{sen}\,\mathbf{2}\,\beta)$

39. Si $\text{tg}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha=p$, y $\text{tg}\,\alpha-\text{sen}\,\alpha=q$, calcular p^2-q^2 en función de pq.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p^2-q^2=4\sqrt{p\cdot q}}$

40. Hallar el valor numérico de la expresión:

$$(1+\text{tg}^2\alpha)(1+\text{tg}^2 2\,\alpha)\ldots(1+\text{tg}^2 n\,\alpha)(1+\cos 2\,\alpha)\cdot(1+\cos 4\,\alpha)\ldots(1+\cos 2\,n\,\alpha)$$

SOLUCIÓN: $(\mathbf{1}+\mathbf{tg}^2\alpha)(\mathbf{1}+\mathbf{tg}^2\,\mathbf{2}\,\alpha)\ldots(\mathbf{1}+\mathbf{tg}^2\,\mathbf{n}\,\alpha)\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{cos}\,\mathbf{2}\,\alpha)(\mathbf{1}+\mathbf{cos}\,\mathbf{4}\,\alpha)\ldots\ldots(\mathbf{1}+\mathbf{cos}\,\mathbf{2}\,\mathbf{n}\,\alpha)=\mathbf{2^n}$

41. Escribir la expresión $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\alpha} - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ en función de cos α.

SOLUCIÓN: $\left(\dfrac{\mathbf{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\mathbf{sen}\,\alpha} - \mathbf{2\,sen^2}\dfrac{\alpha}{2}\right)\mathbf{cos^2}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\mathbf{cos^2}\,\alpha}{2}$

42. Simplificar la expresión: $\dfrac{\operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} + \cos 2\beta$, sabiendo que $2\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta$.

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{sen\,2}\,\beta}{\mathbf{tg}\,(\alpha-\beta)} + \mathbf{cos\,2}\,\beta = \mathbf{5}$

43. Calcular el valor de la siguiente expresión:
sen 75° + sen 15°

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,75^\circ + sen\,15^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

44. Calcular el valor de la siguiente expresión:
sen 75° − sen 15°

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,75^\circ - sen\,15^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

45. Calcular el valor de la siguiente expresión:
cos 75° + cos 15°

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos\,75^\circ + cos\,15^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

46. Calcular el valor de la siguiente expresión:
cos 75° − cos 15°

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos\,75^\circ - cos\,15^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

47. Demostrar que: $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sec 2\alpha$.

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{ctg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\alpha}{\mathbf{ctg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\alpha} = \mathbf{sec\,2}\,\alpha$

48. Hallar tg α, sabiendo que $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\mathbf{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$

49. Si tg α = 3, calcular el valor de cosec (90° − α).

SOLUCIÓN: $\mathbf{cosec\,(90^\circ} - \alpha) = \sqrt{10}$

50. Calcular sen 5 α, siendo $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,5}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$

51. Si $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, deducir el valor de sen α.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen}\,\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

52. Demostrar que: $\operatorname{sen}^2 3\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen} 4\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen^2\,3}\,\alpha - \mathbf{sen^2}\,\alpha = \mathbf{sen\,4}\,\alpha \cdot \mathbf{sen\,2}\,\alpha$

53. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, calcular el valor de sen 4 α.

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,4}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

54. Demostrar que: $1 - \operatorname{sen}\alpha = \left(\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{1 - sen}\,\alpha = \left(\mathbf{sen}\dfrac{\alpha}{2} - \mathbf{cos}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

55. Simplificar la siguiente expresión:
$\dfrac{\operatorname{sen} 3\alpha + \operatorname{sen} 5\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha}$

SOLUCIÓN: $\dfrac{\mathbf{sen\,3}\,\alpha + \mathbf{sen\,5}\,\alpha}{\mathbf{sen}\,\alpha + \mathbf{sen\,3}\,\alpha} = \mathbf{2\,cos\,2}\,\alpha$

56. Resolver la ecuación: 2 sen x = −1.

SOLUCIÓN: **x = 210° + 2 k π ; x = 330° + 2 k π**

57. Resolver la ecuación: sen x = cos 2 x.

SOLUCIÓN: **x = 30° + 2 k π ; x = 150° + 2 k π ; x = 270° + 2 k π**

58. Resolver la ecuación: $3\operatorname{sen} x - 2\cos^2 x = 0$.

SOLUCIÓN: **x = 30° + 2 k π ; x = 150° + 2 k π**

59. Resolver la ecuación: cos 2x + sen x − 1 = 0.

SOLUCIÓN: **x = 0° + 2 k π ; x = 180° + 2 k π** ; **x = 30° + 2 k π ; x = 150° + 2 k π**

60. Resolver la ecuación: tg 3x = 1.

SOLUCIÓN: **x = 15° + 60° k**

61. Resolver la ecuación: cos 4x + cos 2x = cos x.

SOLUCIÓN: **x = 360° k ± 90° ; x = 120° k ± 20°**

62. Resolver la ecuación: $\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 1 = 0$.

SOLUCIÓN: **x = 180° k ; x = 45° + 180° k**

63. Resolver la ecuación: 4 sen x = cosec x.

SOLUCIÓN: **x = 30° + 2 k π ; x = 150° + 2 k π** ; **x = 210° + 2 k π ; x = 330° + 2 k π**

64. Resolver la ecuación: tg x = sen 2x.

SOLUCIÓN: **x = 0° + 2 k π ; x = 180° + 2 k π** ; **x = 2 k π ± 45°**

65. Resolver la ecuación: $4 \text{ sen } \frac{x}{2} + 2 \cos x = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 60° + 720 k \; ; \; x = 300° + 720 k}$

66. Resolver la ecuación: $3 \text{ tg } x - 2 \cos x = 0$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 30° + 2 k \pi \; ; \; x = 150° + 2 k \pi}$

67. Resolver la ecuación: $\text{tg } x + \cos 2x = 1$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 0° + k \pi \; ; \; x = 45° + k \pi}$

68. Resolver la ecuación: $\text{tg } \frac{x}{2} = \frac{\text{tg } x - 2}{\text{tg } x + 2}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 90° + 2 k \pi}$

69. Resolver la ecuación: $\frac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = \cos x$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 360° k \pm 90° \; ; \; x = 30° + 2 k \pi \; ;}$
$\mathbf{x = 150° + 2 k \pi}$

70. Resolver la ecuación: $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = k \pi \pm 60°}$

71. Resolver la ecuación: $\frac{1}{2} \text{ ctg } x = \cos x$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 360° k + 90° \; ; \; x = 30° + 2 k \pi \; ;}$
$\mathbf{x = 150° + 2 k \pi}$

72. Resolver la ecuación: $\text{cosec } x - \text{ctg } x = \sqrt{3}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 120° + 2 k \pi \; ; \; x = 240° + 2 k \pi}$

73. Resolver la ecuación:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = k \pi \pm 30°}$

74. La secante de un cierto ángulo es igual a la suma del coseno más el seno del mismo ángulo. Hallar dicho ángulo.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 0 + 2 k \pi \; ; \; x = 180° + 2 k \pi \; ;}$
$\mathbf{x = 45° + k \pi}$

75. Dada la ecuación: $\text{sen } 2x = (1{,}5 + \text{sen } x) \text{ sen } x \cdot \cos x$, calcular el valor numérico de tg x.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\text{tg } x = 0 \; ; \; \text{tg } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$

76. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen }(x + y) = 1 \\ \text{sen }(x - y) = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 60° \; ; \; y = 30°}$

77. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen } x \cdot \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \\ \text{sen } y \cdot \cos x = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \end{array}\right\}$$

dando las soluciones en el $[0, \pi/2]$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 45° \; ; \; y = 15°}$

78. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen } x + \text{sen } y = 1 \\ \text{sen } x - \text{sen } y = 1 \end{array}\right\}$$

dando las soluciones en el $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN: **1.ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 90°} \\ \mathbf{y = 0°} \end{cases}$; **2.ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 90°} \\ \mathbf{y = 180°} \end{cases}$; **3.ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 90°} \\ \mathbf{y = 360°} \end{cases}$

79. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y + \text{sen}^2 x = 2 \\ y + \cos^2 x = 1 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 90° + 2 k \pi \; ; \; y = 1}$
$\mathbf{x = 270° + 2 k \pi \; ; \; y = 1}$

80. Calcular los ángulos menores de 180° que verifican al sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \cos x \cdot \cos y = \text{sen } x \cdot \text{sen } y \\ x - y = 30° \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **1.ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 60°} \\ \mathbf{y = 30°} \end{cases}$; **2.ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 150°} \\ \mathbf{y = 120°} \end{cases}$

81. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4 \text{ sen } x \cdot \cos y = \sqrt{6} \\ x + y = 105° \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 60° \; ; \; y = 45°}$

82. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \text{tg }(x + y) = \sqrt{3} \\ \text{tg }(x - y) = 1 \end{array}\right\}$$

dando el resultado en el $[0, \pi/2]$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 52° 30' \; ; \; y = 7° 30'}$

83. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \text{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 90° + 180° k \; ; \; y = \pm 60° \pm 180° k}$

84. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4y \text{ sen } x \cos x = 3 \\ 2y \cdot \cos 2x = \sqrt{3} \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 30° \; ; \; y = \sqrt{3}}$

85. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2 \text{ sen } x - 2 \text{ sen } y = -1 + \sqrt{3} \\ 2 \text{ sen } x + 2 \text{ sen } y = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **1ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 60° + 2 k \pi} \\ \mathbf{y = 30° + 2 k \pi} \end{cases}$; **2.ª** $\begin{cases} \mathbf{x = 120° + 2 k \pi} \\ \mathbf{y = 150° + 2 k \pi} \end{cases}$

86. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \text{tg } x + \text{tg } y = 2 \end{array}\right\}$$

se pide:

I. Resolver el sistema, hallando las soluciones x e y menores de $\frac{\pi}{2}$ radianes.

II. Calcular el valor que toma para tales soluciones la expresión:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos y}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 45° \; ; \; y = 45°}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos y} = \sqrt{2}}$

87. Sea el triángulo cuyo lado a mide 12 dm, y los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, 45° y 75° respectivamente. Hallar:

I. Los lados b y c.

II. El área del triángulo.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{b = 4\sqrt{6}\ dm \; ; \; c = 2\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})\ dm}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{S = 12(3 + \sqrt{3})\ dm^2}$

88. Demostrar que en un triángulo de lados a, b y c, y ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ se verifica:

$$\text{sen } A = \text{sen } B \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \cos B$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ A = sen\ B \cdot cos\ C + sen\ C \cdot cos\ B}$

89. Demostrar que en un triángulo de lados a, b y c, y ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ se verifica:

$$\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \text{tg } A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg\ A + tg\ B + tg\ C = tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C}$

90. Hallar el valor de:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

siendo A, B y C los ángulos de un triángulo.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -1}$

91. Hallar los ángulos de un triángulo isósceles que tiene por base b = 20 dm y de perímetro 180 dm.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\widehat{A} = \widehat{C} = 82° 49' \; ; \; \widehat{B} = 14° 22'}$

92. Calcular los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de un triángulo, sabiendo que $\text{sen } \widehat{A} + \text{sen } \widehat{B} = \frac{3}{2}$ y que el ángulo $\widehat{C} = 60°$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\widehat{A} = 90° \; ; \; \widehat{B} = 30°}$

93. Resolver el triángulo $A\widehat{B}C$, del cual se conocen a = 30 dm; $\widehat{B} = 33° 10'$ y $\widehat{C} = 43°$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\widehat{A} = 103° 50' \; ; \; b = 16{,}9\ dm \; ; \; c = 21{,}07\ dm}$

94. Resolver el triángulo $A\widehat{B}C$, del cual se conocen a = 4 dm; b = 6 dm y $\widehat{C} = 37°$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{c = 3{,}69\ dm \; ; \; \widehat{A} = 40° 39' \; ; \; \widehat{B} = 102° 21'}$

95. Resolver el triángulo $A\widehat{B}C$, del cual se conocen a = 7 dm; b = 5 dm y c = 10 dm.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\widehat{A} = 40° 32' \; ; \; \widehat{B} = 27° 40' \; ; \; \widehat{C} = 111° 48'}$

96. Resolver el triángulo $A\widehat{B}C$, del cual se conocen a = 8 dm; b = 10 dm y $\widehat{A} = 57° 10'$.

SOLUCIÓN: **No existe solución por ser sen B > 1**

97. Resolver el triángulo $A\widehat{B}C$, del cual se conocen a = 7 dm; b = 8 dm y $\widehat{A} = 27° 40'$.

SOLUCIÓN:

1.ª $\mathbf{\widehat{B}_1 = 32° 3' \; ; \; \widehat{C}_1 = 120° 17' \; ; \; c_1 = 1{,}3\ dm}$

2.ª $\mathbf{\widehat{B}_2 = 147° 57' \; ; \; \widehat{C}_2 = 4° 23' \; ; \; c_2 = 1{,}1\ dm}$

98. Hallar el área de un triángulo sabiendo que el lado a = 10 dm y los ángulos $\widehat{B} = 45°$ y $\widehat{C} = 30°$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 18{,}3\ dm^2}$

99. Hallar los lados de un paralelogramo sabiendo que sus diagonales miden 10 y 12 dm respectivamente, y el ángulo que forman vale 48° 15'.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\overline{AB} = 10\ dm \; ; \; \overline{BC} = 4{,}6\ dm}$

100. Resolver el triángulo que tiene de lado a = 10 dm y los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ satisfacen al sistema de ecuaciones:

$$\text{sen } \widehat{B} + \text{sen } \widehat{C} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos \widehat{B} + \cos \widehat{C} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

SOLUCIÓN:

El triángulo es rectángulo. Sus ángulos son:

$\mathbf{\widehat{A} = 90° \; ; \; \widehat{B} = 15° \; ; \; \widehat{C} = 75°}$

y sus lados:

$\mathbf{a = 10\ dm \; ; \; b = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)\ dm \; ;}$

$\mathbf{c = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)\ dm}$

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Definición e igualdad de números complejos

Se llama número complejo a un par ordenado de números reales.

El conjunto de números complejos se simboliza por $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

Dos números complejos (a, b) *y* (c, d) *son iguales cuando se verifica:*

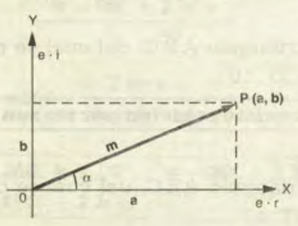
$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Afijo y módulo de un número complejo

El punto P (a, b) *se llama afijo del número complejo* (a, b).

La longitud del vector $\overrightarrow{OP}$, *se llama módulo del número complejo* z = (a, b), *cuyo valor lo representamos:*

$$m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



El ángulo α *se llama argumento del número complejo* z = (a, b).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{m} \;;\; \cos \alpha = \frac{a}{m} \;;\; \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Expresiones de los números complejos

Todo número complejo puede adoptar diversas formas:

I. Forma real: $z = (a, b)$

II. Forma binómica: $z = a + bi$, siendo $i = (0, 1)$

III. Forma trigonométrica: $z = m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

IV. Forma polar: $z = (m, \alpha) = m_\alpha$

Números complejos cero, conjugados y opuestos

Forma real:

Número complejo cero: $z = (a, b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Números complejos conjugados:

$$z_1 = (a, b) \;;\; z_2 = (a, -b)$$

Números complejos opuestos:

$$z_1 = (a, b) \;;\; z_2 (-a, -b)$$

Forma binómica:

Número complejo cero: $z = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Números complejos conjugados: $z_1 = a + bi \;;\; z_2 = a - bi$

Números complejos opuestos: $z_1 = a + bi \;;\; z_2 = -a - bi$

Forma trigonométrica:

Número complejo cero: $z = m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \Leftrightarrow m = 0$

Números complejos conjugados:

$$z_1 = m_1 (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \;;\; z_2 = m_2 [\cos (-\alpha) + i \operatorname{sen} (-\alpha)]$$

siendo: $m_1 = m_2 \;;\; \alpha = -\alpha$

Números complejos opuestos:

$$z_1 = m_1 (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \;;\; z_2 = m_2 (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

siendo: $m_1 = m_2 \;;\; \alpha = \varphi + \pi$ *o* $\alpha = \varphi + (2k + 1) \pi$

Forma polar:

Número complejo cero: $z = m_\alpha \Leftrightarrow m = 0$

Números complejos conjugados: $z_1 = m_{1_\alpha} \;;\; z_2 = m_{2_{(-\alpha)}}$

siendo: $m_1 = m_2$

Números complejos opuestos: $z_1 = m_{1_\alpha} \;;\; z_2 = m_{2_\varphi}$

siendo: $m_1 = m_2 \;;\; \alpha = \varphi + \pi$ *o* $\alpha = \varphi + (2k + 1) \pi$

Operaciones con números complejos

I. Adición:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i$$

II. Diferencia:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d) i$$

III. Multiplicación:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a c - b d, a d + b c)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (a c - b d) + (a d + b c) i$$

$$m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot m' (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = m m' [\cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta)]$$

$$m_\alpha \cdot m'_\beta = m m'_{\alpha + \beta}$$

IV. Cociente:

$$(a, b) : (c, d) = \left(\frac{a c + b d}{c^2 + d^2} , \frac{b c - a d}{c^2 + d^2} \right)$$

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{a c + b d}{c^2 + d^2} + \frac{b c - a d}{c^2 + d^2} i$$

$$\frac{m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{m' (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} = \frac{m}{m'} [\cos (\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha - \beta)]$$

$$m_\alpha : m'_\beta = \left(\frac{m}{m'} \right)_{\alpha - \beta}$$

Potencias de la unidad imaginaria

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$\vdots$

$$i^n = i^{4c + r} = i^r \;;\; \text{siendo } i^n \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} n & 4 \\ r & c \end{array} \right] \Rightarrow i^n = i^r$$

$$n \in \mathbf{N}$$

Potencia de un número complejo

I. $z^n = (a + bi)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} (bi) + \cdots + \binom{n}{n} (bi)^n$

siendo $n \in \mathbf{N}$

II. $z^n = [m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = m^n (\cos n \alpha + i \operatorname{sen} n \alpha)$

Fórmula de Moivre

III. $z^n = (m_\alpha)^n = m^n_{n\alpha}$

Raíz cuadrada de un número complejo

I. $\sqrt{a + bi} = x + yi \Leftrightarrow a + bi = (x + yi)^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m + a}{2}} \;;\; y = \pm \sqrt{\frac{m - a}{2}}$$

siendo $m = \sqrt{a^2 + b^2}$; *luego:* $\sqrt{a + bi} = \pm \sqrt{\frac{m + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{m - a}{2}}$

II. $\sqrt{m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} = r (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = [r (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)]^2 =$

$= r^2 (\cos 2\beta + i \operatorname{sen} 2\beta)$

luego:

$$\left. \begin{array}{l} m = r^2 \\ \alpha = 2\beta + 2k\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{m} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2} \\ k = 1 \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2} + \pi \end{cases}$$

de donde:

$$\sqrt{m (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} = \sqrt{m} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2k\pi}{2} \right)$$

III. $\sqrt{m_\alpha} = \sqrt{m}_{\frac{\alpha + 2k\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow (\sqrt{m})_{\alpha/2} \\ k = 1 \Rightarrow (\sqrt{m})_{\alpha/2 + \pi} \end{cases}$

Raíz n-ésima de un número complejo

$$\sqrt[n]{m_\alpha} = r_\beta \Leftrightarrow m_\alpha = [r_\beta]^n = (r^n)_{n\beta}$$

luego:

$$\left. \begin{array}{r} r^n = m \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt[n]{m} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{array}$$

de donde:

$$\sqrt[n]{m_\alpha} = \sqrt[n]{m}_{\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}$$

Dando a k *los valores* 0, 1, 2, . . . , n − 1, *se obtienen las* n *raíces del número complejo.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

101. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = 5 + 5\,i$. Representarlo gráficamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 5\sqrt{2}\ ;\ \alpha = 45°}$

102. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = 1 - i\sqrt{3}$. Representarlo gráficamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 2\ ;\ \alpha = 300°}$

103. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = -16\,i$. Representarlo gráficamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 16\ ;\ \alpha = 270°}$

104. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = \dfrac{1 - \sqrt{-3}}{2}$. Representarlo gráficamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 1\ ;\ \alpha = 240°}$

105. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = -9$. Representarlo gráficamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 9\ ;\ \alpha = 180°}$

106. Efectuar las siguientes operaciones:

I. $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-5 + 7i)$

II. $z_1 - z_2 = (4 + 2i) - (-1 + 3i)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{z_1 + z_2 = -2 + 3i}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{z_1 - z_2 = 5 - i}$

107. Efectuar las siguientes operaciones:

I. $z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(3 - 2i)$

II. $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(3 - 4i)$

III. $z_1 : z_2 = (1 + 3i) : (2 + i)$

IV. $z_1 : z_2 = (3 - 2i) : (2 - 3i)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 8 - i}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 25}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{z_1 : z_2 = 1 + i}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{z_1 : z_2 = \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}\,i}$

108. Efectuar la siguiente operación: $z_1 : z_2 = (1 + i) : (1 - i)$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{z_1 : z_2 = i}$

109. Calcular el módulo del producto: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -2i\,(1 + i)(3 + i)$.

SOLUCIÓN: **Módulo de $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ es $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 4\sqrt{5}$**

110. Hallar c con la condición de que el producto: $z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(c + i)$ sea un número real.

SOLUCIÓN: $\mathbf{c = -2}$

111. Hallar c con la condición de que el producto: $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(c + 6i)$ sea imaginario puro.

SOLUCIÓN: $\mathbf{c = 4}$

112. Hallar a y c para que el producto: $z_1 \cdot z_2 = (a + 3i)(c - 2i)$ sea igual a 12 i.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a = -3\ ;\ c = 2}$

113. Hallar el módulo de: $\dfrac{(3 + 2i)(1 - i)}{(4 + i)(2 - i)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = \sqrt{\dfrac{26}{85}}}$

114. Hallar a y b para que sea: $\dfrac{a - 3i}{2 + bi} = 3 - 2i$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a = \dfrac{20}{3}\ ;\ b = \dfrac{1}{3}}$

115. Hallar a y b para que sea: $\dfrac{a + 19i}{-5 + bi} = 3 - 2i$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{a = -9\ ;\ b = 3}$

116. Hallar un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

SOLUCIÓN:
1.ª $\mathbf{z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i}$
2.ª $\mathbf{z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i}$

117. Hallar dos números complejos z_1 y z_2 tales que su suma sea $1 + 4i$ y cuyo cociente sea i.

SOLUCIÓN: $\mathbf{z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}\,i\ ;\ z_2 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\,i}$

118. Hallar dos números complejos z_1 y z_2 tales que su suma sea $5 + 5i$; su cociente imaginario puro y la parte real de z_2 sea 3.

SOLUCIÓN:
1.ª $\mathbf{z_1 = 2 - i\ ;\ z_2 = 3 + 6i}$
2.ª $\mathbf{z_1 = 2 + 6i\ ;\ z_2 = 3 - i}$

119. Hallar b y d de manera que: $(3 + bi)(2 - di) = 12 - 5i$.

SOLUCIÓN:
$\mathbf{b_1 = 2\ ;\ d_1 = 3}$
$\mathbf{b_2 = -\dfrac{9}{2}\ ;\ d_2 = -\dfrac{4}{3}}$

120. Demostrar que los números complejos conjugados $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$, son raíces de la ecuación: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

SOLUCIÓN: **Los números complejos $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$ satisfacen la ecuación**

121. La diferencia de dos números complejos vale 1, el módulo del minuendo es $4\sqrt{2}$ y el del sustraendo 5. Hallar los dos números complejos.

SOLUCIÓN:
1.ª $\mathbf{z_1 = 4 + 4i\ ;\ z_2 = 3 + 4i}$
2.ª $\mathbf{z_1 = 4 - 4i\ ;\ z_2 = 3 - 4i}$

122. El cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es real y vale 5. El módulo del dividendo es el doble del módulo del divisor. Hallar estos números.

SOLUCIÓN:
1.ª $\mathbf{z_1 = 4 + 2i\ ;\ z_2 = 1 - 2i}$
2.ª $\mathbf{z_1 = 4 - 2i\ ;\ z_2 = 1 + 2i}$

123. Poner en forma binómica la siguiente expresión:

$$\frac{(4 + i)^2 - (4 - i)^2}{(4 + i)^2 + (4 - i)^2}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{(4+i)^2 - (4-i)^2}{(4+i)^2 + (4-i)^2} = \dfrac{8}{15}\, i$

124. Poner en forma binómica la siguiente expresión:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a} - i\sqrt{b}}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{a+b}{\sqrt{a} - i\sqrt{b}} = \sqrt{a} + i\sqrt{b}$

125. Expresar el número complejo $z = 8\,(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$ en forma binómica.

SOLUCIÓN: $z = 8\,(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -4\sqrt{3} - 4i$

126. Expresar el número complejo $z = 2\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$ en forma binómica.

SOLUCIÓN: $z = 2\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2i$

127. Efectuar la siguiente operación y poner el resultado en forma trigonométrica:

$$(4 + 4\sqrt{3}\,i)\,(3\sqrt{3} + 3i)$$

SOLUCIÓN: $z = 48\,i = 48\,(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

128. Efectuar la siguiente operación, poniendo el resultado en forma trigonométrica y binómica:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\,(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ) \cdot 3\,(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$$

SOLUCIÓN: $z_1 \cdot z_2 = 6\,(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 6i$

129. Efectuar la siguiente operación, poniendo el resultado en forma trigonométrica y binómica:

$$\frac{5+2i}{3-i}\,(1-2i)$$

SOLUCIÓN:
$$\frac{5+2i}{3-i}\,(1-2i) = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\,i = \frac{\sqrt{58}}{2}\,(\cos 336^\circ 50' + i \operatorname{sen} 336^\circ 50')$$

130. Expresar el número complejo $z = -4 - 4\sqrt{3}\,i$ en forma trigonométrica.

$z = -4 - 4\sqrt{3}\,i = 8\,(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

131. Expresar el número complejo $z = 1 + i$ en forma trigonométrica.

SOLUCIÓN: $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

132. Expresar el número complejo $z = 1 + i\sqrt{3}$ en forma trigonométrica.

SOLUCIÓN: $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$

133. Expresar el número complejo $z = -4 + 4\sqrt{3}\,i$ en forma trigonométrica.

$z = -4 + 4\sqrt{3}\,i = (8, 120^\circ) = 8_{120}$

134. Expresar el número complejo $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ en forma polar.

SOLUCIÓN: $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i = (1, 60^\circ) = 1_{60}$

135. Expresar el número complejo $z = -\sqrt{3} - i$ en forma polar.

SOLUCIÓN: $z = -\sqrt{3} - i = (2, 210^\circ) = 2_{210}$

136. Dados los números complejos $z_1 = 2\,(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$ y $z_2 = 8\,(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$. Hallar:

I. El producto $z_1 \cdot z_2$

II. El cociente $z_1 : z_2$

III. El cociente $z_2 : z_1$

SOLUCIÓN I: $z_1 \cdot z_2 = 16\,(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

SOLUCIÓN II: $z_1 : z_2 = \dfrac{1}{4}\,(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

SOLUCIÓN III: $z_2 : z_1 = 4\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$

137. Efectuar la siguiente operación y escribir el resultado en forma trigonométrica:

$$\frac{1+3i}{2+i}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{1+3i}{2+i} = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

138. Efectuar la siguiente operación y expresar el resultado en forma trigonométrica:

$$(2 + 2\sqrt{3}\,i) + (2\sqrt{3} + 2i)$$

SOLUCIÓN:
$$(2 + 2\sqrt{3}\,i) + (2\sqrt{3} + 2i) = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

139. Calcular a y b, para que $(a^2 - b^2) + 2abi$ sea conjugado de $8 + 6i$.

SOLUCIÓN: 1.º $a_1 = 3$; $b_1 = -1$ 2.º $a_2 = -3$; $b_2 = 1$

140. La suma de dos números complejos $z_1 + z_2 = 6$; el módulo de $|z_1| = \sqrt{13}$ y el de $|z_2| = 5$. Hallar:

I. Dichos complejos.

II. Sus productos.

III. Sus cocientes.

SOLUCIÓN I:
1.ª $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 - 3i$
2.ª $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 4 + 3i$

SOLUCIÓN II:
$z_1 \cdot z_2 = 17 + 6i$
$z_1 \cdot z_2 = 17 - 6i$

SOLUCIÓN III:
$z_1 : z_2 = -\dfrac{1}{25} + \dfrac{18}{25}\,i$;
$z_1 : z_2 = -\dfrac{1}{25} - \dfrac{18}{25}\,i$

141. Calcular las potencias:

I. $(1 + i)^2$

II. $(4 - i)$[illegible]

III. $(5 + 2i)$[illegible]

IV. $(3 + 7i)$[illegible]

SOLUCIÓN I: $(1 + i)^2 = 2i$

SOLUCIÓN II: $(4-i)^2 = 15 - 8i$

SOLUCIÓN III: $(5+2i)^3 = 65 + 142i$

SOLUCIÓN IV: $(3+7i)^3 = -414 - 154i$

142. Calcular: $(1+i\sqrt{3})^4$ por la fórmula de Moivre.

SOLUCIÓN: $(1+i\sqrt{3})^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$

143. Calcular: $(-1+i)^{10}$ por la fórmula de Moivre.

SOLUCIÓN: $(-1+i)^{10} = -32i$

144. Calcular: $(\sqrt{3}-i)^{10}$ por la fórmula de Moivre.

SOLUCIÓN: $(\sqrt{3}-i)^{10} = 512 + 512\sqrt{3}\,i$

145. Calcular: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^3$, expresando el resultado en forma polar y binómica.

SOLUCIÓN: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^3 = (27, 90°) = 27i$

146. Calcular: $(\sqrt{3}-i)^5$, expresando el resultado en forma polar y binómica.

SOLUCIÓN: $(\sqrt{3}-i)^5 = (2, 330°)^5 = (32, 1650°) = -16\sqrt{3} - 16i$

147. Calcular las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma polar, trigonométrica y binómica:

I. $(2, 30°) \cdot (5, 30°)$
II. $(10, 45°) : (2, 15°)$
III. $(1, 30°)^5$
IV. $(2, 120°)^6$

SOLUCIÓN I: $(2,30°)(5,30°) = (10,60°) = 10_{60°} = 10(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 5 + 5\sqrt{3}\,i$

SOLUCIÓN II: $(10,45°) : (2,15°) = (5,30°) = 5_{30°} = 5(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

SOLUCIÓN III: $(1,30°)^5 = (1,150°) = \cos 150° + i \operatorname{sen} 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

SOLUCIÓN IV: $(2,120°)^6 = (64,720°) = 64_{720°} = 64(\cos 720° + i \operatorname{sen} 720°) = 64$

148. Demostrar por la fórmula de Moivre el valor del $\cos 3\alpha$ y $\operatorname{sen} 3\alpha$.

SOLUCIÓN:
$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha$
$\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha - 3\operatorname{sen}^3\alpha$

149. Calcular el valor de i^{7438}.

SOLUCIÓN: $i^{7438} = -1$

150. Calcular el valor de i^{1787}.

SOLUCIÓN: $i^{1787} = -i$

151. Hallar un número complejo cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado.

SOLUCIÓN: $(1,0)$; $(1,72°)$; $(1,144°)$; $(1,216°)$; $(1,288°)$

152. El complejo $z_1 = 3 - 2i$ es una raíz de una ecuación de segundo grado. Se pide hallar la otra raíz y su ecuación.

SOLUCIÓN: $z_2 = 3 + 2i$; $x^2 - 6x + 13 = 0$

153. Expresar en forma binómica: $\sqrt{i}$.

SOLUCIÓN: $\sqrt{i} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$

154. Expresar en forma binómica: $\sqrt{3+4i}$.

SOLUCIÓN:
1.ª $2 + i$
2.ª $-2 - i$

155. Hallar en forma binómica: $\sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

SOLUCIÓN:
1.ª $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
2.ª $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

156. Hallar en forma binómica: $\sqrt{1 + 2i\sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN:
1.ª $\sqrt{2} + i$
2.ª $-\sqrt{2} - i$

157. Hallar en forma binómica: $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$.

SOLUCIÓN:
1.ª $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
2.ª $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

158. Expresar en forma binómica la siguiente expresión: $\sqrt[3]{i}$.

SOLUCIÓN:
1.ª $-i$
2.ª $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
3.ª $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

159. Efectuar las siguientes operaciones:

I. $2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)^6$
II. $2(\cos 6° + i \operatorname{sen} 6°)^{10}$

SOLUCIÓN I: $64i$

SOLUCIÓN II: $512 + 512\sqrt{3}\,i$

160. Hallar los valores de a y b para los cuales se verifica:

$$\frac{a - 1 + bi}{a + bi + i} = 2$$

SOLUCIÓN: $a = -1$; $b = -2$

161. Hallar un número complejo tal que sumándolo con $\frac{1+i}{2-2i}$ dé otro número complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45°.

SOLUCIÓN: $(a + bi) = 1 + \frac{1}{2}i$

162. Hallar el valor de b en la expresión $\frac{2+b\,i}{1+b\,i}$, para que el módulo del cociente que resulte sea igual a 2.

SOLUCIÓN: $\mathbf{b = 0}$

163. Hallar la suma: $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{25}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{25} = 1 + i}$

164. Calcular el módulo y argumento de las soluciones de la ecuación: $x^2 - \sqrt{12}\,x + 4 = 0$ y hallar el cociente de estas soluciones.

SOLUCIÓN:
$$|x_1| = 2 \;;\; \alpha_1 = 30^\circ$$
$$|x_2| = 2 \;;\; \alpha_2 = 330^\circ$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

165. Hallar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

I. $i \;;\; -i$

II. $2 + i \;;\; 2 - i$

III. $2\,(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \;;\; 2\,(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x^2 - 4x + 5 = 0}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0}$

166. Calcular la suma de los cuadrados de las raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN: $$1^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 = 0$$

167. Hallar las raíces siguientes expresando los resultados en forma polar, trigonométrica y binómica:

I. $\sqrt{9}$ **III.** $\sqrt[3]{8}$

II. $\sqrt{-9}$ **IV.** $\sqrt[3]{-8}$

SOLUCIÓN I: $$\sqrt{9} = \begin{cases} (3, 0^\circ) = 3\,(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 3 \\ (3, 180^\circ) = 3\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN II: $$\sqrt{-9} = \begin{cases} (3, 90^\circ) = 3\,(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 3\,i \\ (3, 270^\circ) = 3\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -3i \end{cases}$$

SOLUCIÓN III: $$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} (2, 0^\circ) = 2\,(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 2 \\ (2, 120^\circ) = 2\,(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = \\ = -1 + i\sqrt{3} \\ (2, 240^\circ) = 2\,(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = \\ = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN IV: $$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} (2, 60^\circ) = 2\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = \\ = 1 + i\sqrt{3} \\ (2, 180^\circ) = 2\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = \\ = -2 \\ (2, 300^\circ) = 2\,(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = \\ = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

168. Hallar todas las raíces de la ecuación: $z^3 + 1 = 0$.

SOLUCIÓN: $$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{cases}$$

169. Hallar todas las raíces de la ecuación: $z^6 + 64 = 0$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{2_{30^\circ} \;;\; 2_{90^\circ} \;;\; 2_{150^\circ} \;;\; 2_{210^\circ} \;;\; 2_{270^\circ} \;;\; 2_{330^\circ}}$

170. Hallar todas las raíces de la ecuación: $z^4 + 81 = 0$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{3_{45^\circ} \;;\; 3_{135^\circ} \;;\; 3_{225^\circ} \;;\; 3_{315^\circ}}$

171. Calcular: $\sqrt[3]{-i}$.

SOLUCIÓN: $$\sqrt[3]{-i} = \begin{cases} 1_{90^\circ} \\ 1_{210^\circ} \\ 1_{330^\circ} \end{cases}$$

172. Calcular: $\sqrt[4]{-2 + 2\,i\sqrt{3}}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt{2}_{30^\circ} \;;\; \sqrt{2}_{120^\circ} \;;\; \sqrt{2}_{210^\circ} \;;\; \sqrt{2}_{300^\circ}}$

173. Dado el complejo $z = 2 + i\sqrt{12}$, calcular sus cuatro raíces cuartas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt{2}_{15^\circ} \;;\; \sqrt{2}_{105^\circ} \;;\; \sqrt{2}_{195^\circ} \;;\; \sqrt{2}_{285^\circ}}$

174. Poner en forma binómica el número complejo: $\frac{5}{\sqrt{-i}}$.

SOLUCIÓN: $$\frac{5}{\sqrt{-i}} = \begin{cases} \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\,i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\,i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

175. Hallar en forma polar: $\sqrt{4\,(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{2_{15^\circ} \;;\; 2_{195^\circ}}$

176. Hallar en forma polar: $\sqrt[3]{27\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{3_{20^\circ} \;;\; 3_{140^\circ} \;;\; 3_{260^\circ}}$

177. Hallar en forma polar: $\sqrt[4]{81\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{(3, 45^\circ) \;;\; (3, 135^\circ) \;;\; (3, 225^\circ) \;;\; (3, 315^\circ)}$

178. Hallar una ecuación de segundo grado, cuyas raíces sean los números complejos $\sqrt{2}_{45^\circ}$ y $\sqrt{2}_{315^\circ}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 - 2x + 2 = 0}$

179. Hallar: $\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}}$.

SOLUCIÓN: $$\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \end{cases}$$

180. Hallar dos números complejos tales que su cociente sea imaginario puro y su diferencia igual a 10. La razón de las partes reales, del primero al segundo, es igual a -4.

SOLUCIÓN: **1.ª** $\begin{cases} z_1 = 8 + 4\,i \\ z_2 = -2 + 4\,i \end{cases}$; **2.ª** $\begin{cases} z_1 = 8 - 4\,i \\ z_2 = -2 - 4\,i \end{cases}$

181. Calcular trigonométricamente: $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2}$.

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \\ \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) \\ \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{6}\right) \end{cases}$

182. Resolver la ecuación: $(x+i)^4 - (x-i)^4 = 0$.

SOLUCIÓN: $x = 0 \;;\; x = 1 \;;\; x = -1$

183. Hallar dos complejos conjugados tales que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero, y su área valga $2\sqrt{3}$.

SOLUCIÓN: 1.ª $\begin{cases} \sqrt{6}+\sqrt{2}\,i \\ \sqrt{6}-\sqrt{2}\,i \end{cases}$; 2.ª $\begin{cases} -\sqrt{6}+i\sqrt{2} \\ -\sqrt{6}-i\sqrt{2} \end{cases}$

184. Calcular: $\sqrt{3+4\,i} + \sqrt{3-4\,i}$.

SOLUCIÓN: $4 \;;\; 2\,i \;;\; -2\,i \;;\; -4$

185. Dados dos números complejos $z_1 = 6 + 5\,i$; $z_2 = 1 + i$:

I. Representar en el plano complejo, los afijos de los complejos:

$$z_1 + z_2 \;;\; z_1 - z_2 \;;\; \frac{z_1}{z_2}$$

II. Obtener el complejo cuyo afijo es el centro de gravedad del triángulo formado por aquellos tres puntos.

III. Hallar las tres raíces cúbicas de z_2.

SOLUCIÓN I:

$z_1 + z_2 = 7 + 6\,i$

$z_1 - z_2 = 5 + 4\,i$

$z_1 : z_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,i$

SOLUCIÓN II: $\frac{35}{6} + \frac{19}{6}\,i$

SOLUCIÓN III:

$\sqrt[6]{2}_{15^\circ}$

$\sqrt[6]{2}_{135^\circ}$

$\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$

186. Siendo $a = \log \sqrt[3]{\left(\frac{1}{36}\right)^{-2}}$ en el sistema de base 6; b = valor que hace real la expresión $(3 + 4\,i) : (1 - b\,i)$; c = coeficiente del término central del desarrollo de $(x + y)^4$.

Calcular: $+\sqrt{\frac{a-b}{c}}$

SOLUCIÓN: $+\sqrt{\frac{a-b}{c}} = \frac{2}{3}$

187. Calcular: $(a + b\,i)(c + d\,i)$, siendo $a = \log_{\sqrt{2}} 0{,}5$; b = característica del logaritmo decimal de 0,0732; c = la fracción generatriz del número decimal periódico mixto 1,1666...; d = la probabilidad de que al lanzar tres monedas simultáneamente resulten las tres caras.

SOLUCIÓN: $(a + b\,i)(c + d\,i) = -\frac{25}{12} - \frac{31}{12}\,i$

188. Hallar la relación que tiene que existir entre los números complejos $m + n\,i$; $p + q\,i$ para que exista un número complejo distinto de cero $a + b\,i$, tal que sean reales el producto $(a + b\,i)(m + n\,i)$ y el cociente $(a + b\,i) : (p + q\,i)$.

SOLUCIÓN: $\frac{m}{p} = -\frac{n}{q}$

189. Siendo z_1 y z_2 dos complejos conjugados, de la forma: $z_1 = m(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$; $z_2 = m(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)$.

Calcular el valor totalmente simplificado de la expresión:

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2)(z_1^3 + z_2^3)\cdots(z_1^n + z_2^n)}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdots \cos n\alpha}$$

SOLUCIÓN: $2^n \cdot m^{\frac{(1+n)n}{2}}$

190. Efectuar la siguiente operacion y poner el resultado en forma trigonométrica:

$$\frac{8 + 8\,i\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

SOLUCIÓN: $\frac{8 + 8\,i\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = 16\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ)$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

Si $0° < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 1.^{er}$ cuadrante

$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow cos^2 \alpha = 1 - sen^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg\ \alpha = \sqrt{3}\ ;\ sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ ctg\ \alpha = \sqrt{3}\ ;}$ $\mathbf{sec\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ ;\ cosec\ \alpha = 2}$

2. RESOLUCIÓN

Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in 2.°$ cuadrante

$sen^2 \alpha = 1 - cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$ctg\ \alpha = -1\ ;\ sec\ \alpha = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ tg\ \alpha = -1\ ;\ ctg\ \alpha = -1}$ $\mathbf{sec\ \alpha = -\sqrt{2}\ ;\ cosec\ \alpha = \sqrt{2}}$

3. RESOLUCIÓN

Si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$$cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}\ ;\ cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \Rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = 2 \cdot \frac{-\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ \alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}\ ;\ cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$

4. RESOLUCIÓN

Si $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha \in 4.°$ cuadrante

$$tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$sen^2 \alpha = \frac{1}{1 + ctg^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\ ;$$

$$sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos^2 \alpha = 1 - sen^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\ ;\ cos\ \alpha = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ cos\ \alpha = \frac{1}{2}\ ;}$ $\mathbf{tg\ \alpha = -\sqrt{3}}$

5. RESOLUCIÓN

Si $0° < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 1.^{er}$ cuadrante

$$cos\ \alpha = \frac{1}{sec\ \alpha} = \frac{1}{3}$$

$$sen^2 \alpha = 1 - cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\ ;\ sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ;\ cos\ \alpha = \frac{1}{3}\ ;\ tg\ \alpha = 2\sqrt{2}}$

6. RESOLUCIÓN

Si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$$sen\ \alpha = \frac{1}{cosec\ \alpha} = \frac{1}{\frac{-3\sqrt{5}}{5}} = -\frac{5}{3\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{3 \cdot 5} =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$cos^2 \alpha = 1 - sen^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}\ ;\ cos\ \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}\ ;\ cos\ \alpha = -\frac{2}{3}\ ;}$ $\mathbf{ctg\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

7. RESOLUCIÓN

$sen\ 135° = sen\ (180° - 135°) = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = -cos\ (180° - 135°) = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° = -tg\ (180° - 135°) = -tg\ 45° = -1$

$ctg\ 135° = -ctg\ (180° - 135°) = -ctg\ 45° = -1$

$sec\ 135° = -sec\ (180° - 135°) = -sec\ 45° = -\sqrt{2}$

$cosec\ 135° = cosec\ (180° - 135°) = cosec\ 45° = \sqrt{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;}$ $\mathbf{tg\ 135° = -1\ ;\ ctg\ 135° = -1\ ;}$ $\mathbf{sec\ 135° = -\sqrt{2}\ ;\ cosec\ 135° = \sqrt{2}}$

8. RESOLUCIÓN

$sen\ 240° = -sen\ (240° - 180°) = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 240° = -cos\ (240° - 180°) = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 240° = tg\ (240° - 180°) = tg\ 60° = \sqrt{3}$

SOLUCIÓN: **sen 240° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos 240° = $-\frac{1}{2}$; tg 240° = $\sqrt{3}$**

9. RESOLUCIÓN

$sen\ 330° = -sen\ (360° - 330°) = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

$cos\ 330° = cos\ (360° - 330°) = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330° = -tg\ (360° - 330°) = -tg\ 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

SOLUCIÓN: **sen 330° = $-\frac{1}{2}$; cos 330° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg 330° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$**

10. RESOLUCIÓN

$sen\ (-240°) = -sen\ 240° = -(-sen\ 60°) = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ (-240°) = cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ (-240°) = -tg\ 240° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

SOLUCIÓN: **sen (−240°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos (−240°) = $-\frac{1}{2}$; tg (−240°) = $-\sqrt{3}$**

11. RESOLUCIÓN

$600° = 360° \cdot 1 + 240°$

$sen\ 600° = sen\ 240° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 600° = cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 600° = tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$600 \div 360$: cociente 1, resto 240

SOLUCIÓN: **sen 600° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos 600° = $-\frac{1}{2}$; tg 600° = $\sqrt{3}$**

12. RESOLUCIÓN

$930° = 360° \cdot 2 + 210°$

CÁLCULOS AUXILIARES

$930 \div 360$: cociente 2, resto 210

$sen\ 930° = sen\ 210° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

$cos\ 930° = cos\ 210° = -cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 930° = tg\ 210° = tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

SOLUCIÓN: **sen 930° = $-\frac{1}{2}$; cos 930° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg 930° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$**

13. RESOLUCIÓN

$1140° = 360° \cdot 3 + 60°$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1140 \div 360$: cociente 3, resto 60

$sen\ 1140° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 1140° = cos\ 60° = \frac{1}{2}$

$tg\ 1140° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

SOLUCIÓN: **sen 1140° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos 1140° = $\frac{1}{2}$; tg 1140° = $\sqrt{3}$**

14. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$1830 \div 360$: cociente 5, resto 30

$-1830° = -360° \cdot 5 - 30°$

$sen\ (-1830°) = sen\ (-30°) = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

$cos\ (-1830°) = cos\ (-30°) = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ (-1830°) = tg\ (-30°) = -tg\ 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

SOLUCIÓN: **sen (−1830°) = $-\frac{1}{2}$; cos (−1830°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg (−1830°) = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$**

15. RESOLUCIÓN

$sen\ 75° = sen\ (45° + 30°) = sen\ 45° \cdot cos\ 30° + cos\ 45° \cdot sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

$cos\ 75° = cos\ (45° + 30°) = cos\ 45° \cdot cos\ 30° - sen\ 45° \cdot sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

$$tg\ 75° = tg\ (45° + 30°) = \frac{tg\ 45° + tg\ 30°}{1 - tg\ 45° \cdot tg\ 30°} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: **sen 75° = $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$; cos 75° = $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; tg 75° = $2 + \sqrt{3}$**

16. RESOLUCIÓN

$sen\ 15° = sen\ (45° - 30°) = sen\ 45° \cdot cos\ 30° - cos\ 45° \cdot sen 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

$cos\ 15° = cos\ (45° - 30°) = cos\ 45° \cdot cos\ 30° + sen\ 45° \cdot sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

$$tg\ 15° = tg\ (45° - 30°) = \frac{tg\ 45° - tg\ 30°}{1 + tg\ 45° \cdot tg\ 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: **sen 15° = $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; cos 15° = $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$; tg 15° = $2 - \sqrt{3}$**

17. RESOLUCIÓN

$sen\ 105° = sen\ (60° + 45°) = sen\ 60° \cdot cos\ 45° + cos\ 60° \cdot sen\ 45° =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

$cos\ 105° = cos\ (60° + 45°) = cos\ 60° \cdot cos\ 45° - sen\ 60° \cdot sen\ 45° =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$

$$tg\ 105° = tg\ (60° + 45°) = \frac{tg\ 60° + tg\ 45°}{1 - tg\ 60° \cdot tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = -2 - \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}$; $\mathbf{cos\ 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})}$; $\mathbf{tg\ 105° = -2-\sqrt{3}}$

18. RESOLUCIÓN

$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cdot cos\,\beta + cos\,\alpha\cdot sen\,\beta$

$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cdot cos\,\beta - cos\,\alpha\cdot sen\,\beta$

Multiplicando ordenadamente dichas igualdades, se obtiene:

$sen(\alpha+\beta)\cdot sen(\alpha-\beta) = sen^2\alpha\cdot cos^2\beta - cos^2\alpha\cdot sen^2\beta =$

$= sen^2\alpha(1-sen^2\beta) - (1-sen^2\alpha)\cdot sen^2\beta =$

$= sen^2\alpha - sen^2\alpha\cdot sen^2\beta - sen^2\beta + sen^2\alpha\cdot sen^2\beta =$

$= sen^2\alpha - sen^2\beta$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen(\alpha+\beta)\cdot sen(\alpha-\beta) = sen^2\alpha - sen^2\beta}$

19. RESOLUCIÓN

$cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\cdot cos\,\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$

$cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\cdot cos\,\beta + sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$

Multiplicando ordenadamente dichas igualdades, se obtiene:

$cos(\alpha+\beta)\cdot cos(\alpha-\beta) = cos^2\alpha\cdot cos^2\beta - sen^2\alpha\cdot sen^2\beta =$

$= cos^2\alpha(1-sen^2\beta) - (1-cos^2\alpha)\cdot sen^2\beta =$

$= cos^2\alpha - cos^2\alpha\cdot sen^2\beta - sen^2\beta + cos^2\alpha\cdot sen^2\beta =$

$= cos^2\alpha - sen^2\beta$

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos(\alpha+\beta)\cdot cos(\alpha-\beta) = cos^2\alpha - sen^2\beta}$

20. RESOLUCIÓN

$sen(\alpha+\beta+\gamma) = sen[\alpha+(\beta+\gamma)] = sen\,\alpha\cdot cos(\beta+\gamma) +$
$+ cos\,\alpha\cdot sen(\beta+\gamma) = sen\,\alpha(cos\,\beta\cdot cos\,\gamma - sen\,\beta\cdot sen\,\gamma) +$
$+ cos\,\alpha(sen\,\beta\cdot cos\,\gamma + cos\,\beta\cdot sen\,\gamma) = sen\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot cos\,\gamma -$
$- sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot sen\,\gamma + cos\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot cos\,\gamma + cos\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot$
$\cdot sen\,\gamma = sen\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot cos\,\gamma + sen\,\beta\cdot cos\,\alpha\cdot cos\,\gamma + sen\,\gamma\cdot$
$\cdot cos\,\alpha\cdot cos\,\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot sen\,\gamma$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen(\alpha+\beta+\gamma) = sen\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma + sen\,\beta\,cos\,\alpha\,cos\,\gamma + sen\,\gamma\,cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot sen\,\gamma}$

21. RESOLUCIÓN

$cos(\alpha+\beta+\gamma) = cos[\alpha+(\beta+\gamma)] = cos\,\alpha\cdot cos(\beta+\gamma) -$
$- sen\,\alpha\cdot sen(\beta+\gamma) = cos\,\alpha(cos\,\beta\cdot cos\,\gamma - sen\,\beta\cdot sen\,\gamma) -$
$- sen\,\alpha(sen\,\beta\cdot cos\,\gamma + cos\,\beta\cdot sen\,\gamma) = cos\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot cos\,\gamma -$
$- cos\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot sen\,\gamma - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot cos\,\gamma -$
$- sen\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot sen\,\gamma = cos\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot cos\,\gamma -$
$- cos\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot sen\,\gamma - cos\,\beta\cdot sen\,\alpha\cdot sen\,\gamma -$
$- cos\,\gamma\cdot sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos(\alpha+\beta+\gamma) = cos\,\alpha\cdot cos\,\beta\cdot cos\,\gamma - cos\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot sen\,\gamma - cos\,\beta\cdot sen\,\alpha\cdot sen\,\gamma - cos\,\gamma\cdot sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}$

22. RESOLUCIÓN

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = tg[\alpha+(\beta+\gamma)] = \frac{tg\,\alpha + tg(\beta+\gamma)}{1 - tg\,\alpha\cdot tg(\beta+\gamma)} =$$

$$= \frac{tg\,\alpha + \dfrac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}}{1 - tg\,\alpha\cdot\dfrac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}} =$$

$$= \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma - tg\,\gamma\cdot tg\,\alpha}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta - tg\alpha\cdot tg\gamma - tg\beta\cdot tg\gamma}}$

23. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO

Si α, β, γ son los ángulos de un triángulo, se verifica:

$$tg\,\alpha = -tg(\beta+\gamma) = -\frac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}$$

$tg\,\alpha - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma = -tg\,\beta - tg\,\gamma$

$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma$

SEGUNDO MÉTODO

Si en la fórmula:

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta - tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}$$

hacemos $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, resulta: $tg(\alpha+\beta+\gamma) = 0$, luego:

$$\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta - tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma = 0$

$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}$

24. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO

Si $\alpha+\beta+\gamma = 90°$, entonces $tg\,\alpha = ctg(\beta+\gamma)$, luego:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{tg(\beta+\gamma)} = \frac{1}{\dfrac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}} = \frac{1 - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}{tg\,\beta + tg\,\gamma}$$

$tg\,\alpha\cdot tg\,\beta + tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma = 1 - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma$

$tg\,\alpha\cdot tg\,\beta + tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma + tg\,\beta\cdot tg\,\gamma = 1$

SEGUNDO MÉTODO

Si en la fórmula:

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta - tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}$$

hacemos $\alpha+\beta+\gamma = 90°$, resulta: $tg(\alpha+\beta+\gamma) = \infty$, luego:

$$\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta - tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma} = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta - tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma - tg\,\beta\cdot tg\,\gamma = 0$

$tg\,\alpha\cdot tg\,\beta + tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma + tg\,\beta\cdot tg\,\gamma = 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg\,\alpha\cdot tg\,\beta + tg\,\alpha\cdot tg\,\gamma + tg\,\beta\cdot tg\,\gamma = 1}$

25. RESOLUCIÓN

$sen\,3\alpha = sen(2\alpha+\alpha) = sen\,2\alpha\cdot cos\,\alpha + cos\,2\alpha\cdot sen\,\alpha =$

$= 2\,sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha\cdot cos\,\alpha + (cos^2\alpha - sen^2\alpha)\,sen\,\alpha =$

$= 2\,sen\,\alpha\cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha\cdot sen\,\alpha - sen^3\alpha =$

$= 3\,sen\,\alpha\cdot cos^2\alpha - sen^3\alpha = 3\,sen\,\alpha(1-sen^2\alpha) - sen^3\alpha =$

$= 3\,sen\,\alpha - 3\,sen^3\alpha - sen^3\alpha = 3\,sen\,\alpha - 4\,sen^3\alpha$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,3\alpha = 3\,sen\,\alpha - 4\,sen^3\alpha}$

26. RESOLUCIÓN

$cos\,3\alpha = cos(2\alpha+\alpha) = cos\,2\alpha\cdot cos\,\alpha - sen\,2\alpha\cdot sen\,\alpha =$

$= (cos^2\alpha - sen^2\alpha)\,cos\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha\cdot sen\,\alpha =$

$= cos^3\alpha - sen^2\alpha\cdot cos\,\alpha - 2\,sen^2\alpha\cdot cos\,\alpha =$

$= cos^3\alpha - (1-cos^2\alpha)\,cos\,\alpha - 2(1-cos^2\alpha)\,cos\,\alpha =$

$= cos^3\alpha - cos\,\alpha + cos^3\alpha - 2\,cos\,\alpha + 2\,cos^3\alpha =$

$= 4\,cos^3\alpha - 3\,cos\,\alpha$

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos\,3\alpha = 4\,cos^3\alpha - 3\,cos\,\alpha}$

27. RESOLUCIÓN

$$tg\,3\alpha = tg(2\alpha+\alpha) = \frac{tg\,2\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha\cdot tg\,\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} + tg\,\alpha}{1 - \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} \cdot tg\,\alpha} = \frac{2\,tg\,\alpha + tg\,\alpha - tg^3\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha - 2\,tg^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{3\,tg\,\alpha - tg^3\,\alpha}{1 - 3\,tg^2\,\alpha}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{tg\,3\,\alpha = \frac{3\,tg\,\alpha - tg^3\,\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}}$

28. RESOLUCIÓN

$$sen\,15° = \sqrt{\frac{1 - cos\,30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$cos\,15° = \sqrt{\frac{1 + cos\,30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$tg\,15° = \frac{sen\,15°}{cos\,15°} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3}} =$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen\,15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}$; $\boldsymbol{cos\,15° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$; $\boldsymbol{tg\,15° = 2 - \sqrt{3}}$

29. RESOLUCIÓN

$$\frac{sen\,60° + sen\,30°}{sen\,60° - sen\,30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{sen\,60° + sen\,30°}{sen\,60° - sen\,30°} = 2 + \sqrt{3}}$

30. RESOLUCIÓN

$$\frac{tg\,120° - tg\,45°}{ctg\,90° + cos\,360°} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{0 + 1} = -\sqrt{3} - 1$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{tg\,120° - tg\,45°}{ctg\,90° + cos\,360°} = -\sqrt{3} - 1}$

31. RESOLUCIÓN

$$\frac{sen\,\alpha + sen\,2\,\alpha}{1 + cos\,\alpha + cos\,2\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{cos\,\alpha + 2\,cos^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{sen\,\alpha\,(1 + 2\,cos\,\alpha)}{cos\,\alpha\,(1 + 2\,cos\,\alpha)} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{sen\,\alpha + sen\,2\,\alpha}{1 + cos\,\alpha + cos\,2\,\alpha} = tg\,\alpha}$

32. RESOLUCIÓN

$$sen\,\alpha + sen\,3\,\alpha = 2\,sen\,\frac{\alpha + 3\,\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha - 3\,\alpha}{2} =$$

$$= 2\,sen\,2\,\alpha \cdot cos\,(-\alpha) = 2\,sen\,2\,\alpha \cdot cos\,\alpha$$

$$cos\,\alpha - cos\,3\,\alpha = -2\,sen\,\frac{\alpha + 3\,\alpha}{2}\,sen\,\frac{\alpha - 3\,\alpha}{2} =$$

$$= -2\,sen\,2\,\alpha \cdot sen\,(-\alpha) = 2\,sen\,2\,\alpha \cdot sen\,\alpha$$

luego:

$$\frac{sen\,\alpha + sen\,3\,\alpha}{cos\,\alpha - cos\,3\,\alpha} = \frac{2\,sen\,2\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{2\,sen\,2\,\alpha \cdot sen\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = ctg\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{sen\,\alpha + sen\,3\,\alpha}{cos\,\alpha + cos\,3\,\alpha} = ctg\,\alpha}$

33. RESOLUCIÓN

$$\frac{cos\,(\alpha + \beta) - cos\,(\alpha - \beta)}{sen\,(\alpha + \beta) + sen\,(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{-2\,sen\,\frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2}\,sen\,\frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2}}{2\,sen\,\frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2}} =$$

$$= -\frac{sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}{sen\,\alpha \cdot cos\,\beta} = -\frac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = -tg\,\beta$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{cos\,(\alpha + \beta) - cos\,(\alpha - \beta)}{sen\,(\alpha + \beta) + sen\,(\alpha - \beta)} = -tg\,\beta}$

34. RESOLUCIÓN

$$sen\,(\alpha + 45°) = sen\,\alpha \cdot cos\,45° + cos\,\alpha \cdot sen\,45° =$$

$$= sen\,\alpha\,\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\,\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(cos\,\alpha + sen\,\alpha)}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen\,(\alpha + 45°) = \frac{\sqrt{2}\,(cos\,\alpha + sen\,\alpha)}{2}}$

35. RESOLUCIÓN

$$tg\,(45° + \alpha) = \frac{tg\,45° + tg\,\alpha}{1 - tg\,45° \cdot tg\,\alpha} = \frac{1 + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha}$$

$$tg\,(45° - \alpha) = \frac{tg\,45° - tg\,\alpha}{1 + tg\,45° \cdot tg\,\alpha} = \frac{1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha}$$

Restando ordenadamente, se tiene:

$$tg\,(45° + \alpha) - tg\,(45° - \alpha) = \frac{1 + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha} - \frac{1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha} =$$

$$= \frac{(1 + tg\,\alpha)^2 - (1 - tg\,\alpha)^2}{1 - tg^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2\,tg\,\alpha + tg^2\,\alpha - 1 + 2\,tg\,\alpha - tg^2\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} = \frac{2 \cdot 2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} =$$

$$= 2 \cdot tg\,2\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{tg\,(45° + \alpha) - tg\,(45° - \alpha) = 2\,tg\,2\,\alpha}$

36. RESOLUCIÓN

$$tg\,\alpha \cdot tg\,(60° + \alpha) \cdot tg\,(60° - \alpha) = tg\,\alpha\,\frac{tg\,60° + tg\,\alpha}{1 - tg\,60° \cdot tg\,\alpha} \cdot$$

$$\cdot \frac{tg\,60° - tg\,\alpha}{1 + tg\,60° \cdot tg\,\alpha} = tg\,\alpha\,\frac{tg^2\,60° - tg^2\,\alpha}{1 - tg^2\,60° \cdot tg^2\,\alpha} =$$

$$= tg\,\alpha\,\frac{(\sqrt{3})^2 - tg^2\,\alpha}{1 - (\sqrt{3})^2 \cdot tg^2\,\alpha} = tg\,\alpha\,\frac{3 - tg^2\,\alpha}{1 - 3\,tg^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{3\,tg\,\alpha - tg^3\,\alpha}{1 - 3\,tg^2\,\alpha} = tg\,3\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{tg\,\alpha \cdot tg\,(60° + \alpha) \cdot tg\,(60° - \alpha) = tg\,3\,\alpha}$

37. RESOLUCIÓN

$$tg\,3\alpha = tg\,(2\alpha + \alpha) = \frac{tg\,2\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha}$$

$$tg\,3\alpha - tg\,2\alpha - tg\,\alpha = \frac{tg\,2\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha} - tg\,2\alpha - tg\,\alpha =$$

$$= (tg\,2\alpha + tg\,\alpha)\ \frac{1}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha} - (tg\,2\alpha + tg\,\alpha) =$$

$$= (tg\,2\alpha + tg\,\alpha)\left(\frac{1}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha} - 1\right) =$$

$$= (tg\,2\alpha + tg\,\alpha)\ \frac{1 - 1 + tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha} =$$

$$= (tg\,2\alpha + tg\,\alpha)\ \frac{tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha} = \frac{tg\,2\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha}\ \cdot$$

$$\cdot\ tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha = tg\,3\alpha \cdot tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg\,3\alpha - tg\,2\alpha - tg\,\alpha = tg\,3\alpha \cdot tg\,2\alpha \cdot tg\,\alpha}$

38. RESOLUCIÓN

$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$
$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$

Multiplicando ordenadamente, se tiene:

$sen\,(\alpha + \beta) \cdot cos\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot cos^2\beta +$
$+ cos^2\alpha \cdot sen\,\beta \cdot cos\,\beta + sen^2\alpha \cdot sen\,\beta \cdot cos\,\beta +$
$+ sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot sen^2\beta$

$2\,sen\,(\alpha + \beta) \cdot cos\,(\alpha - \beta) = 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot cos^2\beta +$
$+ 2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta \cdot cos^2\alpha + 2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta \cdot sen^2\alpha +$
$+ 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot sen^2\beta = sen\,2\alpha \cdot cos^2\beta + sen\,2\beta \cdot cos^2\alpha +$
$+ sen\,2\beta \cdot sen^2\alpha + sen\,2\alpha \cdot sen^2\beta =$
$= sen\,2\alpha\,(sen^2\beta + cos^2\beta) + sen\,2\beta\,(sen^2\alpha + cos^2\alpha) =$
$= sen\,2\alpha + sen\,2\beta$

luego:

$$sen\,(\alpha + \beta) \cdot cos\,(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\,(sen\,2\alpha + sen\,2\beta)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,(\alpha + \beta) \cdot cos\,(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\,(sen\,2\alpha + sen\,2\beta)}$

39. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha + sen\,\alpha &= p \\ tg\,\alpha - sen\,\alpha &= q \end{aligned}\right\} \Rightarrow (tg\,\alpha + sen\,\alpha)\,(tg\,\alpha - sen\,\alpha) = p \cdot q$$

$$tg^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} - sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha\,(1 - cos^2\alpha)}{cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{sen^2\alpha \cdot sen^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha \cdot sen^2\alpha = p \cdot q \Rightarrow tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha = \sqrt{p \cdot q}$$

$$\left.\begin{aligned} (tg\,\alpha + sen\,\alpha)^2 &= p^2 \\ (tg\,\alpha - sen\,\alpha)^2 &= q^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p^2 - q^2 = tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha +$$

$$+ sen^2\alpha - tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha - sen^2\alpha = 4\,tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha =$$
$$= 4\sqrt{p \cdot q}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p^2 - q^2 = 4\sqrt{p \cdot q}}$

40. RESOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}\ ;\ 1 + tg^2\,2\alpha = \frac{1}{cos^2\,2\alpha}\ ;\ \cdots$$

$$\cdots\ ;\ 1 + tg^2\,n\,\alpha = \frac{1}{cos^2\,n\,\alpha}$$

$1 + cos\,2\alpha = 2\,cos^2\alpha\ ;\ 1 + cos\,4\alpha = 2\,cos^2\,2\alpha\ ;\ \cdots$
$\cdots\ ;\ 1 + cos\,2\,n\,\alpha = 2\,cos^2\,n\,\alpha$

resulta:

$(1 + tg^2\alpha)\,(1 + tg^2\,2\alpha) \cdots (1 + tg^2\,n\,\alpha)\ \cdot$
$\cdot\ (1 + cos\,2\alpha)\,(1 + cos\,4\alpha) \cdots (1 + cos\,2\,n\,\alpha) =$

$$= \frac{1}{\cancel{cos^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\cancel{cos^2\,2\alpha}} \cdots \frac{1}{\cancel{cos^2\,n\,\alpha}} \cdot 2\,\cancel{cos^2\alpha} \cdot 2\,\cancel{cos^2\,2\alpha} \cdots$$

$$\cdots 2\,\cancel{cos^2\,n\,\alpha} = 2 \cdot 2 \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot 2 = 2^n$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{(1 + tg^2\alpha)\,(1 + tg^2\,2\alpha) \ldots (1 + tg^2\,n\,\alpha)\ \cdot}$
$\mathbf{\cdot\ (1 + cos\,2\alpha)\,(1 + cos\,4\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots}$
$\mathbf{\ldots (1 + cos\,2\,n\,\alpha) = 2^n}$

41. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{tg\,\frac{\alpha}{2}}{sen\,\alpha} - 2\,sen^2\frac{\alpha}{2}\right) cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}}{\sqrt{1 - cos^2\alpha}} - (1 - cos\,\alpha)\right) \cdot \frac{1 + cos\,\alpha}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{1 + cos\,\alpha} - (1 - cos\,\alpha)\right) \cdot \frac{1 + cos\,\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1 - (1 - cos^2\alpha)}{1 + cos\,\alpha} \cdot \frac{1 + cos\,\alpha}{2} = \frac{cos^2\alpha}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\left(\frac{tg\,\frac{\alpha}{2}}{sen\,\alpha} - sen^2\frac{\alpha}{2}\right) cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{cos^2\alpha}{2}}$

42. RESOLUCIÓN

$$\frac{sen\,2\beta}{tg\,(\alpha - \beta)} = \frac{2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta}{\frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}} =$$

$$= \frac{2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta\,(1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta)}{tg\,\alpha - tg\,\beta} =$$

$$= \frac{2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta\,(1 + \frac{3}{2}\,tg^2\beta)}{\frac{1}{2}\,tg\,\beta} =$$

$$= \frac{2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta\,(2 + 3\,tg^2\beta)}{tg\,\beta} =$$

$$= \frac{2\,sen\,\beta \cdot cos\,\beta\left(\frac{2\,cos^2\beta + 3\,sen^2\beta}{cos^2\beta}\right)}{\frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}} =$$

$= 4\,cos^2\beta + 6\,sen^2\beta = 4\,(1 - sen^2\beta) + 6\,sen^2\beta = 4 + 2\,sen^2\beta$

luego:

$$\frac{sen\,2\beta}{tg\,(\alpha - \beta)} + cos\,2\beta = 4 + 2\,sen^2\beta + cos^2\beta - sen^2\beta =$$

$= 4 + 2\,sen^2\beta + (1 - sen^2\beta) - sen^2\beta =$
$= 4 + 2\,sen^2\beta + 1 - 2\,sen^2\beta = 5$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{sen\,2\beta}{tg\,(\alpha - \beta)} + cos\,2\beta = 5}$

43. RESOLUCIÓN

$$sen\,75^\circ + sen\,15^\circ = 2\,sen\,\frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot cos\,\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$$

$$= 2\,sen\,45^\circ \cdot cos\,30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\,75^\circ + sen\,15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

44. RESOLUCIÓN

$$sen\ 75° - sen\ 15° = 2\cos\frac{75° + 15°}{2}\cdot sen\frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2\cos 45°\cdot sen\ 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen\ 75° - sen\ 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

45. RESOLUCIÓN

$$\cos 75° + \cos 15° = 2\cos\frac{75° + 15°}{2}\cdot\cos\frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2\cos 45°\cdot\cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\cos 75° + \cos 15° = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

46. RESOLUCIÓN

$$\cos 75° - \cos 15° = -2\,sen\frac{75° + 15°}{2}\cdot sen\frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= -2\,sen\ 45°\cdot sen\ 30° = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\cos 75° - \cos 15° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

47. RESOLUCIÓN

$$\frac{ctg\ \alpha + tg\ \alpha}{ctg\ \alpha - tg\ \alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha} + \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha} - \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{sen\ \alpha\cdot\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{sen\ \alpha\cdot\cos\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = sec\ 2\alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{ctg\ \alpha + tg\ \alpha}{ctg\ \alpha - tg\ \alpha} = sec\ 2\alpha}$

48. RESOLUCIÓN

$$tg\ 2\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30° \\ 2\alpha = 240° \Rightarrow \alpha = 120° \end{cases}$$

$$tg\ \alpha = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ tg\ \alpha = tg\ 120° = -\ tg\ 60° = -\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ tg\ \alpha = -\sqrt{3}}$

49. RESOLUCIÓN

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{1}\ ;\ \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{9+1}{1} = 10 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 10 \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{10}$$

luego:

$$cosec\ (90° - \alpha) = \frac{1}{sen\ (90° - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{10}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{cosec\ (90° - \alpha) = \sqrt{10}}$

50. RESOLUCIÓN

$$sen\ \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°\ ;\ luego:\ 5\alpha = 5\cdot 30° = 150°$$

$$sen\ 30° = sen\ 150° = sen\ 5\alpha = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen\ 5\alpha = \frac{1}{2}}$

51. RESOLUCIÓN

$$tg\ \alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{3}{4}$$

$$sen^2\alpha = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16}{25} \Rightarrow sen\ \alpha = \pm\frac{4}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen\ \alpha = \pm\frac{4}{5}}$

52. RESOLUCIÓN

$$sen^2 3\alpha - sen^2\alpha = (sen\ 3\alpha + sen\ \alpha)\ (sen\ 3\alpha - sen\ \alpha) =$$

$$= 2\,sen\frac{3\alpha + \alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha - \alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{3\alpha + \alpha}{2}\cdot sen\frac{3\alpha - \alpha}{2} =$$

$$= 2\,sen\ 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\cos 2\alpha\cdot sen\ \alpha =$$
$$= 2\,sen\ 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot 2\,sen\ \alpha\cdot\cos\alpha = sen\ 4\alpha\cdot sen\ 2\alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen^2 3\alpha - sen^2\alpha = sen\ 4\alpha\cdot sen\ 2\alpha}$

53. RESOLUCIÓN

$$sen\ 4\alpha = 2\,sen\ 2\alpha\cdot\cos 2\alpha =$$
$$= 2\cdot 2\,sen\ \alpha\cdot\cos\alpha\ (\cos^2\alpha - sen^2\alpha) =$$
$$= 4\,sen\ \alpha\cdot\cos\alpha\ (\cos^2\alpha - sen^2\alpha)$$

Como:

$$sen\ \alpha = \frac{tg\ \alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

luego:

$$sen\ 4\alpha = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{sen\ 4\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

54. RESOLUCIÓN

$$\left(sen\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = sen^2\frac{\alpha}{2} - 2\,sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} +$$

$$+\cos^2\frac{\alpha}{2} = \underbrace{sen^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}_{1} - \underbrace{2\,sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}_{sen\ \alpha} = 1 - sen\ \alpha$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{1 - sen\ \alpha = \left(sen\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$

55. RESOLUCIÓN

$$sen\ 3\alpha + sen\ 5\alpha = 2\,sen\frac{3\alpha + 5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha - 5\alpha}{2} =$$

$$= 2\,sen\ 4\alpha\cdot\cos(-\alpha) = 2\,sen\ 4\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$sen\ \alpha + sen\ 3\alpha = 2\,sen\frac{\alpha + 3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - 3\alpha}{2} =$$

$$= 2\,sen\ 2\alpha\cdot\cos(-\alpha) = 2\,sen\ 2\alpha\cdot\cos\alpha$$

luego:

$$\frac{sen\ 3\alpha + sen\ 5\alpha}{sen\ \alpha + sen\ 3\alpha} = \frac{2\,sen\ 4\alpha\cdot\cos\alpha}{2\,sen\ 2\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{sen\ 4\alpha}{sen\ 2\alpha} =$$

$= \dfrac{2 \text{ sen } 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\text{sen } 2\alpha} = 2 \cos 2\alpha$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{\textbf{sen } 3\alpha + \textbf{sen } 5\alpha}{\textbf{sen } \alpha + \textbf{sen } 3\alpha} = \mathbf{2 \cos 2}\alpha}$

56. RESOLUCIÓN

$2 \text{ sen } x = -1 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210° + 2k\pi \\ x = 330° + 2k\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 210° + 2k\pi \; ; \; x = 330° + 2k\pi}}$

57. RESOLUCIÓN

$\text{sen } x = \cos 2x \Rightarrow \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \text{sen } x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$

$\text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + 2k\pi \; ; \; x = 150° + 2k\pi$

$\text{sen } x = -1 \Rightarrow x = 270° + 2k\pi$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 30° + 2k\pi \; ; \; x = 150° + 2k\pi \; ; \; x = 270° + 2k\pi}}$

58. RESOLUCIÓN

$3 \text{ sen } x - 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 3 \text{ sen } x - 2(1 - \text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x + 3 \text{ sen } x - 2 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \cancel{-2} \end{cases}$

$\text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 2k\pi \\ x = 150° + 2k\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 30° + 2k\pi \; ; \; x = 150° + 2k\pi}}$

59. RESOLUCIÓN

$\cos 2x + \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + 2k\pi \\ x = 180° + 2k\pi \end{cases} \\ 2 \text{ sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 2k\pi \\ x = 150° + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 0° + 2k\pi} \\ \mathbf{x = 180° + 2k\pi} \end{cases} ; \begin{cases} \mathbf{x = 30° + 2k\pi} \\ \mathbf{x = 150° + 2k\pi} \end{cases}}$

60. RESOLUCIÓN

$\text{tg } 3x = 1 \Rightarrow 3x = 45° + k\pi \Rightarrow x = 15° + \dfrac{\pi}{3} k = 15° + 60° k$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 15° + 60° k}}$

61. RESOLUCIÓN

$\cos 4x + \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2 \cos \dfrac{4x + 2x}{2} \cdot \cos \dfrac{4x - 2x}{2} =$
$= \cos x \Rightarrow 2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x (2 \cos 3x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 360° k \pm 90° \\ 2 \cos 3x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = 360° k \pm 60 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 120° k \pm 20° \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 360° k \pm 90° \; ; \; x = 120° k \pm 20°}}$

62. RESOLUCIÓN

$\cos^2 x + \text{sen } x \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x + \text{sen } x \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } x (\cos x - \text{sen } x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + 2k\pi \\ x = 180° + 2k\pi \end{cases} \\ \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = 45° + k\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 180° k \; ; \; x = 45° + 180° k}}$

63. RESOLUCIÓN

$4 \text{ sen } x = \text{cosec } x \Rightarrow 4 \text{ sen } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} \Rightarrow 4 \text{ sen}^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 2k\pi \\ x = 150° + 2k\pi \end{cases} \\ \text{sen } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210° + 2k\pi \\ x = 330° + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 30° + 2k\pi} \\ \mathbf{x = 150° + 2k\pi} \end{cases} ; \begin{cases} \mathbf{x = 210° + 2k\pi} \\ \mathbf{x = 330° + 2k\pi} \end{cases}}$

64. RESOLUCIÓN

$\text{tg } x = \text{sen } 2x \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = 2 \text{ sen } x \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + 2k\pi \\ x = 180° + 2k\pi \end{cases} \\ 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm 45° \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = 0° + 2k\pi} \\ \mathbf{x = 180° + 2k\pi} \end{cases} ; \mathbf{x = 2k\pi \pm 45°}}$

65. RESOLUCIÓN

$4 \text{ sen } \dfrac{x}{2} + 2 \cos x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \text{ sen } \dfrac{x}{2} + 2\left(\cos^2 \dfrac{x}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}\right) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \text{ sen } \dfrac{x}{2} + 2\left(1 - \text{sen}^2 \dfrac{x}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}\right) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \text{ sen } \dfrac{x}{2} + 2\left(1 - 2 \text{ sen}^2 \dfrac{x}{2}\right) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \text{ sen}^2 \dfrac{x}{2} - 4 \text{ sen } \dfrac{x}{2} + 1 = 0$

$\text{sen } \dfrac{x}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 30° + 360° k \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 60° + 720 k \\ \frac{x}{2} = 150° + 360° k \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 300° + 720 k \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 60° + 720 k \; ; \; x = 300° + 720 k}}$

66. RESOLUCIÓN

$3\,tg\,x - 2\cos x = 0 \Rightarrow \dfrac{3\,sen\,x}{\cos x} - 2\cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\,sen\,x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 3\,sen\,x - 2(1 - sen^2 x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,sen^2 x + 3\,sen\,x - 2 = 0$

$$sen\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \cancel{-2} \end{cases}$$

$$sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 2k\pi \\ x = 150° + 2k\pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 30° + 2k\pi \;;\; x = 150° + 2k\pi}}$

67. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - sen^2 x}{\cos^2 x + sen^2 x} = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

$tg\,x + \cos 2x = 1$

$tg\,x + \dfrac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = 1$

$tg\,x + tg^3 x + 1 - tg^2 x = 1 + tg^2 x$

$tg^3 x - 2\,tg^2 x + tg\,x = 0 \Rightarrow tg\,x\,(tg^2 x - 2\,tg\,x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg\,x = 0 \Rightarrow x = 0° + k\pi \\ tg^2 x - 2\,tg\,x + 1 = 0 \Rightarrow tg\,x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 45° + k\pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 0° + k\pi \;;\; x = 45° + k\pi}}$

68. RESOLUCIÓN

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{tg\,x - 2}{tg\,x + 2} \Rightarrow tg\,\frac{x}{2} = \frac{\dfrac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\,\frac{x}{2}} - 2}{\dfrac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\,\frac{x}{2}} + 2}$$

$$= \frac{2\,tg\,\frac{x}{2} - 2 + 2\,tg^2\,\frac{x}{2}}{2\,tg\,\frac{x}{2} + 2 - 2\,tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{tg\,\frac{x}{2} + tg^2\,\frac{x}{2} - 1}{tg\,\frac{x}{2} - tg^2\,\frac{x}{2} + 1}$$

luego:

$$tg^2\,\frac{x}{2} - tg^3\,\frac{x}{2} + tg\,\frac{x}{2} = tg\,\frac{x}{2} + tg^2\,\frac{x}{2} - 1$$

$$tg^3\,\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow tg\,\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 45° + k\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 90° + 2k\pi$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 90° + 2k\pi}}$

69. RESOLUCIÓN

$\dfrac{2\,tg\,x}{1 + tg^2 x} = \cos x \Rightarrow 2\,sen\,x\cos x = \cos x$

$\cos x\,(2\,sen\,x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 360°k \pm 90° \\ 2\,sen\,x = 1 \Rightarrow sen\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 2k\pi \\ x = 150° + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{2\,tg\,x}{1 + tg^2 x} = \frac{2\,\dfrac{sen\,x}{\cos x}}{1 + \dfrac{sen^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\,\dfrac{sen\,x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}} = 2\,sen\,x\cos x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 360°k \pm 90° \;;\; x = 30° + 2k\pi \;;\; x = 150° + 2k\pi}}$

70. RESOLUCIÓN

$sen^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x - sen^2 x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm 120° \Rightarrow x = k\pi \pm 60°$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = k\pi \pm 60°}}$

71. RESOLUCIÓN

$\dfrac{1}{2}\,ctg\,x = \cos x \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos x}{sen\,x} = \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 2\,sen\,x\cos x \Rightarrow \cos x\,(2\,sen\,x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 360°k \pm 90° \\ 2\,sen\,x = 1 \Rightarrow sen\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 2k\pi \\ x = 150° + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 360°k \pm 90° \;;\; x = 30° + 2k\pi \;;\; x = 150° + 2k\pi}}$

72. RESOLUCIÓN

$cosec\,x - ctg\,x = \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{1}{sen\,x} - \dfrac{\cos x}{sen\,x} = \sqrt{3}$

$$\left(\frac{1}{sen\,x} - \frac{\cos x}{sen\,x}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{1}{sen^2 x} + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} - \frac{2\cos x}{sen^2 x} = 3$$

$1 + \cos^2 x - 2\cos x = 3\,sen^2 x$

$1 + \cos^2 x - 2\cos x = 3(1 - \cos^2 x)$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0° + 2k\pi$. No satisface

$\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 120° + 2k\pi\;;\; x = 240° + 2k\pi$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 120° + 2k\pi \;;\; x = 240° + 2k\pi}}$

73. RESOLUCIÓN

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4$$

$$\frac{tg\,\frac{\pi}{4} + tg\,x}{1 - tg\,\frac{\pi}{4} \cdot tg\,x} + \frac{tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,x}{1 + tg\,\frac{\pi}{4} \cdot tg\,x} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + tg\,x}{1 - tg\,x} + \frac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x} = 4 \Rightarrow \frac{(1 + tg\,x)^2 + (1 - tg\,x)^2}{1 - tg^2 x} =$$

$$= 4 \Rightarrow \frac{2\,tg^2 x + 2}{1 - tg^2 x} = 4 \Rightarrow 2\,tg^2 x + 2 = 4 - 4\,tg^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\,tg^2 x = 2 \Rightarrow tg^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow tg\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = k\pi \pm 30°$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = k\pi \pm 30°}}$

74. RESOLUCIÓN

$sec\,x = sen\,x + \cos x \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = sen\,x + \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = sen\,x \cdot \cos x + \cos^2 x \Rightarrow 1 = sen\,x \cdot \cos x + 1 - sen^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow sen^2 x - sen\,x \cdot cos\,x = 0 \Rightarrow sen\,x\,(sen\,x - cos\,x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0° + 2\,k\,\pi \\ x = 180° + 2\,k\,\pi \end{array} \right. \\ sen\,x - cos\,x = 0 \Rightarrow tg\,x = 1 \Rightarrow x = 45° + k\,\pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **$x = 0° + 2\,k\,\pi$; $x = 180° + 2\,k\,\pi$; $x = 45° + k\,\pi$**

75. RESOLUCIÓN

$sen\,2\,x = (1{,}5 + sen\,x)\,sen\,x \cdot cos\,x$

$2\,sen\,x \cdot cos\,x = (1{,}5 + sen\,x)\,sen\,x \cdot cos\,x$

$2\,sen\,x \cdot cos\,x - (1{,}5 + sen\,x)\,sen\,x \cdot cos\,x = 0$

$sen\,x \cdot cos\,x\,[2 - (1{,}5 + sen\,x)] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} sen\,x \cdot cos\,x = 0 \Rightarrow tg\,x = 0 \\ 2 - (1{,}5 + sen\,x) = 0 \Rightarrow sen\,x = 0{,}5 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$cos^2 x = 1 - sen^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$tg^2 x = \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \Rightarrow tg\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

SOLUCIÓN: **$tg\,x = 0$; $tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$**

76. RESOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{r} sen\,(x + y) = 1 \\ sen\,(x - y) = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + y = 90° + 2\,k\,\pi \\ x - y = 30° + 2\,k\,\pi \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 90° \\ x - y = 30° \end{array} \right| \Rightarrow x = 60° \; ; \; y = 30°$$

SOLUCIÓN: **$x = 60°$; $y = 30°$**

77. RESOLUCIÓN

Sumando y restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\left. \begin{array}{r} sen\,x \cdot cos\,y + sen\,y \cdot cos\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\,x \cdot cos\,y - sen\,y \cdot cos\,x = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} sen\,(x + y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\,(x - y) = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x + y = 60° + 2\,k\,\pi \\ x - y = 30° + 2\,k\,\pi \end{array}$$

Las soluciones en $[0, \pi/2]$ *son:*

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60° \\ x - y = 30° \end{array} \right| \Rightarrow x = 45° \; ; \; y = 15°$$

SOLUCIÓN: **$x = 45°$; $y = 15°$**

78. RESOLUCIÓN

Sumando y restando ambas ecuaciones se obtiene:

$2\,sen\,x = 2 \Rightarrow sen\,x = 1 \Rightarrow x = 90° + 2\,k\,\pi$

$2\,sen\,y = 0 \Rightarrow sen\,y = 0 \Rightarrow y = 180°\,k$

Las soluciones en $[0, 2\,\pi]$ *son:*

$\begin{array}{l} x = 90° \\ y = 0° \end{array}$; $\begin{array}{l} x = 90° \\ y = 180° \end{array}$; $\begin{array}{l} x = 90° \\ y = 360° \end{array}$

SOLUCIÓN: **1.ª $x = 90°$, $y = 0°$ 2.ª $x = 90°$, $y = 180°$ 3.ª $x = 90°$, $y = 360°$**

79. RESOLUCIÓN

Sumando ambas ecuaciones resulta:

$$2\,y + \underbrace{sen^2 x + cos^2 x}_{1} = 3 \Rightarrow 2\,y + 1 = 3 \Rightarrow y = 1$$

Sustituyendo este valor de $y = 1$ *en la 1.ª ecuación del sistema resulta:*

$1 + sen^2 x = 2 \Rightarrow sen^2 x = 1 \Rightarrow sen\,x = \pm 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 90° + 2\,k\,\pi \\ x = 270° + 2\,k\,\pi \end{array} \right.$$

SOLUCIÓN: **$x = 90° + 2\,k\,\pi$; $y = 1$**
$x = 270° + 2\,k\,\pi$; $y = 1$

80. RESOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{r} cos\,x \cdot cos\,y - sen\,x \cdot sen\,y = 0 \\ x - y = 30° \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} cos\,(x + y) = 0 \\ x - y = 30° \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x + y = 90° \\ x - y = 30° \end{array} \right| \Rightarrow x = 60° \; ; \; y = 30° \\ \left. \begin{array}{l} x + y = 270° \\ x - y = 30° \end{array} \right| \Rightarrow x = 150° \; ; \; y = 120° \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **1.ª $x = 60°$, $y = 30°$ 2.ª $x = 150°$, $y = 120°$**

81. RESOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{r} 4\,sen\,x \cdot cos\,y = \sqrt{6} \\ x + y = 105° \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 2\,sen\,x \cdot cos\,y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x + y = 105° \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} sen\,(x + y) + sen\,(x - y) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x + y = 105° \end{array} \right\}$$

Sustituyendo $x + y = 105°$ *en la 1.ª ecuación se tiene:*

$$sen\,105° + sen\,(x - y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow sen\,(x - y) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} - sen\,105° = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow x - y = 15°$$

luego:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 105° \\ x - y = 15° \end{array} \right| \Rightarrow x = 60° \; ; \; y = 45°$$

SOLUCIÓN: **$x = 60°$; $y = 45°$**

82. RESOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{r} tg\,(x + y) = \sqrt{3} \\ tg\,(x - y) = 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 60° + k\,\pi \\ x - y = 45° + k\,\pi \end{array} \right|$$

Las soluciones en $[0, \pi/2]$ *son:*

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60° \\ x - y = 45° \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} 2\,x = 105° \Rightarrow x = 52°30' \\ 2\,y = 15° \Rightarrow y = 7°30' \end{array}$$

SOLUCIÓN: **$x = 52°30'$; $y = 7°30'$**

83. RESOLUCIÓN

Sumando y restando ambas ecuaciones se obtiene:

$2\,sen^2 x = 2 \Rightarrow sen^2 x = 1 \Rightarrow sen\,x = \pm 1 \Rightarrow x = 90° + 180°\,k$

$$2\,cos^2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow cos^2 y = \frac{1}{4} \Rightarrow cos\,y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = \pm 60° \pm 180°\,k$

SOLUCIÓN: **$x = 90° + 180°\,k$; $y = \pm 60° \pm 180°\,k$**

84. RESOLUCIÓN

Dividiendo ambas ecuaciones resulta:

$$\frac{4\,y\,sen\,x\,cos\,x}{2\,y \cdot cos\,2\,x} = \frac{2\,sen\,x\,cos\,x}{cos\,2\,x} = \frac{sen\,2\,x}{cos\,2\,x} = tg\,2\,x =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\,x = 60° \Rightarrow x = 30°$$

Sustituyendo este valor de $x = 30°$ *en la segunda ecuación del sistema resulta:*

$$2\,y \cdot cos\,60° = \sqrt{3} \Rightarrow 2\,y \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: **$x = 30°$; $y = \sqrt{3}$**

85. RESOLUCIÓN

Sumando y restando ambas ecuaciones se tiene:

$2\ sen\ x = \sqrt{3} \Rightarrow sen\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 2k\pi \\ x = 120° + 2k\pi \end{cases}$

$2\ sen\ y = 1 \Rightarrow sen\ y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 30° + 2k\pi \\ y = 150° + 2k\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{1^a} \begin{cases} \mathbf{x = 60° + 2k\pi} \\ \mathbf{y = 30° + 2k\pi} \end{cases} \quad \mathbf{2.^a} \begin{cases} \mathbf{x = 120° + 2k\pi} \\ \mathbf{y = 150° + 2k\pi} \end{cases}$

86. RESOLUCIÓN

I.

$tg\ x + tg\ y = \dfrac{sen\ x}{cos\ x} + \dfrac{sen\ y}{cos\ y} =$

$= \dfrac{sen\ x\ cos\ y + cos\ x\ sen\ y}{cos\ x\ cos\ y} = \dfrac{sen\ (x+y)}{cos\ x\ cos\ y} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow sen\ (x+y) = 2\ cos\ x\ cos\ y = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow sen\ (x+y) = 1 \Rightarrow x + y = 90° \Rightarrow y = 90° - x$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación del sistema resulta:

$cos\ x \cdot cos\ (90° - x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow cos\ x \cdot sen\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ sen\ x\ cos\ x = 1 \Rightarrow sen\ 2x = 1 \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°$

luego:

$y = 90° - 45° = 45°$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{x = 45° \ ; \ y = 45°}$

II.

$\dfrac{cos\ 2x}{cos\ x - cos\ y} = \dfrac{cos\ 90°}{cos\ 45° - cos\ 45°} = \dfrac{0}{0} =$

$= \dfrac{cos^2 x - sen^2 x}{cos\ x - cos\ y} = \dfrac{(cos\ x + sen\ x)(cos\ x - sen\ x)}{cos\ x - sen\ x} =$

$= cos\ x + sen\ x = cos\ 45° + sen\ 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{\dfrac{cos\ 2x}{cos\ x - cos\ y} = \sqrt{2}}$

87. RESOLUCIÓN

I.

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180° - (45° + 75°) = 60°$

Por el teorema de los senos:

$\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \widehat{C}} \Leftrightarrow \dfrac{12}{sen\ 60°} = \dfrac{b}{sen\ 45°} =$

$= \dfrac{c}{sen\ 75°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{12 \cdot sen\ 45°}{sen\ 60°} = \dfrac{12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{12 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{6} \\ c = \dfrac{12 \cdot sen\ 75°}{sen\ 60°} = \dfrac{12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}\,(3 + \sqrt{3}) \end{cases}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{b = 4\sqrt{6}\ dm \ ; \ c = 2\sqrt{2}\,(3 + \sqrt{3})\ dm}$

II.

El área del triángulo es:

$S = \dfrac{a \cdot c \cdot sen\ \widehat{B}}{2} = \dfrac{12 \cdot 2\sqrt{2}\,(3+\sqrt{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 12\,(3 + \sqrt{3})$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{S = 12\,(3 + \sqrt{3})\ dm^2}$

88. RESOLUCIÓN

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C})$

luego

$sen\ A = sen\ (B + C) = sen\ B \cdot cos\ C + sen\ C \cdot cos\ B$

SOLUCIÓN: $\mathbf{sen\ A = sen\ B \cdot cos\ C + sen\ C \cdot cos\ B}$

89. RESOLUCIÓN

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C})$

$\left.\begin{array}{l} sen\ \widehat{A} = sen\ (\widehat{B} + \widehat{C}) \\ cos\ \widehat{A} = -cos\ (\widehat{B} + \widehat{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow tg\ \widehat{A} = -\ tg\ (\widehat{B} + \widehat{C}) =$

$= -\dfrac{tg\ \widehat{B} + tg\ \widehat{C}}{1 - tg\ \widehat{B} \cdot tg\ \widehat{C}}$

luego:

$tg\ A - tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C = -tg\ B - tg\ C$

$tg\ A + tg\ B + tg\ C = tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C$

SOLUCIÓN: $\mathbf{tg\ A + tg\ B + tg\ C = tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C}$

90. RESOLUCIÓN

$cos\ 2A = 2\ cos^2 A - 1$

$cos\ 2B = 2\ cos^2 B - 1$

$cos\ 2C = 2\ cos^2 C - 1$

Sustituyendo estos valores en la expresión dada, resulta:

$cos\ 2A + cos\ 2B + cos\ 2C + 4\ cos\ A \cdot cos\ B \cdot cos\ C =$

$= (2\ cos^2 A - 1) + (2\ cos^2 B - 1) + (2\ cos^2 C - 1) +$

$+ 4\ cos\ A \cdot cos\ B \cdot cos\ C = 2\ (cos^2 A + cos^2 B + cos^2 C +$

$+ 2\ cos\ A \cdot cos\ B \cdot cos\ C) - 3 = 2 - 3 = -1$

CÁLCULOS AUXILIARES

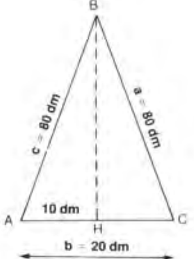
$\left.\begin{array}{r} cos^2 A - sen^2 A = cos\ 2A \\ cos^2 A + sen^2 A = 1 \end{array}\right\}$

Sumando ordenadamente resulta:

$2\ cos^2 A = cos\ 2A + 1 \quad \Rightarrow cos\ 2A = 2\ cos^2 A - 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{cos\ 2A + cos\ 2B + cos\ 2C + 4\ cos\ A \cdot cos\ B \cdot cos\ C = -1}$

91. RESOLUCIÓN



$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 180 \\ c = a \\ b = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a + 20 = 180 \Rightarrow a = 80\ dm$
$c = a = 80\ dm$

$cos\ \widehat{A} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{10}{80} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \widehat{A} = 82°\ 48' = \widehat{C}$

$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180° - 165°\ 38' = 14°\ 22'$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\widehat{A} = \widehat{C} = 82°\ 49' \ ; \ \widehat{B} = 14°\ 22'}$

92. RESOLUCIÓN

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + 60° = 180° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 60°$

Sustituyendo este valor en la expresión:

$\text{sen}\,\widehat{A} + \text{sen}\,\widehat{B} = 2\,\text{sen}\,\dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \cdot \cos\dfrac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \dfrac{3}{2}$

resulta:

$2\,\text{sen}\,60° \cdot \cos\dfrac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\dfrac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} =$

$= \dfrac{3}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = 30°$

luego:

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 60° \\ \dfrac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = 30°\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A} = 90° \; ; \; \widehat{B} = 30°$

SOLUCIÓN: **$\widehat{A} = 90°$; $\widehat{B} = 30°$**

93. RESOLUCIÓN

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180° - (33°10' + 43°) = 103°50'$

$\dfrac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} \Leftrightarrow \dfrac{30}{\text{sen}\,103°50'} =$

$= \dfrac{b}{\text{sen}\,33°10'} = \dfrac{c}{\text{sen}\,43°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{30 \cdot \text{sen}\,33°10'}{\text{sen}\,103°50'} = \dfrac{30 \cdot 0{,}5471}{0{,}9710} = 16{,}9\,\text{dm} \\ c = \dfrac{30 \cdot \text{sen}\,43°}{\text{sen}\,103°50'} = \dfrac{30 \cdot 0{,}6820}{0{,}9710} = 21{,}07\,\text{dm} \end{cases}$

SOLUCIÓN: **$\widehat{A} = 103°50'$; $b = 16{,}9$ dm ; $c = 21{,}07$ dm**

94. RESOLUCIÓN

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\widehat{C} = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 37° =$

$= 16 + 36 - 48 \cdot 0{,}7986 = 13{,}6672 \Rightarrow c = \sqrt{13{,}6672} = 3{,}69\,\text{dm}$

Por el teorema de los senos:

$\dfrac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} \Leftrightarrow \dfrac{4}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{3{,}69}{\text{sen}\,37°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \dfrac{4 \cdot \text{sen}\,37°}{3{,}69} = \dfrac{4 \cdot 0{,}6018}{3{,}69} = 0{,}6513 \Rightarrow \widehat{A} = 40°39'$

$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180° - (40°39' + 37°) = 102°21'$

SOLUCIÓN: **$c = 3{,}69$ dm ; $\widehat{A} = 40°39'$; $\widehat{B} = 102°21'$**

95. RESOLUCIÓN

$\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \dfrac{5^2 + 10^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 10} = \dfrac{76}{100} = 0{,}7600 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{A} = 40°32'$

$\cos\widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} = \dfrac{7^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 10} = \dfrac{124}{140} = 0{,}8857 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{B} = 27°40'$

$\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - (40°32' + 27°40') = 111°48'$

También se puede obtener $\widehat{C}$ *aplicando* $\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$

SOLUCIÓN: **$\widehat{A} = 40°32'$; $\widehat{B} = 27°40'$; $\widehat{C} = 111°48'$**

96. RESOLUCIÓN

$\dfrac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \Leftrightarrow \dfrac{8}{\text{sen}\,57°10'} = \dfrac{10}{\text{sen}\,\widehat{B}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{10 \cdot \text{sen}\,57°10'}{8} = \dfrac{10 \cdot 0{,}8403}{8} = \dfrac{8{,}403}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} > 1$. *Imposible*

SOLUCIÓN: **No existe solución por ser sen B > 1**

97. RESOLUCIÓN

$\dfrac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \Leftrightarrow \dfrac{7}{\text{sen}\,27°40'} = \dfrac{8}{\text{sen}\,\widehat{B}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{8 \cdot \text{sen}\,27°40'}{7} = \dfrac{8 \cdot 0{,}4643}{7} = 0{,}5306 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{B}_1 = 32°3' \\ \widehat{B}_2 = 180° - 32°3' = 147°57' \end{cases}$

luego:

$\widehat{A} + \widehat{B}_1 = 27°40' + 32°3' = 59°43' < 180°$

$\widehat{A} + \widehat{B}_2 = 27°40' + 147°57' = 175°37' < 180°$

Hay por tanto dos soluciones, siendo los valores de $\widehat{C}$ *los siguientes:*

$\widehat{C}_1 = 180° - 59°43' = 120°17'$

$\widehat{C}_2 = 180° - 175°37' = 4°23'$

El lado c tiene por soluciones:

$c_1{}^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\widehat{C}_1 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8\cos 120°17' =$

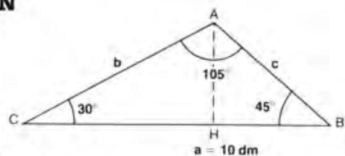
$= 113 + 112 \cdot 0{,}5042 = 169{,}47 \Rightarrow c_1 = \sqrt{169{,}47} \simeq 13\,\text{dm}$

$c_2{}^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\widehat{C}_2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 4°23' =$

$= 113 - 112 \cdot 0{,}9970 = 1{,}33 \Rightarrow c_2 = \sqrt{1{,}33} = 1{,}1\,\text{dm}$

SOLUCIÓN:
1.ª $\widehat{B}_1 = 32°3'$; $\widehat{C}_1 = 120°17'$; $c_1 = 13$ dm
2.ª $\widehat{B}_2 = 147°57'$; $\widehat{C}_2 = 4°23'$; $c_2 = 1{,}1$ dm

98. RESOLUCIÓN



$S = \dfrac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \dfrac{1}{2}\,a \cdot b \cdot \text{sen}\,30° = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot b \cdot \dfrac{1}{2} \quad (1)$

$\overline{AH} = b \cdot \text{sen}\,30°$

$\dfrac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \Leftrightarrow b = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\widehat{B}}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{10\,\text{sen}\,45°}{\text{sen}\,105°} =$

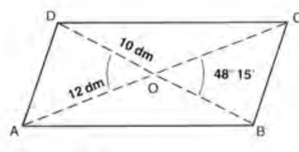
$= \dfrac{10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}} = \dfrac{20}{\sqrt{3} + 1}$

Sustituyendo este valor en la expresión (1) resulta:

$S = \dfrac{10 \cdot 20}{4(\sqrt{3} + 1)} = \dfrac{50}{\sqrt{3} + 1} \simeq 18{,}3\,\text{dm}^2$

SOLUCIÓN: **$S \simeq 18{,}3$ dm²**

99. RESOLUCIÓN



$\overline{AC} = 12\,\text{dm}$; $\overline{BD} = 10\,\text{dm}$

luego:

$\overline{AO} = \overline{OC} = 6\,\text{dm}$; $\overline{BO} = \overline{OD} = 5\,\text{dm}$

El lado $\overline{BC}$ *es:*

$\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,\overline{BO} \cdot \overline{OC} \cdot \cos 48°15'$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,\overline{BO} \cdot \overline{OC} \cdot \cos 48°15'} =$

$= \sqrt{25 + 36 - 60 \cdot \cos 48°15'} = \sqrt{20{,}914} \simeq 4{,}6\,\text{dm}$

El lado $\overline{AB}$ *es:*

$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + 2\,\overline{AO} \cdot \overline{OB} \cdot \cos 48°15'$

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + 2\,\overline{AO} \cdot \overline{OB} \cdot \cos 48°15'} =$

$= \sqrt{36 + 25 + 60 \cdot \cos 48°15'} \simeq 10\,\text{dm}$

SOLUCIÓN: **$\overline{AB} \simeq 10$ dm ; $\overline{BC} \simeq 4{,}6$ dm**

100. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C} = 2\operatorname{sen}\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \cos\widehat{B} + \cos\widehat{C} = 2\cos\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = \frac{3}{\sqrt{6}} \end{aligned}\right\}$$

Dividiendo miembro a miembro resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C}}{\cos\widehat{B} + \cos\widehat{C}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}{2\cos\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3}{\sqrt{6}}} = 1 \Rightarrow \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$$

Sustituyendo $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$ en la primera ecuación, resulta:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C} = \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}(90^\circ - \widehat{B}) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{B} + \cos\widehat{B} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$(\operatorname{sen}\widehat{B} + \cos\widehat{B})^2 = \operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} + 2\operatorname{sen}\widehat{B}\cos\widehat{B} = \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$1 + 2\operatorname{sen}\widehat{B}\cos\widehat{B} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \operatorname{sen}2\widehat{B} = \frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}2\widehat{B} = \frac{1}{2}$$

Si $\operatorname{sen}2\widehat{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 15^\circ$

luego: $\widehat{C} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$; $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) =$
$= 180^\circ - (15^\circ + 75^\circ) = 90^\circ$

Por tanto:

$$b = 10\operatorname{sen}15^\circ = \frac{10\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$c = 10\operatorname{sen}75^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$$

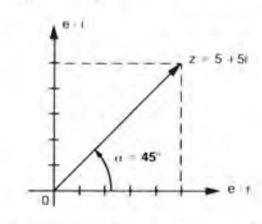
SOLUCIÓN:

El triángulo es rectángulo. Sus ángulos son:
$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^\circ}$; $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{15^\circ}$; $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{75^\circ}$
y sus lados:
$\mathbf{a = 10\ dm}$; $\mathbf{b = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\ dm}$;
$\mathbf{c = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\ dm}$

101. RESOLUCIÓN

Módulo: $m = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Argumento: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

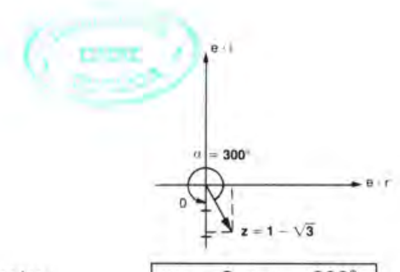


SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 5\sqrt{2}}$; $\mathbf{\alpha = 45^\circ}$

102. RESOLUCIÓN

$$m = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 300^\circ$$

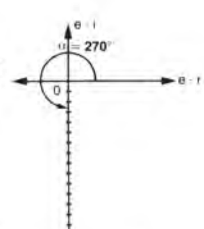


SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 2}$; $\mathbf{\alpha = 300^\circ}$

103. RESOLUCIÓN

$$m = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0+(-16)^2} = \sqrt{256} = 16$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = -\frac{16}{0} = -\infty \Rightarrow \alpha = 270^\circ$$



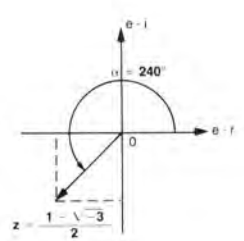
SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 16}$; $\mathbf{\alpha = 270^\circ}$

104. RESOLUCIÓN

$$z = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$m = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$



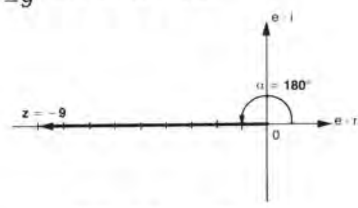
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 240^\circ$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 1}$; $\mathbf{\alpha = 240^\circ}$

105. RESOLUCIÓN

$z = -9 = -9 + 0\cdot i$
$m = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-9)^2+0} = \sqrt{81} = 9$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{0}{-9} = 0 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{m = 9}$; $\mathbf{\alpha = 180^\circ}$

106. RESOLUCIÓN

I. $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-5 + 7i) = (3 - 5) + (-4 + 7)i =$
$= -2 + 3i$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{z_1 + z_2 = -2 + 3i}$

II. $z_1 - z_2 = (4 + 2i) - (-1 + 3i) = [4 - (-1)] + (2 - 3)i =$
$= 5 - i$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{z_1 - z_2 = 5 - i}$

107. RESOLUCIÓN

I. $z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 + 3i - 4i + 2 = 8 - i$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{z_1 - z_2 = 5 - i}$

II. $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 25}$

III. $z_1 : z_2 = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5+5i}{4+1} =$

$= \frac{5+5i}{5} = 1 + i$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{z_1 : z_2 = 1 + i}$

IV. $z_1 : z_2 = \frac{3-2i}{2-3i} = \frac{(3-2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} =$

$= \frac{12+5i}{13} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13} i$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{z_1 : z_2 = \frac{12}{13} + \frac{5}{13} i}$

108. RESOLUCIÓN

$z_1 : z_2 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z_1 : z_2 = i}$

109. RESOLUCIÓN

Módulo de z_1 ; $m_1 = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Módulo de z_2 ; $m_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Módulo de z_3 ; $m_3 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Módulo de $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$; $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$

SOLUCIÓN: **Módulo de $\mathbf{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}$ es $\mathbf{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 4\sqrt{5}}$**

110. RESOLUCIÓN

$z_1 \cdot z_2 = (2+i)(c+i) = 2c + ci + 2i - 1 = (2c-1) + (c+2)i$

Para que $z_1 \cdot z_2$ *sea un número real es necesario que:*

$c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{c = -2}$

111. RESOLUCIÓN

$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(c+6i) = 3c + 2ci + 18i - 12 =$

$= (3c - 12) + (2c + 18)i$

Para que $z_1 \cdot z_2$ *sea un número imaginario puro es necesario que:*

$3c - 12 = 0 \Rightarrow c = 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{c = 4}$

112. RESOLUCIÓN

$z_1 \cdot z_2 = (a+3i)(c-2i) = ac + 3ci - 2ai + 6 =$

$= (ac + 6) + (3c - 2a)i = 12i$

$\left.\begin{array}{r} ac + 6 = 0 \\ 3c - 2a = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -3 \; ; \; c = 2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a = -3 \; ; \; c = 2}$

113. RESOLUCIÓN

Módulo de $(3+2i)$ *es* ; $m_1 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Módulo de $(1-i)$ *es* ; $m_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Módulo de $(4+i)$ *es* ; $m_3 = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

Módulo de $(2-i)$ *es* ; $m_4 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Módulo de $\frac{(3+2i)(1-i)}{(4+i)(2-i)}$ *es* ; $m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_3 \cdot m_4} = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} =$

$= \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{85}} = \sqrt{\frac{26}{85}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = \sqrt{\frac{26}{85}}}$

114. RESOLUCIÓN

$\frac{a-3i}{2+bi} = 3 - 2i \Rightarrow (a - 3i) = (3-2i)(2+bi) =$

$= 6 - 4i + 3bi + 2b = (6 + 2b) + (3b - 4)i$

$a - 3i = (6+2b) + (3b-4)i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 6 + 2b \\ -3 = 3b - 4 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{20}{3} \; ; \; b = \frac{1}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a = \frac{20}{3} \; ; \; b = \frac{1}{3}}$

115. RESOLUCIÓN

$\frac{a+19i}{-5+bi} = 3 - 2i \Rightarrow a + 19i = (3-2i)(-5+bi) =$

$= (-15 + 2b) + (10 + 3b)i$

$a + 19i = (-15+2b) + (10+3b)i \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a = -15 + 2b \\ 19 = 10 + 3b \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -9 \; ; \; b = 3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{a = -9 \; ; \; b = 3}$

116. RESOLUCIÓN

$(a + bi)^2 = a - bi$

$a^2 + 2abi - b^2 = a - bi$

$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\frac{b}{2b} = -\frac{1}{2}$

$b^2 = a^2 - a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUCIÓN:

1.ª $\mathbf{z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

2.ª $\mathbf{z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

117. RESOLUCIÓN

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = 1 + 4i$

$z_1 : z_2 = \frac{a+bi}{c+di} = i \Rightarrow a + bi = -d + ci$

Por tanto, podemos escribir:

$\left.\begin{array}{l} a + c = 1 \\ b + d = 4 \\ a = -d \\ b = c \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \; ; \; b = \frac{5}{2} \; ; \; c = \frac{5}{2} \; ; \; d = \frac{3}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} i \; ; \; z_2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} i}$

118. RESOLUCIÓN

$z_1 = a + bi \; ; \; z_2 = c + di$

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = 5 + 5i$

$z_1 : z_2 = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} +$

$+ \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Por tanto, podemos escribir:

$\left.\begin{array}{l} a + c = 5 \\ b + d = 5 \\ ac + bd = 0 \\ c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 3 \; ; \; a = 2 \; ; \; b = \left|\begin{array}{l} b_1 = -1 \\ b_2 = 6 \end{array}\right. \; d = \left|\begin{array}{l} d_1 = 6 \\ d_2 = -1 \end{array}\right.$

SOLUCIÓN:

1.ª $\mathbf{z_1 = 2 - i \; ; \; z_2 = 3 + 6i}$

2.ª $\mathbf{z_1 = 2 + 6i \; ; \; z_2 = 3 - i}$

119. RESOLUCIÓN

$(3 + bi)(2 - di) = (bd + 6) + (2b - 3d)i = 12 - 5i$

Resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} bd + 6 = 12 \\ 2b - 3d = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{3d - 5}{2} \\ \dfrac{3d - 5}{2} \cdot d + 6 = 12 \end{array}\right.$$

$$3d^2 - 5d - 12 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 = 3 \\ d_2 = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \qquad b \cdot d = 6 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 = 2 \\ b_2 = -\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{b_1 = 2 \ ; \ d_1 = 3}$; $\mathbf{b_2 = -\dfrac{9}{2} \ ; \ d_2 = -\dfrac{4}{3}}$

120. RESOLUCIÓN

$z_1 = 2 + i = x_1 \ ; \ z_2 = 2 - i = x_2$

$(2 + i)^2 - 4(2 + i) + 5 = 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 = 0$

$(2 - i)^2 - 4(2 - i) + 5 = 4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 = 0$

SOLUCIÓN: **Los números complejos $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$ satisfacen la ecuación**

121. RESOLUCIÓN

$z_1 = a + bi \ ; \ z_2 = c + di$

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = 1 \Rightarrow (a - c) + (b - d)i = 1$

$m_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{2}$

$m_2 = \sqrt{c^2 + d^2} = 5$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} a - c = 1 \\ b - d = 0 \\ a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 \\ c^2 + d^2 = 5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4 \ ; \ b = \pm 4 \ ; \ c = 3 \ ; \ d = \pm 4$$

SOLUCIÓN: **1.ª $z_1 = 4 + 4i$; $z_2 = 3 + 4i$**
2.ª $z_1 = 4 - 4i$; $z_2 = 3 - 4i$

122. RESOLUCIÓN

$z_1 = a + bi \ ; \ z_2 = c + di$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = 5$

$m_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{c^2 + d^2}$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} ac + bd = 0 \\ a + c = 5 \\ b + d = 0 \\ a^2 + b^2 = 4(c^2 + d^2) \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4 \ ; \ b = \pm 2 \ ; \ c = 1 \ ; \ d = \pm 2$$

SOLUCIÓN: **1.ª $z_1 = 4 + 2i$; $z_2 = 1 - 2i$**
2.ª $z_1 = 4 - 2i$; $z_2 = 1 + 2i$

123. RESOLUCIÓN

$$\frac{(4 + i)^2 - (4 - i)^2}{(4 + i)^2 + (4 - i)^2} = \frac{\cancel{16} + 8i + \cancel{i^2} - \cancel{16} + 8i - \cancel{i^2}}{16 + \cancel{8i} + i^2 + 16 - \cancel{8i} + i^2} = \frac{16i}{30} = \frac{8}{15} i$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{(4 + i)^2 - (4 - i)^2}{(4 + i)^2 + (4 - i)^2} = \dfrac{8}{15} i}$

124. RESOLUCIÓN

$$\frac{a + b}{\sqrt{a} - i\sqrt{b}} = \frac{(a + b)(\sqrt{a} + i\sqrt{b})}{(\sqrt{a} - i\sqrt{b})(\sqrt{a} + i\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{(a + b)(\sqrt{a} + i\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (i\sqrt{b})^2} = \frac{(a + b)(\sqrt{a} + i\sqrt{b})}{a + b} = \sqrt{a} + i\sqrt{b}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{a + b}{\sqrt{a} - i\sqrt{b}} = \sqrt{a} + i\sqrt{b}}$

125. RESOLUCIÓN

$\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

$z = 8(\cos 210° + i \text{ sen } 210°) = 8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} i\right) = -4\sqrt{3} - 4i$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = 8(\cos 210° + i \text{ sen } 210°) = -4\sqrt{3} - 4i}$

126. RESOLUCIÓN

$\cos 270° = 0$; $\text{sen } 270° = -1$

$z = 2(\cos 270° + i \text{ sen } 270°) = 2(0 - i) = -2i$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = 2(\cos 270° + i \text{ sen } 270°) = -2i}$

127. RESOLUCIÓN

$(4 + 4\sqrt{3}i)(3\sqrt{3} + 3i) = 12\sqrt{3} + 36i + 12i - 12\sqrt{3} = 48i = z$

Módulo del complejo: $|z| = \sqrt{48^2} = 48$

Argumento del complejo: $tg\ \alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{48}{0} = \infty \Rightarrow \alpha = 90°$

$z = 48i = 48(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = 48i = 48(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)}$

128. RESOLUCIÓN

$z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 50° + i \text{ sen } 50°) \cdot 3(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) =$

$= 6(\cos 90° + i \text{ sen } 90°) = 6(0 + i) = 6i$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 90° + i \text{ sen } 90°) = 6i}$

129. RESOLUCIÓN

$$\frac{5 + 2i}{3 - i}(1 - 2i) = \frac{9 - 8i}{3 - i} = \frac{(9 - 8i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} =$$

$$= \frac{35 - 15i}{10} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} i$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{58}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2} \ ;$$

$$tg\ \alpha = \frac{-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{7}{2}} = -\frac{3}{7} \Rightarrow \alpha = 336° 50'$$

Por tanto:

$$\frac{7}{2} - \frac{3}{2} i = \frac{\sqrt{58}}{2}(\cos 336° 50' + i \text{ sen } 336° 50')$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{5 + 2i}{3 - i}(1 - 2i) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} i = \dfrac{\sqrt{58}}{2}(\cos 336° 50' + i \text{ sen } 336° 50')}$

130. RESOLUCIÓN

$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} =$

$= \sqrt{64} = 8$

$tg\ \alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 240°$

$z = -4 - 4\sqrt{3}i = 8(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = -4 - 4\sqrt{3}i = 8(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)}$

131. RESOLUCIÓN

$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$tg\ \alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)}$

132. RESOLUCIÓN

$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = 1 + i\sqrt{3} = 2\ (cos\ 60° + i\ sen\ 60°)}$

133. RESOLUCIÓN

$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

$tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120°$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = -4 + 4\sqrt{3}\,i = (8, 120°) = 8_{120°}}$

134. RESOLUCIÓN

$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = (1, 60°) = 1_{60}}$

135. RESOLUCIÓN

$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 210°$

SOLUCIÓN: $\mathbf{z = -\sqrt{3} - i = (2, 210°) = 2_{210}}$

136. RESOLUCIÓN

I. $|z_1| = m_1 = 2$; $|z_2| = m_2 = 8$

El módulo del producto es: $|z_1|\,|z_2| = 2 \cdot 8 = 16$

Argumento del producto: $300° + 210° = 510°$

$z_1 \cdot z_2 = 2\ (cos\ 300° + i\ sen\ 300°) \cdot 8\ (cos\ 210° + i\ sen\ 210°) =$
$= 16\ (cos\ 510° + i\ sen\ 510°) = 16\ (cos\ 150° + i\ sen\ 150°)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 16\ (cos\ 150° + i\ sen\ 150°)}$

II. El módulo del cociente es: $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Argumento del cociente: $300° - 210° = 90°$

$z_1 : z_2 = 2\ (cos\ 300° + i\ sen\ 300°) : 8\ (cos\ 210° + i\ sen\ 210°) =$
$= \frac{1}{4}\ (cos\ 90° + i\ sen\ 90°)$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{z_1 : z_2 = \frac{1}{4}\ (cos\ 90° + i\ sen\ 90°)}$

III. El módulo del cociente es: $\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{8}{2} = 4$

Argumento del cociente: $210° - 300° = -90°$

$z_2 : z_1 = 8\ (cos\ 210° + i\ sen\ 210°) : 2\ (cos\ 300° + i\ sen\ 300°) =$
$= 4\ [cos\ (-90°) + i\ sen\ (-90°)] = 4\ (cos\ 270° + i\ sen\ 270°)$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{z_2 : z_1 = 4\ (cos\ 270° + i\ sen\ 270°)}$

137. RESOLUCIÓN

$\frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i = z$

Módulo del complejo: $|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Argumento del complejo: $tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

$z = 1 + i = \sqrt{2}\ (cos\ 45° + i\ sen\ 45°)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{1 + 3i}{2 + i} = 1 + i = \sqrt{2}\ (cos\ 45° + i\ sen\ 45°)}$

138. RESOLUCIÓN

$(2 + 2\sqrt{3}i) + (2\sqrt{3} + 2i) = (2 + 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 2)\ i = z$

Módulo del complejo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} =$
$= \sqrt{(2 + 2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + 2)^2} = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Argumento del complejo: $tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{2 + 2\sqrt{3}} =$
$= 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

$z = (2 + 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 2)\ i = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}\ (cos\ 45° + i\ sen\ 45°)$

SOLUCIÓN: $\mathbf{(2 + 2\sqrt{3}\,i) + (2\sqrt{3} + 2\,i) =}$
$\mathbf{= 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}\ (cos\ 45° + i\ sen\ 45°)}$

139. RESOLUCIÓN

$(a^2 - b^2) + 2\,abi = 8 - 6i \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -\frac{3}{a}$; $a^4 - 8a^2 - 9 = 0$

$a = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{16 + 9}} = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{25}} = \pm\sqrt{4 \pm 5} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \pm 3 \\ a = \pm\sqrt{-1} \\ \text{No sirve} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 3\ ;\ b_1 = -1 \\ a_2 = -3\ ;\ b_2 = 1 \end{array}\right.$

SOLUCIÓN: **1.ª** $\mathbf{a_1 = 3\ ;\ b_1 = 1}$ **2.ª** $\mathbf{a_2 = -3\ ;\ b_2 = 1}$

140. RESOLUCIÓN

I. $\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi\ ;\ z_2 = c + di \\ z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = \\ = (a + c) + (b + d)\ i = 6 \\ |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \\ |z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + c = 6 \\ b + d = 0 \\ a^2 + b^2 = 13 \\ c^2 + d^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = \pm 3 \\ c = 4 \\ d = \pm 3 \end{array}$

SOLUCIÓN I:
1.ª $\mathbf{z_1 = 2 + 3\,i\ ;\ z_2 = 4 - 3\,i}$
2.ª $\mathbf{z_1 = 2 - 3\,i\ ;\ z_2 = 4 + 3\,i}$

II. $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(4 - 3i) = 17 + 6i$
$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(4 + 3i) = 17 - 6i$

SOLUCIÓN II:
$\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 17 + 6\,i}$
$\mathbf{z_1 \cdot z_2 = 17 - 6\,i}$

III. $z_1 : z_2 = \frac{2 + 3i}{4 - 3i} = \frac{(2 + 3i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{-1 + 18i}{25} =$
$= -\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i$

$z_1 : z_2 = \frac{2 - 3i}{4 + 3i} = \frac{(2 - 3i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{-1 - 18i}{25} =$
$= -\frac{1}{25} - \frac{18}{25}i$

SOLUCIÓN III:
$\mathbf{z_1 : z_2 = -\frac{1}{25} + \frac{18}{25}\,i}$;
$\mathbf{z_1 : z_2 = -\frac{1}{25} - \frac{18}{25}\,i}$

141. RESOLUCIÓN

I. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = \cancel{1} + 2i - \cancel{1} = 2i$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{(1 + i)^2 = 2\,i}$

II. $(4 - i)^2 = 16 - 8i + i^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i$

SOLUCIÓN II: $\boxed{(4 - i)^2 = 15 - 8\,i}$

III. $(5 + 2i)^3 = 125 + 3 \cdot 5^2 \cdot 2i + 3 \cdot 5 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 =$
$= 125 + 150i - 60 - 8i = 65 + 142i$

SOLUCIÓN III: $\boxed{(5 + 2\,i)^3 = 65 + 142\,i}$

IV. $(3 + 7i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 7i + 3 \cdot 3 \cdot (7i)^2 + (7i)^3 = -414 - 154i$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{(3 + 7\,i)^3 = -414 - 154\,i}$

142. RESOLUCIÓN

$z = 1 + i\sqrt{3}$; $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

$(1 + i\sqrt{3})^4 = [2\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)]^4 =$

$= 2^4\,(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 16\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -8 - 8\sqrt{3}\,i$

SOLUCIÓN: $\boxed{(1 + i\,\sqrt{3})^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i}$

143. RESOLUCIÓN

$z = -1 + i$; $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$tg\ \alpha = \dfrac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135°$

$(-1 + i)^{10} = [\sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)]^{10} =$
$= (\sqrt{2})^{10}\,(\cos 1350° + i \operatorname{sen} 1350°) = 32\,(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) =$
$= 32\,(0 - i) = -32i$

SOLUCIÓN: $\boxed{(-1 + i)^{10} = -32\,i}$

144. RESOLUCIÓN

$z = \sqrt{3} - i$; $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$;

$tg\ \alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 330°$

$(\sqrt{3} - i)^{10} = [2\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)]^{10} =$
$= 2^{10}\,(\cos 3300° + i \operatorname{sen} 3300°) = 1024\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) =$
$= 1024\left(\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 + 512\sqrt{3}\,i$

SOLUCIÓN: $\boxed{(\sqrt{3} - i)^{10} = 512 + 512\,\sqrt{3}\,i}$

145. RESOLUCIÓN

$z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$; $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{36}{4}} = 3$

$tg\ \alpha = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i\right)^3 = (3,\ 30°)^3 = (27,\ 90°) = 27\,i$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(27,\ 90°) = 27\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 27\,(0 + i) = 27\,i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i\right)^3 = (27, 90°) = 27\,i}$

146. RESOLUCIÓN

$z = \sqrt{3} - i$; $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$tg\ \alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 330°$

$(\sqrt{3} - i)^5 = (2{,}330°)^5 = (32{,}1650°) = -16\sqrt{3} - 16i$

CÁLCULOS AUXILIARES

$(32{,}1650°) = 32\,(\cos 1650° + i \operatorname{sen} 1650°) =$
$= 32\,(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = 32\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right) =$
$= -16\sqrt{3} - 16i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l}(\sqrt{3} - i)^5 = (2, 330°)^5 = (32, 1650°) = \\ = -16\,\sqrt{3} - 16\,i\end{array}}$

147. RESOLUCIÓN

I. $(2{,}30°) \cdot (5{,}30°) = (10{,}60°) = 10\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) =$
$= 10\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 5 + 5\sqrt{3}\,i$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\begin{array}{l}(2, 30°)\,(5, 30°) = (10, 60°) = 10_{60°} = \\ = 10\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 5 + 5\,\sqrt{3}\,i\end{array}}$

II. $(10{,}45°) : (2{,}15°) = (5{,}30°) = 5\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) =$
$= 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}\,i$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\begin{array}{l}(10, 45°) : (2, 15°) = (5, 30°) = 5_{30°} = \\ = 5\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}\,i\end{array}}$

III. $(1{,}30°)^5 = (1{,}150°) = (\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\begin{array}{l}(1, 30°)^5 = (1, 150°) = \cos 150° + i \operatorname{sen} 150° = \\ = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\end{array}}$

IV. $(2{,}120°)^6 = (64{,}720°) = 64\,(\cos 720° + i \operatorname{sen} 720°) =$
$= 64\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 64\,(1 + 0) = 64$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\begin{array}{l}(2, 120°)^6 = (64, 720°) = 64_{720°} = \\ = 64\,(\cos 720° + i \operatorname{sen} 720°) = 64\end{array}}$

148. RESOLUCIÓN

$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$
$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \cdot i \operatorname{sen} \alpha +$
$+ 3 \cos \alpha \cdot (i \operatorname{sen} \alpha)^2 + (i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + 3\,i \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha -$
$- 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - i \operatorname{sen}^3 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha +$
$+ (3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen}^3 \alpha)\,i$

luego:

$\left.\begin{array}{l}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha \\ (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + (3 \cos^2 \alpha \cdot \\ \cdot \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen}^3 \alpha)\,i\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha +$
$+ (3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen}^3 \alpha)\,i$

De donde:

$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$
$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen}^3 \alpha$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l}\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha \\ \operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen}^3 \alpha\end{array}}$

149. RESOLUCIÓN

$i^{7438} = i^{1859 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{l|l} 7438 & 4 \\ \hline 34 & 1859 \\ \ \ 23 & \\ \ \ \ 38 & \\ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{i^{7438} = -1}}$

150. RESOLUCIÓN

$i^{1787} = i^{446 \cdot 4 + 3} = i^3 = -i$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{l|l} 1787 & 4 \\ \hline 18 & 446 \\ \ \ 27 & \\ \ \ \ \ 3 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{i^{1787} = -i}}$

151. RESOLUCIÓN

$[m\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^3 = [m\,(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^2$

$m^3\,(\cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha) = m^2\,(\cos 2\alpha - i\,\mathrm{sen}\,2\alpha)$

$m^3\,(\cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha) = m^2\,[\cos(-2\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(-2\alpha)]$

luego:

$$\left.\begin{array}{r} m^3 = m^2 \\ 3\alpha = -2\alpha + 2k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1 \ ;\ \alpha = \frac{2k\pi}{5}$$

Existen cinco números complejos que satisfacen la condición impuesta:

$k = 0 \Rightarrow m = 1 \ ;\ \alpha = 0 \ ;\ (1, 0) = 1_{0^\circ}$

$k = 1 \Rightarrow m = 1 \ ;\ \alpha = 72^\circ \ ;\ (1, 72^\circ) = 1_{72^\circ}$

$k = 2 \Rightarrow m = 1 \ ;\ \alpha = 144^\circ \ ;\ (1, 144^\circ) = 1_{144^\circ}$

$k = 3 \Rightarrow m = 1 \ ;\ \alpha = 216^\circ \ ;\ (1, 216^\circ) = 1_{216^\circ}$

$k = 4 \Rightarrow m = 1 \ ;\ \alpha = 288^\circ \ ;\ (1, 288^\circ) = 1_{288^\circ}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(1, 0)\ ;\ (1, 72^\circ)\ ;\ (1, 144^\circ)\ ;\ (1, 216^\circ)\ ;\ (1, 288^\circ)}}$

152. RESOLUCIÓN

Si $z_1 = 3 - 2i$ es una raíz, la otra raíz será su conjugada $z_2 = 3 + 2i$

$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (3 + 2i) = 6$

$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(3 + 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 + 4 = 13$

La ecuación pedida es:

$x^2 - 6x + 13 = 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{z_2 = 3 + 2i\ ;\ x^2 - 6x + 13 = 0}}$

153. RESOLUCIÓN

$\sqrt{i} = a + bi \Rightarrow i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a^2 - b^2 \\ 1 = 2ab \end{array}\right\} \Rightarrow a = \pm b,\ \text{para} \begin{cases} a = -b \text{ resulta: } 1 = -2a^2.\ \text{Imposible} \\ a = b \text{ resulta: } a^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \\ a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} = b \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\sqrt{\mathbf{i}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} \end{cases}}$

154. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO

$\sqrt{3 + 4i} = a + bi \Rightarrow 3 + 4i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2 \\ 4 = 2ab \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \\ 16 = 4a^2b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \pm 2 \\ b = \pm 1 \end{array}$$

SEGUNDO MÉTODO

$z = 3 + 4i \ ;\ |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{3 + 4i} = \pm\sqrt{\dfrac{5 + 3}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{5 - 3}{2}}\ i = \pm\sqrt{4} \pm \sqrt{1}\cdot i = \pm 2 \pm i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{1.^a\ \ 2 + i} \\ \mathbf{2.^a\ \ -2 - i} \end{array}}$

155. RESOLUCIÓN

$z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ ;\ |z| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

$\sqrt{\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2}} \pm i\sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{1.^a}\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i} \\ \mathbf{2.^a}\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathbf{i} \end{array}}$

156. RESOLUCIÓN

$z = 1 + 2i\sqrt{2} \ ;\ |z| = \sqrt{1^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{1 - 2i\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{3 + 1}{2}} \pm i\sqrt{\dfrac{3 - 1}{2}} = \pm\sqrt{2} \pm i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{1.^a\ \sqrt{2} + i} \\ \mathbf{2.^a\ -\sqrt{2} - i} \end{array}}$

157. RESOLUCIÓN

$\sqrt{\dfrac{1 + i}{1 - i}} = \sqrt{\dfrac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}} = \sqrt{\dfrac{1 + 2i + i^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2i}{2}} = \sqrt{i}$

$z = i \ ;\ |z| = \sqrt{0 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{\dfrac{1 + i}{1 - i}} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + 0}{2}} \pm i\sqrt{\dfrac{1 - 0}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\dfrac{1}{2}} =$

$= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{1.^a}\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} \\ \mathbf{2.^a}\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} \end{array}}$

158. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{i} = a + bi \Rightarrow i = (a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i =$

$= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\,i$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} a^3 - 3ab^2 = 0 \\ 3a^2b - b^3 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a\,(a^2 - 3b^2) = 0 \\ 3a^2b - b^3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \ ;\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ ;\ a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b = -1 \ ;\ b = \dfrac{1}{2} \ ;\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{1.^a\ -i} \\ \mathbf{2.^a}\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i} \\ \mathbf{3.^a}\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i} \end{array}}$

159. RESOLUCIÓN

I. $2\,(\cos 15^\circ + i\,\mathrm{sen}\,15^\circ)^6 = 2^6\,(\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen}\,90^\circ) =$

$2^6\,(0 + i) = 64\,i$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{64\,i}}$

II. $2\,(\cos 6^\circ + i\,\mathrm{sen}\,6^\circ)^{10} = 2^{10}\,(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ) =$

$= 1024\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 + 512\sqrt{3}\,i$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{512 + 512\sqrt{3}\,i}}$

160. RESOLUCIÓN

$a - 1 + bi = 2a + 2bi + 2i = 2a + (2b + 2)\,i$

De donde:

$\left.\begin{array}{l} a - 1 = 2a \\ b = 2b + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1 \;;\; b = -2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{a = -1 \;;\; b = -2}}$

161. RESOLUCIÓN

$(a + bi) + \dfrac{1 + i}{1 - 2i} = (\sqrt{2}, 45°)$

$(a + bi) + \dfrac{1 + i}{2 - 2i} = (a + bi) + \dfrac{(1 + i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} =$

$= (a + bi) + \dfrac{i}{2} = a + \left(b + \dfrac{1}{2}\right)i$

$(\sqrt{2}, 45°) = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) =$

$= \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$

luego:

$a + \left(b + \dfrac{1}{2}\right)i = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + \dfrac{1}{2} = 1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{(a + b\,i) = 1 + \dfrac{1}{2}\,i}}$

162. RESOLUCIÓN

Sea: $z_1 = 2 + bi \;;\; z_2 = 1 + bi$

$|z_1| = \sqrt{(2)^2 + b^2} = \sqrt{4 + b^2}$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + b^2}$

luego:

$\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{4 + b^2}}{\sqrt{1 + b^2}} = 2 \Rightarrow \dfrac{4 + b^2}{1 + b^2} = 4 \Rightarrow 4 + b^2 = 4 + 4b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{b = 0}}$

163. RESOLUCIÓN

La suma dada es una progresión geométrica de razón i.
Por tanto se tendrá:

$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{25} = \dfrac{i^{25} \cdot i - 1}{i - 1} = \dfrac{i^{26} - 1}{i - 1} = \dfrac{i^2 - 1}{i - 1} =$

$= \dfrac{-2}{i - 1} = \dfrac{-2\,(1 + i)}{(i - 1)(i + 1)} = \dfrac{-2\,(1 + i)}{i^2 - 1} = \dfrac{-2\,(1 + i)}{-2} = 1 + i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{25} = 1 + i}}$

164. RESOLUCIÓN

$x^2 - \sqrt{12}\,x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

$x = \dfrac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 16}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$

$x_1 = \sqrt{3} + i \;;\; x_2 = \sqrt{3} - i;$

$|x_1| = 2 \;;\; \alpha_1 = 30° \;;\; |x_2| = 2 \;;\; \alpha_2 = 330°$

El cociente será:

$\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \dfrac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

SOLUCIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{|x_1| = 2 \;;\; \alpha_1 = 30° \;;\; |x_2| = 2 \;;\; \alpha_2 = 330°} \\ \mathbf{\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i} \end{array}}$

165. RESOLUCIÓN

I. $(x - i)(x + i) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x^2 + 1 = 0}}$

II. $[x - (2 + i)][x - (2 - i)] = 0 \Rightarrow [(x - 2) - i][(x - 2) + i] =$
$= 0 \Rightarrow (x - 2)^2 - i^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{x^2 - 4x + 5 = 0}}$

III. $2\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$2\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

$[x - (\sqrt{3} + i)][x - (\sqrt{3} - i)] =$
$= [(x - \sqrt{3}) - i][(x - \sqrt{3}) + i] = (x - \sqrt{3})^2 - i^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0}}$

166. RESOLUCIÓN

$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{(1, 0°)} = \sqrt[3]{1_{0°}} = 1_{0°} = 1_{\frac{0° + 2k\pi}{3}}$

$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 1_{0°} = 1 \\ k = 1 \Rightarrow 1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ k = 2 \Rightarrow 1_{240°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{cases}$

$1^2 + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 =$

$= 1 + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{2i\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{2i\sqrt{3}}{4}\right) =$

$= 1 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{2i\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{2i\sqrt{3}}{4} =$

$= 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{1^2 + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2 = 0}}$

167. RESOLUCIÓN

I. $\sqrt{9} = \sqrt{(9, 0°)} = \sqrt{9_{0°}} = 3_{0°} = 3_{\frac{0° + 2k\pi}{2}}$

$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \;;\; (3, 0°) = 3\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 3 \\ k = 1 \;;\; (3, 180°) = 3\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = -3 \end{cases}$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\sqrt{\mathbf{9}} = \begin{cases} \mathbf{(3, 0°) = 3\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 3} \\ \mathbf{(3, 180°) = 3\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = -3} \end{cases}}$

II. $\sqrt{-9} = \sqrt{(9, 180°)} = \sqrt{9_{180°}} = 3_{\frac{180° + 2k\pi}{2}}$

$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \;;\; (3, 90°) = 3\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 3i \\ k = 1 \;;\; (3, 270°) = 3\,(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = -3i \end{cases}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\sqrt{\mathbf{-9}} = \begin{cases} \mathbf{(3, 90°) = 3\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 3\,i} \\ \mathbf{(3, 270°) = 3\,(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = -3\,i} \end{cases}}$

III. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(8, 0°)} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{0°} = 2_{\frac{0° + 2k\pi}{3}}$

$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow (2, 0°) = 2\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 2 \\ k = 1 \Rightarrow (2, 120°) = 2\,(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = \\ \qquad = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3} \\ k = 2 \Rightarrow (2, 240°) = 2\,(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = \\ \qquad = 2\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$

SOLUCIÓN III: $\sqrt[3]{\mathbf{8}} = \begin{cases} \mathbf{(2, 0^\circ) = 2\ (cos\ 0^\circ + i\ sen\ 0^\circ) = 2} \\ \mathbf{(2, 120^\circ) = 2\ (cos\ 120^\circ + i\ sen\ 120^\circ) =} \\ \mathbf{= -1 + i\sqrt{3}} \\ \mathbf{(2, 240^\circ) = 2\ (cos\ 240^\circ + i\ sen\ 240^\circ) =} \\ \mathbf{= -1 - i\sqrt{3}} \end{cases}$

IV. $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(8, 180^\circ)} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{180^\circ} = 2_{\frac{180^\circ + 2k\pi}{3}}$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow (2, 60^\circ) = 2\ (\cos 60^\circ + i \text{ sen } 60^\circ) = \\ \qquad = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \\ k = 1 \Rightarrow (2, 180^\circ) = 2\ (\cos 180^\circ + i \text{ sen } 180^\circ) = \\ \qquad = 2\ (-1 + 0) = -2 \\ k = 2 \Rightarrow (2, 300^\circ) = 2\ (\cos 300^\circ + i \text{ sen } 300^\circ) = \\ \qquad = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN IV: $\sqrt[3]{\mathbf{-8}} = \begin{cases} \mathbf{(2, 60^\circ) = 2\ (cos\ 60^\circ + i\ sen\ 60^\circ) =} \\ \mathbf{= 1 + i\sqrt{3}} \\ \mathbf{(2, 180^\circ) = 2\ (cos\ 180^\circ + i\ sen\ 180^\circ) =} \\ \mathbf{= -2} \\ \mathbf{(2, 300^\circ) = 2\ (cos\ 300^\circ + i\ sen\ 300^\circ) =} \\ \mathbf{= 1 - i\sqrt{3}} \end{cases}$

168. RESOLUCIÓN

$z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(1, 180^\circ)} = 1_{\frac{180^\circ + 2k\pi}{3}}$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_1 = (1, 60^\circ) = 1_{60^\circ} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = (1, 180^\circ) = 1_{180^\circ} = -1 \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = (1, 300^\circ) = 1_{300^\circ} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\begin{cases} \mathbf{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i} \end{cases}$

169. RESOLUCIÓN

$z^6 + 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{(64, 180^\circ)} = 2_{\frac{180^\circ + 2k\pi}{6}}$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} = (2, 30^\circ) \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = 2_{90^\circ} = (2, 90^\circ) \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = 2_{150^\circ} = (2, 150^\circ) \\ k = 3 \Rightarrow z_4 = 2_{210^\circ} = (2, 210^\circ) \\ k = 4 \Rightarrow z_5 = 2_{270^\circ} = (2, 270^\circ) \\ k = 5 \Rightarrow z_6 = 2_{330^\circ} = (2, 330^\circ) \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{2_{30^\circ}\ ;\ 2_{90^\circ}\ ;\ 2_{150^\circ}\ ;\ 2_{210^\circ}\ ;\ 2_{270^\circ}\ ;\ 2_{330^\circ}}$

170. RESOLUCIÓN

$z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 2k\pi}{4}}$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_1 = 3_{45^\circ} = 3\ (\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ) = \\ \qquad = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3i\sqrt{2}}{2} \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = 3_{135^\circ} = 3\ (\cos 135^\circ + i \text{ sen } 135^\circ) = \\ \qquad = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = 3_{225^\circ} = 3\ (\cos 225^\circ + i \text{ sen } 225^\circ) = \\ \qquad = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3i\sqrt{2}}{2} \\ k = 3 \Rightarrow z_4 = 3_{315^\circ} = 3\ (\cos 315^\circ + i \text{ sen } 315^\circ) = \\ \qquad = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{3_{45^\circ}\ ;\ 3_{135^\circ}\ ;\ 3_{225^\circ}\ ;\ 3_{315^\circ}}$

171. RESOLUCIÓN

Pongamos el número complejo en forma polar:

$z = -i = (1, 270^\circ) = 1_{270^\circ}$

luego:

$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ + 2k\pi}{3}}$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 1_{90^\circ} = (1, 90^\circ) \\ k = 1 \Rightarrow 1_{210^\circ} = (1, 210^\circ) \\ k = 2 \Rightarrow 1_{330^\circ} = (1, 330^\circ) \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\sqrt[3]{\mathbf{-i}} = \begin{cases} \mathbf{1_{90^\circ}} \\ \mathbf{1_{210^\circ}} \\ \mathbf{1_{330^\circ}} \end{cases}$

172. RESOLUCIÓN

Pongamos el número complejo en forma polar:

$z = -2 + 2i\sqrt{3}\ ;\ |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$tg\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

$z = -2 + 2i\sqrt{3} = (4, 120^\circ) = 4_{120^\circ}$

luego:

$$\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4_{120^\circ}} = \sqrt{2}_{\frac{120^\circ + 2k\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}, 30^\circ) = \sqrt{2}_{30^\circ} \\ (\sqrt{2}, 120^\circ) = \sqrt{2}_{120^\circ} \\ (\sqrt{2}, 210^\circ) = \sqrt{2}_{210^\circ} \\ (\sqrt{2}, 300^\circ) = \sqrt{2}_{300^\circ} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt{2}_{30}\ ;\ \sqrt{2}_{120}\ ;\ \sqrt{2}_{210}\ ;\ \sqrt{2}_{300}}$

173. RESOLUCIÓN

Pongamos el número complejo en forma polar:

$|z| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$z = 2 + i\sqrt{12} = (4, 60^\circ) = 4_{60^\circ}$

$$\sqrt[4]{2 + i\sqrt{12}} = \sqrt[4]{4_{60^\circ}} = \sqrt{2}_{\frac{60^\circ + 2k\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}, 15^\circ) = \sqrt{2}_{15^\circ} \\ (\sqrt{2}, 105^\circ) = \sqrt{2}_{105^\circ} \\ (\sqrt{2}, 195^\circ) = \sqrt{2}_{195^\circ} \\ (\sqrt{2}, 285^\circ) = \sqrt{2}_{285^\circ} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\sqrt{2}_{15^\circ}\ ;\ \sqrt{2}_{105^\circ}\ ;\ \sqrt{2}_{195^\circ}\ ;\ \sqrt{2}_{285^\circ}}$

174. RESOLUCIÓN

$$\frac{5}{\sqrt{-i}} = \frac{5\sqrt{i}}{\sqrt{-i} \cdot \sqrt{i}} = \frac{5\sqrt{i}}{\sqrt{-i^2}} = \frac{5\sqrt{i}}{\sqrt{-(-1)}} = \frac{5\sqrt{i}}{\sqrt{1}} =$$

$$= 5\sqrt{i} = 5\sqrt{(1, 90^\circ)} = 5\sqrt{1_{90^\circ}} = 5 \cdot 1_{\frac{90^\circ + 2k\pi}{2}} = 5_{\frac{90^\circ + 2k\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5, 45^\circ) = 5\ (\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5i\sqrt{2}}{2} \\ (5, 225^\circ) = 5\ (\cos 225^\circ + i \text{ sen } 225^\circ) = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{5}{\sqrt{-i}}} = \begin{cases} \mathbf{\dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\,i\sqrt{2}}{2}} \\ \mathbf{\dfrac{-5\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5\,i\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$

175. RESOLUCIÓN

$$\sqrt{4\,(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)} = \sqrt{(4, 30^\circ)} = \sqrt{4_{30^\circ}} \Rightarrow \begin{cases} (2, 15^\circ) = 2_{15^\circ} \\ (2, 195^\circ) = 2_{195^\circ} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{2_{15^\circ}\ ;\ 2_{195^\circ}}$

176. RESOLUCIÓN

$$\sqrt[3]{27\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ)} = \sqrt[3]{(27, 60^\circ)} = \sqrt[3]{27_{60^\circ}} = 3_{\frac{60^\circ + 2k\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3, 20^\circ) = 3_{20^\circ} \\ (3, 140^\circ) = 3_{140^\circ} \\ (3, 260^\circ) = 3_{260^\circ} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{3_{20^\circ}\ ;\ 3_{140^\circ}\ ;\ 3_{260^\circ}}$

177. RESOLUCIÓN

$$\sqrt[4]{81\,(\cos 180^\circ + i\,\text{sen}\,180^\circ)} = \sqrt[4]{(81, 180^\circ)} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 2k\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3_{45^\circ} = (3, 45^\circ) \\ 3_{135^\circ} = (3, 135^\circ) \\ 3_{225^\circ} = (3, 225^\circ) \\ 3_{315^\circ} = (3, 315^\circ) \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{(3, 45^\circ)\ ;\ (3, 135^\circ)\ ;\ (3, 225^\circ)\ ;\ (3, 315^\circ)}$

178. RESOLUCIÓN

$$z_1 = \sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$$
$$z_2 = \sqrt{2}_{315^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i\,\text{sen}\,315^\circ) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 - i$$

La ecuación de segundo grado será:

$$(x - z_1)(x - z_2) = [x - i - 1][x + i - 1] = [(x - 1)^2 - i^2] =$$
$$= x^2 - 2x + 2 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x^2 - 2x + 2 = 0}$

179. RESOLUCIÓN

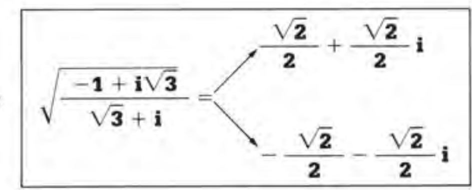
$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{4i}{4} = i$$

luego:

$$\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}} = \sqrt{i} = \sqrt{(1, 90^\circ)} = 1_{\frac{90^\circ + 2k\pi}{2}}$$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 1_{45^\circ} = 1\,(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ k = 1 \Rightarrow 1_{225^\circ} = 1\,(\cos 225^\circ + i\,\text{sen}\,225^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

SOLUCIÓN:



$$\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

180. RESOLUCIÓN

$$z_1 = a + bi\ ;\ z_2 = c + di$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i = 10$$
$$\frac{a}{c} = -4$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} a - c = 10 \\ b - d = 0 \\ \dfrac{a}{c} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 8\ ;\ c = -2\ ;\ b = d$$

Por tanto:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{8 + bi}{-2 + bi} = \frac{(8 + bi)(-2 - bi)}{(-2 + bi)(-2 - bi)} =$$
$$= \frac{-16 + b^2}{4 + b^2} + \frac{(-8b - 2b)}{4 + b^2}i = \frac{-16 + b^2}{4 + b^2} + \frac{-10b}{4 + b^2}i$$

De donde:

$$\frac{-16 + b^2}{4 + b^2} = 0 \Rightarrow -16 + b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm 4$$

SOLUCIÓN: $\boxed{1.^a \begin{cases} z_1 = 8 + 4i \\ z_2 = -2 + 4i \end{cases}\ ;\ 2.^a \begin{cases} z_1 = 8 - 4i \\ z_2 = -2 - 4i \end{cases}}$

181. RESOLUCIÓN

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Módulo: } |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \text{Argumento: } \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\ (1)$$

Elevando (1) al cuadrado, resulta:

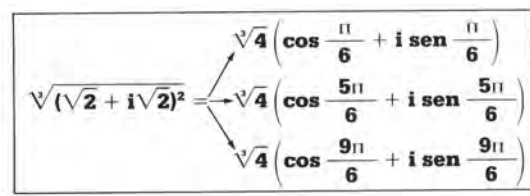
$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 =$$
$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

luego:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

$$\text{Para} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right) \\ k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right) \\ k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{9\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{9\pi}{6}\right) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:



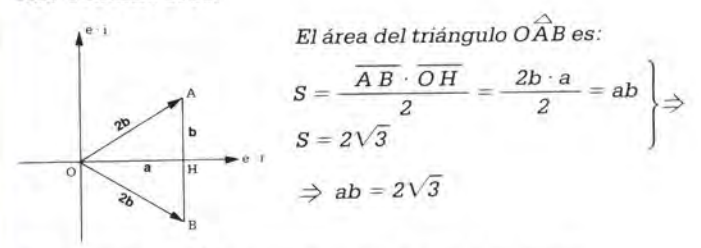
$$\sqrt[3]{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right) \\ \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{9\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{9\pi}{6}\right) \end{cases}$$

182. RESOLUCIÓN

$$(x + i)^4 = x^4 + 4x^3 i - 6x^2 - 4x\,i + 1$$
$$(x - i)^4 = x^4 - 4x^3 i - 6x^2 + 4x\,i + 1$$
$$(x + i)^4 - (x - i)^4 = 8x^3 i - 8x\,i = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x\,i\,(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x = 0\ ;\ x = 1\ ;\ x = -1}$

183. RESOLUCIÓN



El área del triángulo $O\widehat{A}B$ es:

$$\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{OH}}{2} = \dfrac{2b\cdot a}{2} = ab \\ S = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab = 2\sqrt{3}$$

En el triángulo $O\widehat{H}A$ se verifica: $(2b)^2 = a^2 + b^2$, *luego:*

$$\left.\begin{array}{l} ab = 2\sqrt{3} \\ (2b)^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ab = 2\sqrt{3} \\ 3b^2 = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = \dfrac{2\sqrt{3}}{a} = \pm\sqrt{2} \\ a^4 = 36 \Rightarrow a = \pm\sqrt{6} \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{1.^a \begin{cases} \sqrt{6} + \sqrt{2}\,i \\ \sqrt{6} - \sqrt{2}\,i \end{cases}\quad 2.^a \begin{cases} -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} - i\sqrt{2} \end{cases}}$

184. RESOLUCIÓN

$z_1 = 3 + 4i \;;\; |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$z_2 = 3 - 4i \;;\; |z_2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{3 + 4i} = \pm\sqrt{\frac{5+3}{2}} \pm i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 2 \pm i$$

$$\sqrt{3 + 4i} = \begin{cases} 2 + i \\ -2 - i \end{cases}$$

Análogamente:

$$\sqrt{3 - 4i} = \pm\sqrt{\frac{5+3}{2}} \pm i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 2 \pm i$$

$$\sqrt{3 - 4i} = \begin{cases} 2 - i \\ -2 + i \end{cases}$$

luego:

$$\sqrt{3 + 4i} + \sqrt{3 - 4i} = \begin{cases} (2 + i) + (2 - i) = 4 \\ (2 + i) + (-2 + i) = 2i \\ (-2 - i) + (2 - i) = -2i \\ (-2 - i) + (-2 + i) = -4 \end{cases}$$

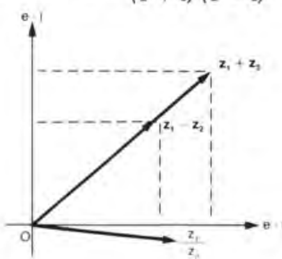
SOLUCIÓN: **4 ; 2 i ; −2 i ; −4**

185. RESOLUCIÓN

I. $z_1 + z_2 = (6 + 5i) + (1 + i) = 7 + 6i$

$z_1 - z_2 = (6 + 5i) - (1 + i) = 5 + 4i$

$$z_1 : z_2 = (6 + 5i) : (1 + i) = \frac{(6 + 5i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}i = z_3$$



SOLUCIÓN I:

$$\mathbf{z_1 + z_2 = 7 + 6\,i}$$
$$\mathbf{z_1 - z_2 = 5 + 4\,i}$$
$$\mathbf{z_1 : z_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,i}$$

II. *Centro de gravedad:*

$$G_g = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \left(\frac{7 + 5 + \frac{11}{2}}{3}, \frac{6 + 4 - \frac{1}{2}}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{35}{6}, \frac{19}{6}\right) = \frac{35}{6} + \frac{19}{6}i$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{\frac{35}{6} + \frac{19}{6}\,i}$

III. $\sqrt[3]{1 + i}$

Pongamos el número complejo $z = 1 + i$ *en forma polar:*

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

luego: $z = 1 + i = (\sqrt{2}, 45^\circ) = \sqrt{2}_{45}$

Por tanto:

$$\sqrt[3]{1 + i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ + 2k\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{2}_{15^\circ} & \text{para } k = 0 \\ \sqrt[6]{2}_{135^\circ} & \text{para } k = 1 \\ \sqrt[6]{2}_{225^\circ} & \text{para } k = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN III:

$$\mathbf{\sqrt[6]{2}_{15^\circ}}$$
$$\mathbf{\sqrt[6]{2}_{135^\circ}}$$
$$\mathbf{\sqrt[6]{2}_{225^\circ}}$$

186. RESOLUCIÓN

Cálculo de a:

$$a = \log_6\left(\frac{1}{36}\right)^{-2/3} = -\frac{2}{3}\log_6\frac{1}{6^2} = -\frac{2}{3}\log_6 6^{-2} =$$

$$= \frac{4}{3}\log_6 6 = \frac{4}{3}$$

Cálculo de b:

$$\frac{3 + 4i}{1 - bi} = \frac{(3 + 4i)(1 + bi)}{(1 - bi)(1 + bi)} = \frac{3 - 4b}{1 + b^2} + \frac{3b + 4}{1 + b^2}i$$

$$\frac{3b + 4}{1 + b^2} = 0 \Rightarrow 3b + 4 = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

Cálculo de c:

$$c = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

luego:

$$+\sqrt{\frac{a - b}{c}} = +\sqrt{\frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{6}} = +\sqrt{\frac{\frac{8}{3}}{6}} = +\sqrt{\frac{8}{18}} =$$

$$= +\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{+\sqrt{\frac{a - b}{c}} = \frac{2}{3}}$

187. RESOLUCIÓN

Cálculo de a:

$$a = \log_{\sqrt{2}} 0,5 = \frac{\log 0,5}{\log\sqrt{2}} = \frac{\log\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\log 2} = \frac{\log 1 - \log 2}{\frac{1}{2}\log 2} =$$

$$= \frac{-\log 2}{\frac{1}{2}\log 2} = -2$$

También:

$$(\sqrt{2})^a = 0,5 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{a/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{a/2} = 2^{-1} \Rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -2$$

Cálculo de b:

La característica de 0,0732 es $b = -2$

Cálculo de c:

$$c = 1,1\widehat{6} = \frac{116 - 11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6} \;;\; d = \frac{1}{8}$$

luego:

$$(a + bi)(c + di) = (-2 - 2i)\left(\frac{7}{6} + \frac{1}{8}i\right) = -\frac{25}{12} - \frac{31}{12}i$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{(a + b\,i)(c + d\,i) = -\frac{25}{12} - \frac{31}{12}\,i}$

188. RESOLUCIÓN

$(a + bi)(m + ni) = (am - bn) + (bm + an)\,i$

$$\frac{a + bi}{p + qi} = \frac{(a + bi)(p - qi)}{(p + qi)(p - qi)} = \frac{ap + bq}{p^2 + q^2} + \frac{bp - aq}{p^2 + q^2}i$$

Para que sean reales tendrá que ser:

$$\left.\begin{matrix} bm + an = 0 \\ bp - aq = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} bm = -an \\ bp = aq \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{m}{p} = -\frac{n}{q}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{m}{p} = -\frac{n}{q}}$

189. RESOLUCIÓN

$z_1 + z_2 = m(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + m(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha) = 2m \cdot \cos\alpha$

$z_1^2 + z_2^2 = [m(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^2 + [m(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)]^2 =$

$= 2m^2 \cdot \cos 2\alpha$

$z_1^3 + z_2^3 = [m(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^3 + [m(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)]^3 =$

$= 2m^3 \cdot \cos 3\alpha$

. . . .

$z_1^n + z_2^n = [m(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n + [m(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)]^n =$

$= 2m^n \cdot \cos n\alpha$

Sustituyendo estos valores en la expresión dada, resulta:

$$\frac{2\,m \cdot \cos\alpha \cdot 2\,m^2 \cos 2\alpha \cdot 2\,m^3 \cos 3\alpha \cdots 2\,m^n \cos n\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdots \cos n\alpha} =$$

$$= 2\,m \cdot 2\,m^2 \cdot 2\,m^3 \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot 2\,m^n = 2^n \cdot m^{1+2+3+\cdots+n} = 2^n \cdot m^{\frac{(1+n)n}{2}}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{2^n \cdot m^{\frac{(1+n)n}{2}}}$

190. RESOLUCIÓN

$$\frac{8 + 8i\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} =$$

$$= \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = 8 + 8i\sqrt{3} = z$$

Módulo del complejo $8 + 8i\sqrt{3}$ *es:*

$$|z| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$$

Argumento del complejo $8 + 8i\sqrt{3}$ *es:*

$$tg\,\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

luego:

$$8 + 8i\sqrt{3} = 16\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\dfrac{8 + 8\,i\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = 16\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ)}$

Bloque 8

- ✔ La circunferencia
- ✔ La elipse
- ✔ La hipérbola
- ✔ La parábola

LA CIRCUNFERENCIA

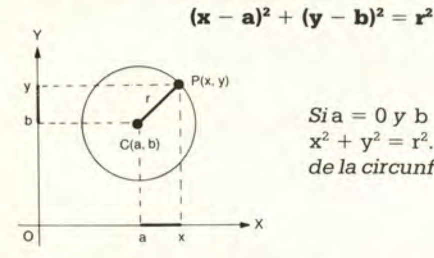
La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo es constante.

Centro: C
Radio: r

Ecuación de la circunferencia

La ecuación de la circunferencia de centro C(a, b) *y radio* r *es:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Si a = 0 *y* b = 0, *resulta:* $x^2 + y^2 = r^2$. *Ecuación reducida de la circunferencia.*

Forma general de la ecuación de la circunferencia

Desarrollando: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, *resulta:*

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0}$$

Cálculo del centro y radio de una circunferencia

$$\left.\begin{array}{r} -2a = m \\ -2b = n \\ a^2 + b^2 - r^2 = p \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\dfrac{m}{2} \\ b = -\dfrac{n}{2} \\ r = \sqrt{\dfrac{m^2 + n^2}{4} - p} \end{array}$$

$$\text{Centro: } C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$$

$$\text{Radio } r = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{4} - p}$$

Determinación de una circunferencia

La ecuación de la circunferencia se puede escribir de dos formas diferentes:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

Cada una depende de tres parámetros: a, b y r *para la primera y* m, n, p *para la segunda.*

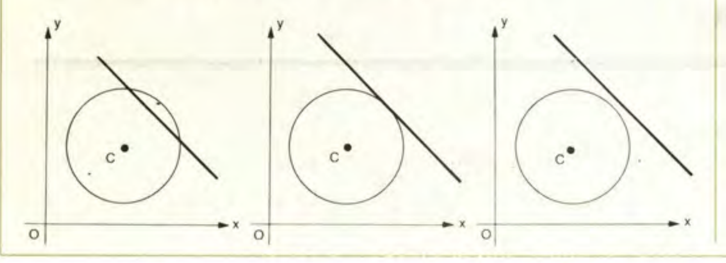
Necesitamos tres condiciones para determinar estos parámetros.

Intersección de una recta y una circunferencia

Se resuelve el sistema:

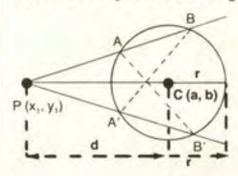
$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \\ y = ax + b \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{r} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ y = mx + n \end{array}\right.$$

Si tiene:
- *Dos soluciones reales distintas: Recta secante.*
- *Una solución real doble: Recta tangente.*
- *Ninguna solución real: Recta exterior.*



Potencia de un punto respecto a una circunferencia

Se llama potencia de un punto P *respecto a una circunferencia de centro* C *y radio* r *al producto:*



$$\text{Pot (P)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \dots$$

Si:
- $\overline{PA} \cdot \overline{PB} > 0$: *P punto exterior*
- $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$: *P punto de la circunferencia*
- $\overline{PA} \cdot \overline{PB} < 0$: *P punto interior*

La potencia de P *en función de* d *y* r *es:*

$$\text{Pot (P)} = d^2 - r^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$$

Eje radical de dos circunferencias

Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas.

El eje radical de:

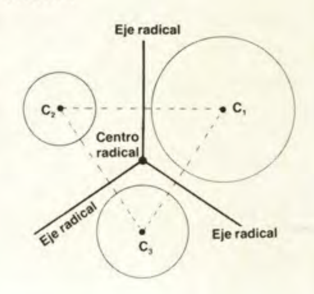
$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \\ x^2 + y^2 + m'x + n'y + p' = 0 \end{array}\right\}$$

es: $(m - m')x + (n - n')y + (p - p') = 0$

Centro radical de tres circunferencias

Se llama centro radical de tres circunferencias al punto del plano que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias.

Es el punto donde se cortan los tres ejes radicales.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que satisfacen las siguientes condiciones:

I. Centro (0, 0) y radio 5.

II. Centro (2, −1) y radio 4

III. Centro (−2, −1) y radio 3

SOLUCIÓN I: $x^2 + y^2 = 25$

SOLUCIÓN II: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

SOLUCIÓN III: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

2. Hallar el centro y el radio de las circunferencias:

I. $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$

II. $2x^2 + 2y^2 - 12x - 16y + 50 = 0$

III. $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + \frac{1}{2} = 0$

IV. $x^2 + y^2 - 8x = 0$

V. $x^2 + y^2 + 3y = 0$

SOLUCIÓN I: $C(5, -4)\ ;\ r = 6$

SOLUCIÓN II: $C(3, 4)\ ;\ r = 0$

SOLUCIÓN III: $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\ ;\ r = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN IV: $C(4, 0)\ ;\ r = 4$

SOLUCIÓN V: $C\left(0, -\frac{3}{2}\right)\ ;\ r = \frac{3}{2}$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro C(−2, −1) y que pasa por el punto (1, 3).

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por centro C(−2, 3) y es tangente al eje de abscisas.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por centro C(3, −1) y es tangente al eje de ordenadas.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por centro C(1, 3) y es tangente a la recta $3x + 4y + 10 = 0$.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(6, 0); B(0, −6) y O(0, 0).

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $x + 2y = 0$, y pasa por los puntos A(0, 1) y B(4, 3).

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto de intersección de las rectas $x - 5y + 2 = 0$; $2x + 3y - 9 = 0$ y es tangente a la recta $4x + 3y - 5 = 0$.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles cuya altura es 5 cm y cuya base es el segmento que une los puntos A(−4, 0) y B(4, 0).

SOLUCIÓN: $5x^2 + 5y^2 - 9y - 80 = 0$

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(4, −2) y es tangente a los ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$
$x^2 + y^2 - 20x + 20y + 100 = 0$

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(1, 4) y es concéntrica a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$$

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$

13. Los puntos A(2, −1) y B(1, 4) son los extremos de un diámetro de una circunferencia. Hallar la ecuación de la circunferencia.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 2 = 0$

14. La recta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ forma un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

SOLUCIÓN: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

15. Calcular la potencia del punto P(5, 6) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

SOLUCIÓN: **Pot (P) = 101**

16. Calcular la potencia del punto P(3, 4) respecto de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 6$.

SOLUCIÓN: **Pot (P) = 20**

17. Hallar el eje radical de las circunferencias:

$x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$

SOLUCIÓN: **Eje radical:** $4x + 6y + 1 = 0$

18. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 12x + 2y + 29 = 0$

y comprobar si el punto P(3, −2) pertenece al eje radical.

SOLUCIÓN: $16x - 4y - 27 = 0\ ;\ P(3, 2) \notin$ **Eje radical**

19. Hallar el centro radical de las circunferencias:

$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$

$C_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

$C_3 \equiv x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$

SOLUCIÓN: **Centro radical (−3, −3)**

20. Hallar el centro radical de las circunferencias:

$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4y = 0$

$C_2 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$

$C_3 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$

SOLUCIÓN: **Centro radical (6, 1)**

21. Hallar la ecuación de la recta que contiene a la cuerda común de las circunferencias, y la longitud de dicha cuerda:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{6x + 8y - 9 = 0 \;;\; d = \frac{3}{5}\sqrt{91}}$

22. Hallar la posición relativa de la recta $y = x + 11$ con la circunferencia $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 157 = 0$.

SOLUCIÓN: **Recta secante**

23. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por tangente la recta $3x + 4y - 2 = 0$ y cuyo centro es el punto C(2, 4).

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0}$

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, 1) y B(−2, 3) y tiene su centro sobre la recta $x + y + 4 = 0$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0}$

25. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $2x - 3y + 9 = 0$; $3x - 2y + 1 = 0$, y que tiene su centro sobre la recta $x + 2y - 10 = 0$.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{13x^2 + 13y^2 - 156x - 52y + 295 = 0}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{13x^2 + 13y^2 - 52x - 104y + 259 = 0}$

26. Dados los puntos A(0, 2) y B(4, 0), hallar las coordenadas del punto de la circunferencia de diámetro AB, que equidiste de los ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN: **(0, 0) ; (3, 3) ; (1, −1)**

27. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $r = \sqrt{2}$, que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro está en la bisectriz del primer cuadrante.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0}$

28. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados son las rectas de las ecuaciones:

$$x + y - 8 = 0 \quad ; \quad 2x + y - 14 = 0 \quad ; \quad 3x + y - 22 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0}$

29. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ y que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

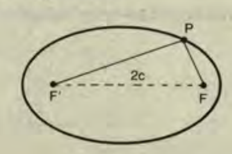
SOLUCIÓN: $\mathbf{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25}$

30. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y tiene de radio $r = 13$ y la abcisa de su centro es −12.

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0}$
$\mathbf{x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0}$

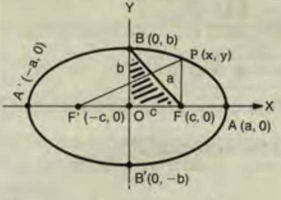
LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de distancias a dos puntos fijos del mismo es constante, e igual a 2a.



Focos: F y F'
Distancia focal: $\overline{FF'} = 2c$
$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$
Radios vectores: $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$

Ecuación de la elipse



La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textit{(Ecuación reducida)}$$

Eje mayor: $\overline{AA'} = 2a$
Eje menor: $\overline{BB'} = 2b$
Vértices: A (a, 0) ; A' (−a, 0) ; B (0, b) ; B' (0, −b)
Focos: F (c, 0) ; F' (−c, 0)

$a^2 = b^2 + c^2$; *por ser* $c < a$, *resulta:*

$$\textit{Excentricidad: } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

Intersección de la elipse con una recta

Se resuelve el sistema:

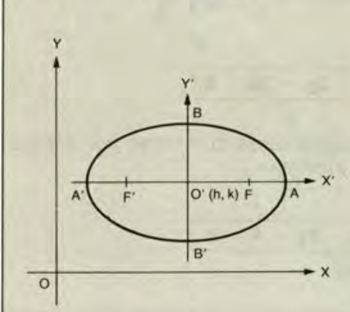
$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Dos soluciones reales distintas: Recta secante.
Una solución real doble: Recta tangente.
Ninguna solución real: Recta exterior.

Otras formas típicas de la ecuación de la elipse

La ecuación de la elipse de centro O' (h, k) *y ejes paralelos a los ejes de coordenadas es:*

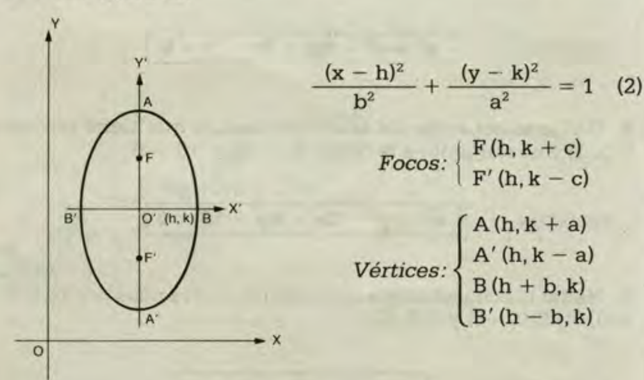
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$



Focos: $\begin{cases} F(h + c, k) \\ F'(h - c, k) \end{cases}$

Vértices: $\begin{cases} A(h + a, k) \\ A'(h - a, k) \\ B(h, k + b) \\ B'(h, k - b) \end{cases}$

Otra forma típica es:



$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Focos: $\begin{cases} F(h, k + c) \\ F'(h, k - c) \end{cases}$

Vértices: $\begin{cases} A(h, k + a) \\ A'(h, k - a) \\ B(h + b, k) \\ B'(h - b, k) \end{cases}$

De las ecuaciones (1) y (2), se deduce:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; A y C *mismo signo*

Se puede completar cuadrados en x e y, siempre que la constante del segundo miembro de la ecuación sea positiva, y adopte una de las formas (1) ó (2).

EJERCICIOS PROPUESTOS

31. Hallar los semiejes, coordenadas de los focos y la excentricidad de las siguientes elipses:

I. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$

II. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

III. $3x^2 + 5y^2 = 15$

IV. $4x^2 + 2y^2 = 9$

SOLUCIÓN I: **Semiejes: $a = 5$; $b = \sqrt{5}$**
Focos: $F(2\sqrt{5}, 0)$; $F'(-2\sqrt{5}, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

SOLUCIÓN II: **Semiejes: $a = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{2}$**
Focos: $F(1, 0)$; $F'(-1, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$

SOLUCIÓN III: **Semiejes: $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt{3}$**
Focos: $F(\sqrt{2}, 0)$; $F'(-\sqrt{2}, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

SOLUCIÓN IV: **Semiejes: $b = \frac{3}{2}$; $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$**
Focos: $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$; $F'\left(0, -\frac{3}{2}\right)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

32. Hallar la ecuación de la elipse sabiendo que el eje mayor $\overline{AA'}$ mide 9 cm y la distancia focal $\overline{FF'} = 8$ cm.

SOLUCIÓN: $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{17} = 1$

33. Hallar la ecuación de la elipse sabiendo que el eje menor $\overline{BB'}$ mide 4 cm y la distancia focal $\overline{FF'} = 4\sqrt{2}$ cm.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

34. Hallar la ecuación de la elipse conociendo su excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y la distancia focal $2c = 1$.

SOLUCIÓN $\frac{x^2}{1} + \frac{4y^2}{3} = 1$

35. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (6, 2) y (4, 3).

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$

36. Hallar la ecuación de la elipse que tiene de excentricidad $e = \frac{4}{5}$, siendo el semieje menor $b = 3$.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

37. Hallar la ecuación de la elipse sabiendo que la distancia focal es $2c = 6$ y que los radios vectores de uno de sus puntos son 2 y 8.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

38. Hallar el valor de k para que la recta $x + y - 4 = 0$ sea tangente a la elipse $x^2 + 3y^2 = 4k$.

SOLUCIÓN: **$k = 3$**

39. Hallar la posición relativa de la recta $x - y - 1 = 0$ respecto de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 11$.

SOLUCIÓN: **Recta secante**

40. Hallar la posición relativa de la recta $3x + 2y - 6 = 0$ respecto de la elipse $x^2 + 3y^2 = 3$.

SOLUCIÓN: **Recta exterior**

41. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto P(3, 4) y tiene de excentricidad $e = \frac{3}{5}$.

SOLUCIÓN: $16x^2 + 25y^2 = 544$

42. Partiendo de la ecuación reducida de la elipse, halla la ecuación de la recta que pasa por uno de los focos y por el punto de intersección de la elipse con el eje de ordenadas.

SOLUCIÓN: $bx + cy = bc$

43. Hallar los puntos de intersección de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$ con la recta $x - y + 1 = 0$.

SOLUCIÓN: **No hay puntos de intersección**

44. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son A (6, 0), A' (−6, 0) y los focos F (4, 0), F' (−4, 0).

SOLUCIÓN: $5x^2 + 9y^2 = 180$

45. Hallar los semiejes de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que tiene un foco de abscisa 12 y la diferencia de los semiejes es 8.

SOLUCIÓN: **Los semiejes son: $a = 13$; $b = 5$**

46. Hallar la intersección de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ con la circunferencia que tiene de centro O (0, 0), y que su diámetro es igual a la distancia focal.

SOLUCIÓN: **Recta secante**

47. Hallar la ecuación de la elipse cuyo centro es el punto (1, 2), foco (6, 2) y pasa por el punto (4, 6).

SOLUCIÓN: $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$

48. Hallar el centro, semiejes y focos de la elipse:

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$$

SOLUCIÓN: **Centro: $O'(6, -4)$**
Semiejes: $a = 6$; $b = 4$
Focos: $(6 \pm 2\sqrt{5}, -4)$

49. Hallar el centro, semiejes, focos y excentricidad de la elipse:

$$\frac{(x+5)^2}{81} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

SOLUCIÓN: **Centro: $O'(-5, 3)$**
Semiejes: $a = 9$; $b = 4$
Focos: $(-5 \pm \sqrt{65}, 3)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{65}}{9}$

50. Hallar la ecuación de la elipse con centro en $(-1, -1)$, vértice $(5, -1)$ y excentricidad $\frac{2}{3}$.

SOLUCIÓN: $$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$$

51. Hallar el centro, semiejes, vértices, focos y excentricidad de la elipse $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y = 11$.

SOLUCIÓN:

Centro: O′ $(-2, 1)$
Semiejes: $a = 3$; $b = 2$
Focos: $(-2 \pm \sqrt{5}, 1)$
Vértices: $(1, 1)$; $(-5, 1)$; $(-2, 3)$ y $(-2, -1)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

52. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(2, 1)$, distancia focal 16 y eje mayor 20.

SOLUCIÓN: $$\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$$

53. Hallar la ecuación de la elipse de focos $(4, 0)$; $(-4, 0)$ y eje mayor 10.

SOLUCIÓN: $$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

54. Hallar la ecuación de la elipse de vértices $(0, -4)$; $(0, 2)$, sabiendo que uno de los focos está en el origen.

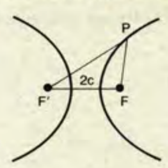
SOLUCIÓN: $$\frac{x^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

55. En la elipse de ecuación $x^2 + 5y^2 = 16$ se inscribe un triángulo equilátero, uno de cuyos vértices coincide con el de la elipse en la región positiva del eje OX, hallar las coordenadas de sus vértices.

SOLUCIÓN: **$A(4, 0)$; $B(1, \sqrt{3})$; $C(1, -\sqrt{3})$**

LA HIPÉRBOLA

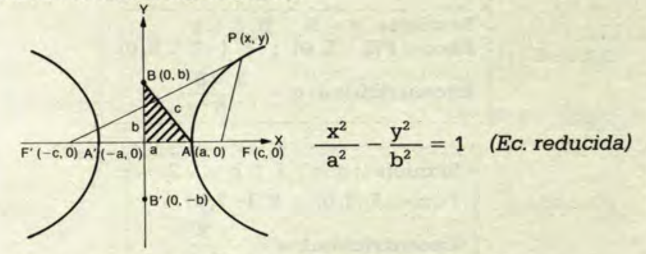
La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos del mismo es constante e igual a 2a.



Focos: F y *F′*
Distancia focal: $\overline{FF'} = 2c$
$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$
Radios vectores: $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$

Ecuación de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola es:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textit{(Ec. reducida)}$$

Eje real o transverso: $\overline{AA'} = 2a$
Eje imaginario o no transverso: $\overline{BB'} = 2b$
Vértices: $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$; $B(0, b)$; $B'(0, -b)$
$c^2 = a^2 + b^2$; *por ser* $c > a$, *resulta:*

$$\textit{Excentricidad: } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

Intersección de la hipérbola con una recta

Se resuelve el sistema.

Las soluciones del sistema nos darán:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Dos soluciones reales distintas, o una solución real simple: Recta secante.
Una solución real doble: Recta tangente.
Ninguna solución real: Recta exterior.

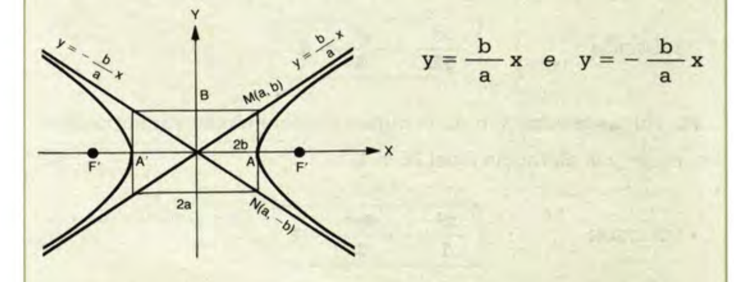
Hipérbolas conjugadas

La hipérbola conjugada de:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textit{es:} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \textit{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Asíntotas de la hipérbola

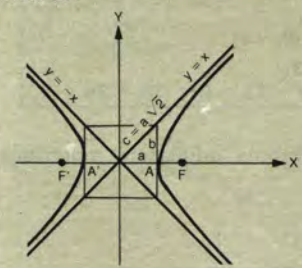
Las ecuaciones de las asíntotas son:



$$y = \frac{b}{a}x \quad e \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Hipérbola equilátera

Es la que tiene iguales sus dos semiejes b = a ; *luego su ecuación es:*



$$x^2 - y^2 = a^2$$

Asíntotas: $y = x \; ; \; y = -x$

Semieje focal: $c = a\sqrt{2}$

Excentricidad: $e = \sqrt{2}$

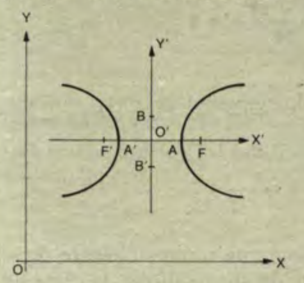
Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas

La ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas o ecuación asintótica es:

$$x \cdot y = k \quad \textit{siendo} \quad k = \frac{a^2}{2}$$

Otras formas típicas de la ecuación de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola de centro O' (h, k) *y ejes paralelos a los ejes de coordenadas es:*



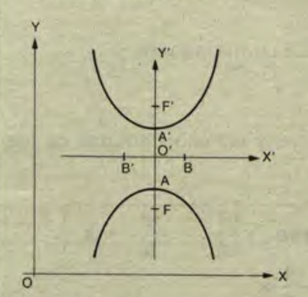
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Focos: $\begin{cases} F\,(h + c, k) \\ F'\,(h - c, k) \end{cases}$

Vértices: $\begin{cases} A\,(h + a, k) \\ A'\,(h - a, k) \\ B\,(h, k + b) \\ B'\,(h, k - b) \end{cases}$

Asíntotas: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$ para: (1) y (2)

La otra forma es:



$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Focos: $(h, k - c) \; ; \; (h, k + c)$

Vértices: $\begin{cases} (h, k - a) \; ; \; (h, k + a) \\ (h + b, k) \; ; \; (h - b, k) \end{cases}$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A y C *distinto signo.*

En esta ecuación se pueden completar cuadrados en x *e* y*, reduciéndose a una de las formas (1) o (2), excepto en el caso de que se llegue a una expresión en la que el primer miembro sea una diferencia de cuadrados y el segundo miembro sea cero.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

56. Hallar los semiejes, los focos y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

I. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ **II.** $3x^2 - 4y^2 = 4$

III. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ **IV.** $4x^2 - 9y^2 = 36$

SOLUCIÓN I:

Semiejes: $a = 5 \; ; \; b = 2$
Focos: $(\pm\sqrt{29}, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$

SOLUCIÓN II:

Semiejes: $a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \; ; \; b = 1$
Focos: $\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{3}, 0\right)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

SOLUCIÓN III:

Semiejes: $a = 4 \; ; \; b = 3$
Focos: $(0, \pm 5)$
Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$

SOLUCIÓN IV:

Semiejes: $a = 3 \; ; \; b = 2$
Focos: $(\pm\sqrt{13}, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

57. Hallar la ecuación de la hipérbola sabiendo el eje real $\overline{AA'} = 6$ y la distancia focal $\overline{FF'} = 8$.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

58. Hallar la ecuación de la hipérbola sabiendo que el eje no transverso mide $\overline{BB'} = 4$ y la distancia focal $\overline{FF'} = 2\sqrt{29}$.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

59. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos (4, 0); (−4, 0) y el eje real es igual a 6.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

60. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos (4, 3) y (2, 1).

SOLUCIÓN: $2x^2 - 3y^2 = 5$

61. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (2, 3) y tiene de distancia focal 2c = 4.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

62. Hallar la ecuación de la hipérbola conociendo su excentricidad $e = 2\sqrt{2}$ y la distancia focal 2c = 12.

SOLUCIÓN: $14x^2 - 2y^2 = 63$

63. Hallar la posición relativa de la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 9$ y la recta $x - 2y - 1 = 0$.

SOLUCIÓN: **Recta secante**

64. Hallar la posición relativa de la hipérbola $3x^2 - 8y^2 = 19$ y la recta $3x - 4y - 5 = 0$.

SOLUCIÓN: **Recta secante**

65. Hallar la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene de distancia focal $2c = 24$.

SOLUCIÓN: $x^2 - y^2 = 72$

66. Hallar la ecuación de la hipérbola conjugada de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$.

SOLUCIÓN: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

67. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola:

$$4x^2 - 8y^2 = 1.$$

SOLUCIÓN: $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$

68. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola:

$$8x^2 - 6y^2 = 48.$$

SOLUCIÓN: $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$

69. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, por asíntotas las rectas $y = \pm \frac{3}{4} x$, pasando por el punto (2, 1).

SOLUCIÓN: $9x^2 - 16y^2 = 20$

70. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en (0, 0) pasa por el punto (5, 2) y tiene por asíntotas las rectas $y = \pm \frac{1}{2} x$.

SOLUCIÓN: $x^2 - 4y^2 = 9$

71. Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, hallar:

I. Las coordenadas de los focos.

II. Las coordenadas de los vértices.

III. La excentricidad.

IV. Las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN:

Focos: $F(\sqrt{13}, 0)$; $F'(-\sqrt{13}, 0)$

Vértices: $A(2, 0)$; $A'(-2, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{2} x$

72. Dada la ecuación de la hipérbola equilátera de ecuación asintótica $xy = 6$, hallar:

I. Las coordenadas de los focos.

II. Las coordenadas de los vértices.

III. La ecuación de la hipérbola referida a los ejes.

SOLUCIÓN:

Focos: $F(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$; $F'(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$

Vértices: $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$; $A'(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$

Ecuación de la hipérbola: $x^2 - y^2 = 12$

73. Hallar el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola de ecuación: $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 36$.

SOLUCIÓN:

Centro: $O'(2, -3)$;

Vértices: $(4, -3)$; $(0, -3)$

Focos: $(2 \pm \sqrt{13}, -3)$

Asíntotas: $3x - 2y - 12 = 0$; $3x + 2y = 0$

74. Dada la ecuación de la hipérbola equilátera asintótica $xy = 18$, hallar:

I. Las coordenadas de los focos.

II. Las coordenadas de los vértices.

III. La ecuación de la hipérbola referida a los ejes.

SOLUCIÓN:

Focos: $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2})$

Vértices: $(\pm 3\sqrt{2}, \pm 3\sqrt{2})$

Ecuación hipérbola: $x^2 - y^2 = 36$

75. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene de centro el punto (−4, 1), de vértice (2, 1) y su eje no transverso es 8.

SOLUCIÓN: $\frac{(x+4)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

76. Hallar el valor de «a» para que la ecuación $ax^2 - 4y^2 = 9$ sea una hipérbola equilátera.

SOLUCIÓN: $a = 4$

77. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un vértice en (6, 0) y por una de sus asíntotas la recta de ecuación $y = \frac{4}{3} x$

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

78. Hallar la ecuación de la hipérbola conjugada de:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Hallar las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los focos de ambas hipérbolas.

SOLUCIÓN:

Hipérbola conjugada: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

Asíntotas: $y = \pm \frac{4}{3} x$

Focos: $(\pm 5, 0)$; $(0, \pm 5)$

79. Dada la hipérbola $5x^2 - 4y^2 + 10x + 8y = 19$, hallar:

I. Las coordenadas del centro.

II. Las coordenadas de los focos.

III. Las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN:

Centro: $(-1, 1)$

Focos: $(2, 1)$; $(-4, 1)$

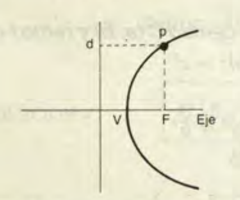
Asíntotas: $y - 1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x + 1)$

80. Hallar las ecuaciones de dos hipérbolas conjugadas, sabiendo que el punto $P\left(2, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ se halla sobre la que tiene por eje real el eje de abscisas y el punto $Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}\right)$ sobre la otra.

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$; $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$

LA PARÁBOLA

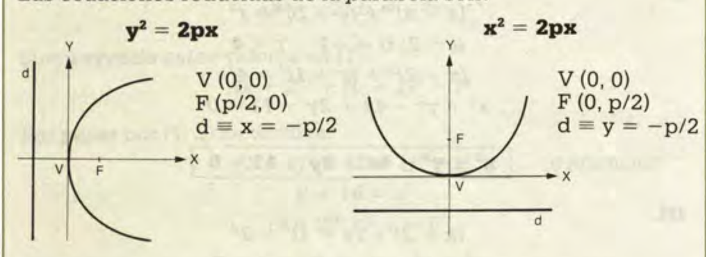
La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



F: *foco.*
d: *directriz.*
$\overline{Fd} = p$: *parámetro.*

Ecuación de la parábola

Las ecuaciones reducidas de la parábola son:

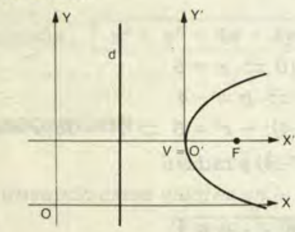


$y^2 = 2px$ — V (0, 0); F (p/2, 0); $d \equiv x = -p/2$

$x^2 = 2py$ — V (0, 0); F (0, p/2); $d \equiv y = -p/2$

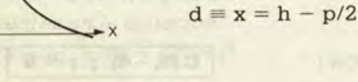
Otras fomas típicas de la ecuación de la parábola

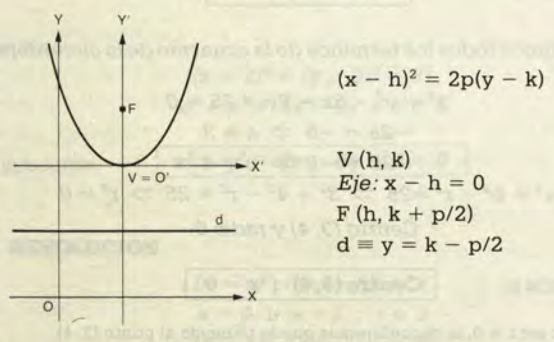
Las ecuaciones de las parábolas cuyos ejes son paralelos al eje X y al eje Y son:



$(y - k)^2 = 2p(x - h)$

V (h, k)
Eje: $y - k = 0$
F (h + p/2, k)
$d \equiv x = h - p/2$





$(x - h)^2 = 2p(y - k)$

V (h, k)
Eje: $x - h = 0$
F (h, k + p/2)
$d \equiv y = k - p/2$

Intersección de la parábola con una recta

Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones, resultando una ecuación de segundo grado:

Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ *Recta secante: Dos puntos de intersección.*
Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ *Recta tangente: Un punto de intersección.*
Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ *Recta exterior: Ningún punto de intersección.*

Δ = discriminante de la ecuación de segundo grado = $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

81. Determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de las parábolas siguientes:

I. $y^2 = 4x$
II. $y^2 + x = 0$
III. $x^2 - y = 0$

SOLUCIÓN I: **Foco: (1, 0)**; **Directriz: $x = -1$**

SOLUCIÓN II: **Foco: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$**; **Directriz: $x = \frac{1}{4}$**

SOLUCIÓN III: **Foco: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$**; **Directriz: $y = -\frac{1}{4}$**

82. Hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola de ecuación $3y^2 = 8x$.

SOLUCIÓN: **Foco: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$**; **Directriz: $x = -\frac{2}{3}$**

83. Hallar la ecuación de la parábola de vértice (0, 0) y foco (−2, 0).

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{y^2 = -8x}$

84. Determinar el valor de p, de modo que la parábola $y^2 = 2px$ pase por el punto (−1, 2).

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{p = -2}$

85. Hallar los puntos de intersección de la parábola $y^2 = 9x$ con la recta $y = 2x + 4$.

SOLUCIÓN: **Recta exterior**

86. Hallar la ecuación de la parábola de vértice (2, 4) y de directriz $x = 1$.

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{y^2 - 8y - 4x + 24 = 0}$

87. Hallar la ecuación de la parábola que tiene de vértice V(0, 0), de eje el de ordenadas y que pasa por el punto (6, −3).

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{x^2 = -12y}$

88. Hallar la ecuación de la parábola de vértice V (2, 1) y foco F(4, 1).

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{y^2 - 2y - 8x + 17 = 0}$

89. Hallar la ecuación de la parábola que tiene de F(0, −3) y de directriz la recta $y - 3 = 0$.

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{x^2 + 12y = 0}$

90. Hallar la ecuación de la parábola de foco (6, −2) y de directriz $x = 2$.

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{y^2 + 4y - 8x + 36 = 0}$

91. Dada la parábola $(y - 2)^2 = 12(x + 3)$, hallar:

I. Eje de la parábola.
II. Coordenadas del vértice.
III. Coordenadas del foco.
IV. Ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN:

Eje parábola: $y = 2$
Vértice: $V(-3, 2)$
Foco: $F(0, 2)$
Directriz: $x = -6$

92. Dada la parábola $x^2 + 12x - 4y - 8 = 0$, hallar:

I. Eje de la parábola.
II. Coordenadas del vértice.
III. Coordenadas del foco.
IV. Ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN:

Eje parábola: $x = -6$
Vértice: $V(-6, -11)$
Foco: $F(-6, -10)$
Directriz: $y + 12 = 0$

93. Halla el vértice, foco y directriz de la parábola de ecuación:

$$y^2 + 6y - 8x - 31 = 0$$

SOLUCIÓN:

Vértice: $V(-5, -3)$
Foco: $F(-3, -3)$
Directriz: $x = -7$

94. Halla el foco y la directriz de la parábola de ecuación:

$$x^2 - 2x - 6y - 11 = 0$$

SOLUCIÓN:

Foco: $F(1, -1/2)$
Directriz: $2y + 7 = 0$

95. Dada la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $2x - y - 1 = 0$, hallar los valores de «p» para que dicha recta sea secante, tangente y exterior a la parábola.

SOLUCIÓN:

Secante: $\Delta > 0$; $p > 0$, $p < -4$
Tangente: $\Delta = 0$; $p = -4$
Exterior: $\Delta < 0$; $0 > p > -4$

96. En la parábola de ecuación $y^2 = 2px$ se inscribe un triángulo equilátero, de forma que uno de sus vértices está en el origen. ¿Cuál es la longitud de sus lados?

SOLUCIÓN: **$l = 4p\sqrt{3}$**

97. Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje de abscisas que pasa por los puntos $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(-1, 3)$.

SOLUCIÓN: **$5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$**

98. Hallar la ecuación de la parábola que tiene de vértice $(2, 3)$, eje paralelo al eje de ordenadas, y que pasa por el punto $(4, 5)$.

SOLUCIÓN: **$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$**

99. Hallar el valor de «b» para que la recta $y = \frac{4}{3}x + \frac{b}{3}$ sea tangente a la parábola de ecuación $3x^2 + 10x - 3y + 4 = 0$.

SOLUCIÓN: **$b = 1$**

100. Dada la parábola de ecuación $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$, hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN:

Vértice: $V(-2, -4)$
Foco: $F(-1/2, -4)$
Directriz: $x = -7/2$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

I. *La ecuación de la circunferencia de centro C (a, b) y radio r es:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Por ser a = 0; b = 0 ; r = 5, resulta:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

SOLUCIÓN I: **$x^2 + y^2 = 25$**

II.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$a = 2;\ b = -1\ ;\ r = 4$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

SOLUCIÓN II: **$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$**

III.

$$(x + 2) + (y + 1)^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$$

SOLUCIÓN III: **$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$**

2. RESOLUCIÓN

I.

$$-2a = -10 \Rightarrow a = 5$$
$$-2b = 8 \Rightarrow b = -4$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = 5 \Rightarrow 5^2 + (-4)^2 - r^2 = 5 \Rightarrow r^2 = 36;\ r = 6$$

Centro (5, −4) y radio 6

SOLUCIÓN I: **$C(5, -4)$; $r = 6$**

II. *Dividimos todos los términos de la ecuación de la circunferencia por 2:*

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$
$$-2a = -6 \Rightarrow a = 3$$
$$-2b = -8 \Rightarrow b = 4$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = 25 \Rightarrow 3^2 + 4^2 - r^2 = 25 \Rightarrow r^2 = 0$$

Centro (3, 4) y radio 0

SOLUCIÓN II: **Centro $(3, 4)$; $r = 0$**

NOTA: Por ser $r = 0$, la circunferencia queda reducida al punto $(3, 4)$.

III. *Dividimos todos los términos por 2:*

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$$
$$-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
$$-2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - r^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

Centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *y radio* $\frac{1}{2}$

SOLUCIÓN III: **$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $r = \frac{1}{2}$**

IV.

$$-2a = -8 \Rightarrow a = 4$$
$$-2b = 0 \Rightarrow b = 0$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow 4^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm 4$$

Centro (4, 0) y radio 4

SOLUCIÓN IV: **$C(4, 0)$; $r = 4$**

V.

$$-2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$-2b = 3 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\frac{3}{2}$$

$$\text{Centro } \left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ y radio } \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN V: $\boxed{\mathbf{C\left(0, -\frac{3}{2}\right); \ r = \frac{3}{2}}}$

3. RESOLUCIÓN

Sea la circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$

$$a = -2; b = -1$$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

Por pasar por (1, 3) se verifica:

$$(1 + 2)^2 + (3 + 1)^2 = r^2$$
$$9 + 16 = r^2$$
$$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

Sustituyendo los valores de $a = -2$; $b = -1$ *y* $r = 5$ *en (1)*

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0}}$

4. RESOLUCIÓN

$$a = -2; b = 3 \text{ y } r = 3$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

resulta:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0}}$

5. RESOLUCIÓN

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$a = 3; b = -1 \ ; \ r = 3$$
$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0}}$

6. RESOLUCIÓN

El radio es la distancia del centro a la recta:

$$r = \left|\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 10}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \frac{25}{5} = 5$$

$$a = 1; b = 3 \ ; \ r = 5$$
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0}}$

7. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO:

Sea la circunferencia: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad (1)$

Por pasar por los puntos dados, se verifica:

$$\left.\begin{array}{r} 36 + 6m + p = 0 \\ 36 - 6n + p = 0 \\ p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 0; m = -6; n = 6$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$$

SOLUCIÓN PRIMER MÉTODO: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0}}$

SEGUNDO MÉTODO:

Sea la circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ *(2) que pasa por los puntos dados:*

$$\left.\begin{array}{r} (6 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \\ (0 - a)^2 + (-6 - b)^2 = r^2 \\ (0 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 36 - 12a + a^2 + b^2 = r^2 \\ a^2 + 36b + 12b + b^2 = r^2 \\ a^2 + b^2 = r^2 \end{array}\right\}$$

Resuelto este sistema, obtenemos los valores de:

$$a = 3; b = -3; r = 3\sqrt{2}$$

que sustituidos en (2), resulta:

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$$

SOLUCIÓN SEGUNDO MÉTODO: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0}}$

8. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO:

Sea la circunferencia: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$

Por pasar por A(0, 1): $1 + n + p = 0 \quad (1)$

Por pasar por B(4, 3): $16 + 9 + 4m + 3n + p = 0 \quad (2)$

$$\text{Las coordenadas del centro son: } \begin{cases} -2a = m \Rightarrow a = -\dfrac{m}{2} \\ -2b = n \Rightarrow b = -\dfrac{n}{2} \end{cases}$$

y como pertenece a la recta $x + 2y = 0$, *se verifica:*

$$-\frac{m}{2} + 2\left(-\frac{n}{2}\right) = 0 \Rightarrow m + 2n = 0 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} 1 + n + p = 0 \\ 25 + 4m + 3n + p = 0 \\ m + 2n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = -8; n = 4; p = -5$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación dada, resulta:

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$$

SOLUCIÓN PRIMER MÉTODO: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0}}$

SEGUNDO MÉTODO:

Mediatriz de $\overline{AB} \equiv \sqrt{(x + 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2}$

$$x^2 + (y - 1)^2 = (x - 4)^2 + (y - 3)^2$$
$$2x + y - 6 = 0$$

Su intersección con la recta $x + 2y = 0$, *nos dará el centro de la circunferencia.*

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 6 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = 4; y = -2$$

El centro C (4, −2)

El radio será la distancia de C (4, −2) a A (0, 1)

$$r = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Sustituyendo los valores del centro y del radio en la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

tenemos la circunferencia pedida:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

SOLUCIÓN SEGUNDO MÉTODO: $\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0}}$

9. RESOLUCIÓN

Intersección de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = 3; y = 1$$

El centro es C (3, 1)

El radio es la distancia de C (3, 1) a recta tangente,

$$4x + 3y - 5 = 0$$

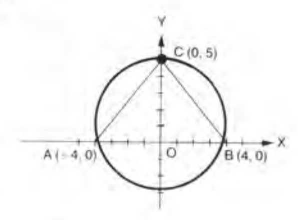
$$r = \left| \frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0}$

10. RESOLUCIÓN



Sea la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

Por pasar por los puntos dados, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} 25 + 5n + p &= 0 \\ 16 - 4m + p &= 0 \\ 16 + 4m + p &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = 0; n = -\frac{9}{5}; p = -16$$

La ecuación pedida es:

$$x^2 + y^2 - \frac{9}{5}y - 16 = 0$$
$$5x^2 + 5y^2 - 9y - 80 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{5x^2 + 5y^2 - 9y - 80 = 0}$

11. RESOLUCIÓN

Sea la circunferencia:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Por pasar por A(4, −2):

$$(4 - a)^2 + (-2 - b)^2 = r^2$$

Las coordenadas del centro serán iguales en valor absoluto y signo contrario, e iguales al radio:

$$a = -b = r$$

luego:

$$(4 - a)^2 + (-2 + a)^2 = a^2$$
$$a^2 - 12a + 20 = 0$$
$$a_1 = 2; a_2 = 10$$
$$\text{Como } a_1 = r_1 = 2; a_2 = r_2 = 10$$

Las ecuaciones de las circunferencias de radios $r_1 = 2$; $r_2 = 10$ son:

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$$
$$(x - 10)^2 + (y + 10)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 20x + 20y + 100 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0}$
$\mathbf{x^2 + y^2 - 20x + 20y + 100 = 0}$

12. RESOLUCIÓN

Las coordenadas del centro de la circunferencia dada son:

$$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$$
$$-2b = -4 \Rightarrow b = 2$$

El radio de la circunferencia pedida es:

$$r = \sqrt{(1 + 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Por ser circunferencias concéntricas, tienen el mismo centro, luego la ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{5})^2$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0}$

13. RESOLUCIÓN

El centro C es el punto medio de $\overline{AB}$

$$a = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} \ ; \ b = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}$$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos dados:

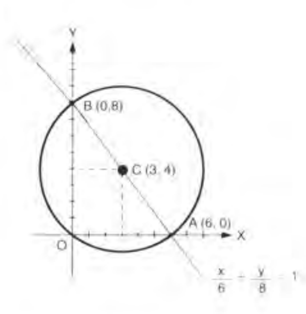
$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

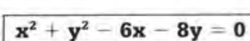
La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right) = \frac{26}{4}$$
$$x^2 + y^2 - 3x - 3y - 2 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 3x - 3y - 2 = 0}$

14. RESOLUCIÓN





PRIMER MÉTODO:

La ecuación pedida pasa por los puntos:

$$O (0, 0) \ ; \ A (6, 0) \ ; \ B (0, 8)$$

$$\left.\begin{aligned} (0 - a)^2 + (0 - b)^2 &= r^2 \\ (6 - a)^2 + (0 - b)^2 &= r^2 \\ (0 - a)^2 + (8 - b)^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r^2 \\ 36 - 12a + a^2 + b^2 &= r^2 \\ a^2 + 64 - 16b + b^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 4 \\ r &= 5 \end{aligned}$$

La ecuación es:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0}$

SEGUNDO MÉTODO:

El centro C es el punto medio de $\overline{AB}$

$$a = \frac{6 + 0}{2} = 3 \ ; \quad b = \frac{0 + 8}{2} = 4$$

El radio es la mitad de la hipotenusa $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

luego:

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0}$

15. RESOLUCIÓN

$$\text{Pot (P)} = 5^2 + 6^2 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 - 4 = 101$$

SOLUCIÓN: **Pot (P) = 101**

16. RESOLUCIÓN

$$\text{Pot (P)} = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$$

luego:

$$\text{Pot (P)} = (3 - 2)^2 + (4 + 1)^2 - 6 = 20$$

SOLUCIÓN: **Pot (P) = 20**

17. RESOLUCIÓN

El eje radical se obtiene restando ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 6x \qquad - 1 = 0 \\ -x^2 - y^2 + 2x - 6y \qquad = 0 \\ \hline -4x - 6y - 1 = 0 \\ 4x + 6y + 1 = 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: **Eje radical: $4x + 6y + 1 = 0$**

18. RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0 \\ -x^2 - y^2 + 12x - 2y - 29 = 0 \\ \hline 16x - 4y - 27 = 0 \end{array}$$

El punto P(3, −2) no pertenece al eje radical porque no satisface a su ecuación:

$$16 \cdot 3 - 4(-2) - 27 = 29 \neq 0$$

SOLUCIÓN: **$16x - 4y - 27 = 0$; P (3, 2) $\notin$ Eje radical**

19. RESOLUCIÓN

El eje radical de las (C_1) y (C_2) es: $x - y = 0$
El eje radical de las (C_1) y (C_3) es: $7x - 3y + 12 = 0$
El eje radical de las (C_2) y (C_3) es: $x + 3 = 0$
Resolviendo un sistema de dos de esas ecuaciones tendremos el centro radical:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = -3 \ ; \ y = -3$$

SOLUCIÓN: **Centro radical (−3, −3)**

20. RESOLUCIÓN

El eje radical de las C_1 y C_2 es: $y - 1 = 0$
El eje radical de las C_1 y C_3 es: $x - 2y - 4 = 0$
Centro radical:

$$\left.\begin{array}{r} y - 1 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = 6 \ ; \ y = 1$$

SOLUCIÓN: **Centro radical (6, 1)**

21. RESOLUCIÓN

La ecuación de la cuerda común es la ecuación del eje radical:

$$6x + 8y - 9 = 0$$

La intersección de una circunferencia con el eje radical, nos dará los puntos de intersección de las dos circunferencias:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ 6x + 8y - 9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{27 \pm 12\sqrt{91}}{50} \ ; \quad y = \frac{36 \pm 9\sqrt{91}}{50}$$

La distancia entre dos puntos es:

$$d = \sqrt{\left(\frac{27 + 12\sqrt{91}}{50} - \frac{27 - 12\sqrt{91}}{50}\right)^2 + \left(\frac{36 + 9\sqrt{91}}{50} - \frac{36 - 9\sqrt{91}}{50}\right)^2} = \frac{3}{5}\sqrt{91}$$

SOLUCIÓN: **$6x + 8y - 9 = 0$; $d = \frac{3}{5}\sqrt{91}$**

22. RESOLUCIÓN

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 16x + 4y - 157 = 0 \\ y = x + 11 \end{array}\right|$$

$$x^2 + (x + 11)^2 - 16x + 4(x + 11) - 157 = 0$$
$$2x^2 + 10x + 8 = 0$$
$$x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$x_1 = -1 \ ; \ x_2 = -4$$
$$y_1 = 10 \ ; \ y_2 = 7$$

Los puntos de intersección son: A(−1, 10) y B(−4, 7)
La recta y la circunferencia son secantes

SOLUCIÓN: **Recta secante**

23. RESOLUCIÓN

$$\text{El radio } r = \left|\frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

SOLUCIÓN: **$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$**

24. RESOLUCIÓN

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Ecuación de la mediatriz de $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$$
$$2x - y + 2 = 0$$

Coordenadas del centro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 4 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow C(-2, -2)$$

El radio $r = d(C, A) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$$

SOLUCIÓN: **$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$**

25. RESOLUCIÓN

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

El radio es la distancia de C (a, b) a las tangentes dadas:

$$r = \left|\frac{2a - 3b + 9}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{2a - 3b + 9}{\sqrt{13}}\right| \quad (1)$$

$$r = \left|\frac{3a - 2b + 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = \left|\frac{3a - 2b + 1}{\sqrt{13}}\right| \quad (2)$$

Por tener su centro C(a, b) en la recta $x + 2y - 10$, se verifica

$$a + 2b - 10 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3), resulta:

$$a_1 = 6; \ b_1 = 2; \ r_1 = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

La ecuación es: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{13}}\right)^2$

$$13x^2 + 13y^2 - 156x - 52y + 295 = 0$$

SOLUCIÓN I: **$13x^2 + 13y^2 - 156x - 52y + 295 = 0$**

La otra solución: $a_2 = 2; \ b_2 = 4$ y $r_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}$

SOLUCIÓN II: **$13x^2 + 13y^2 - 52x - 104y + 259 = 0$**

26. RESOLUCIÓN

El centro C (a, b) es el punto medio de $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{0 + 4}{2} = 2 \\ b = \dfrac{2 + 0}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C(2, 1)$$

El radio es:

$$r = d(C, A) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{5}$$

La ecuación de la circunferencia de centro C (2, 1) y $r = \sqrt{5}$ es:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Los puntos que equidistan de los ejes de coordenadas verifican a las ecuaciones $y = x$ o bien $y = -x$, luego:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow (0, 0) \text{ y } (3, 3)$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow (0, 0) \text{ y } (1, -1)$$

SOLUCIÓN: **(0, 0) ; (3, 3) ; (1, −1)**

27. RESOLUCIÓN

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Por ser $b = a$, las coordenadas del centro son $C(a, a)$, y por tener de radio $r = \sqrt{2}$, resulta:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2a^2 - 2 = 0$$

Por pasar por el origen $O(0, 0)$:

$$2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$a = -1$ no sirve, no pertenece al primer cuadrante.
La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0}$

28. RESOLUCIÓN

Resolviendo los sistemas formados por estas ecuaciones tomadas dos a dos, se obtienen las coordenadas de los vértices:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 8 = 0 \\ 2x + y - 14 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (6, 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 8 = 0 \\ 3x + y - 22 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (7, 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 14 = 0 \\ 3x + y - 22 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (8, -2)$$

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación general de la circunferencia: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ (1), resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 36 + 4 + 6m + 2n + p = 0 \\ 49 + 1 + 7m + n + p = 0 \\ 64 + 4 + 8m - 2n + p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = -6; n = 4; p = -12$$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0}$

29. RESOLUCIÓN

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$$

son:

$$\left.\begin{array}{r} -2a = -4 \Rightarrow a = 2 \\ -2b = 6 \Rightarrow b = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(2, -3) \quad (2)$$

El radio de la circunferencia pedida es:

$$r = \left|\frac{3 \cdot 2 - 4(-3) + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \frac{25}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5 \quad (3)$$

Sustituyendo los valores obtenidos (2) y (3) en la circunferencia (1), resulta:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{(x^2 - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25}$

30. RESOLUCIÓN

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (-12)^2 + b^2 - 13^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 25$$

luego:

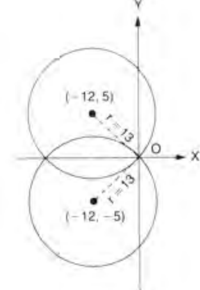
$$b = 5; \quad b = -5$$

Las ecuaciones pedidas son:

$$(x + 12)^2 + (y - 5)^2 = 13^2 \ ; \ (x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 13^2$$

o sea: $x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0 \ ; \ x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0}$
$\mathbf{x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0}$



31. RESOLUCIÓN

I. *Semiejes:*

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

Focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$F(2\sqrt{5}, 0) \text{ y } F'(-2\sqrt{5}, 0)$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

SOLUCIÓN I:
Semiejes: $a = 5$; $b = \sqrt{5}$
Focos: $F(2\sqrt{5}, 0)$; $F'(-2\sqrt{5}, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

II. *Semiejes:*

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

Focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3 - 2} = 1$$

$$F(1, 0) \text{ y } F'(-1, 0)$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

SOLUCIÓN II:
Semiejes: $a = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{2}$
Focos: $F(1, 0)$; $F'(-1, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$

III.

$$3x^2 + 5y^2 = 15$$

$$\frac{3x^2}{15} + \frac{5y^2}{15} = 1$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Semiejes:

$$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

$$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

Focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}$$

$$F(\sqrt{2}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{2}, 0)$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

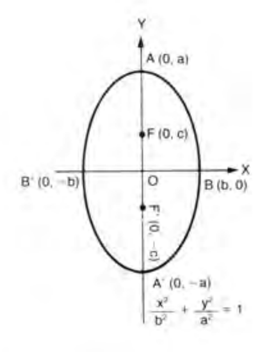
SOLUCIÓN III:
Semiejes: $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt{3}$
Focos: $F(\sqrt{2}, 0)$; $F'(-\sqrt{2}, 0)$
Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

IV.

$$4x^2 + 2y^2 = 9$$

$$\frac{4x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$$



Semiejes:

$$b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$F\left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ y } F'\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN IV:

Semiejes: $\mathbf{b = \frac{3}{2}}$ **;** $\mathbf{a = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

Focos: $\mathbf{F\left(0, \frac{3}{2}\right)}$ **;** $\mathbf{F'\left(0, -\frac{3}{2}\right)}$

Excentricidad: $\mathbf{e = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

32. RESOLUCIÓN

$$2a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{81}{4} - 16} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{17} = 1$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{17} = 1}$

33. RESOLUCIÓN

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$2c = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1}$

34. RESOLUCIÓN

$$2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

o sea:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{4y^2}{3} = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^2}{1} + \frac{4y^2}{3} = 1}$

35. RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Por pasar por } (6, 2): \ \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ &\text{Por pasar por } (4, 3): \ \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 = 52; \ b^2 = 13$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1}$

36. RESOLUCIÓN

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 = 9 + \frac{16}{25}a^2$$

$$a^2\left(1 - \frac{16}{25}\right) = 9 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$c = \frac{4}{5} \cdot 5 = 4$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$

37. RESOLUCIÓN

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$2a = 2 + 8 = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

38. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 4k \\ x + y - 4 &= 0 \end{aligned}\right|$$

Resolviendo el sistema se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 6x + 12 - k = 0$$

El discriminante de esta ecuación tiene que ser igual a cero:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1(12 - k) = 0 \Rightarrow k = 3$$

SOLUCIÓN: **k = 3**

39. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 + 3y^2 = 11 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = 1 + y \quad (1)$$

$$2(1 + y)^2 + 3y^2 = 11$$

$$2(1 + 2y + y^2) + 3y^2 - 11 = 0$$

$$2 + 4y + 2y^2 + 3y^2 - 11 = 0$$

$$5y^2 + 4y - 9 = 0$$

$$y_1 = 1; \quad y_2 = -\frac{9}{5}$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{4}{5}$$

La recta corta a la elipse en dos puntos (2, 1) y $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, *luego es secante.*

SOLUCIÓN: **Recta secante**

40. RESOLUCIÓN

Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 3y^2 = 3 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{array}\right|$$

Se despeja de la segunda ecuación una de las incógnitas:

$$2y = 6 - 3x \Rightarrow y = \frac{6 - 3x}{2}$$

y con este valor, se sustituye en la otra ecuación:

$$x^2 + 3\left(\frac{6 - 3x}{2}\right)^2 = 3$$

$$x^2 + 3 \cdot \frac{36 - 36x + 9x^2}{4} = 3$$

$$4x^2 + 108 - 108x + 27x^2 = 12$$

$$31x^2 - 108x + 96 = 0$$

$$x = \frac{108 \pm \sqrt{-240}}{62} \quad \text{No tiene solución real.}$$

SOLUCIÓN: **Recta exterior**

41. RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por pasar por (3, 4):

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Siendo; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; $e = \frac{3}{5}$, *resulta:*

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{9}{25} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \\ \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{9}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 34; \ b^2 = \frac{544}{25}$$

44. RESOLUCIÓN

$$a = 6; \ c = 4$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{5})^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$20x^2 + 36y^2 = 720$$

$$5x^2 + 9y^2 = 180$$

SOLUCIÓN: **$5x^2 + 9y^2 = 180$**

45. RESOLUCIÓN

$$c = 12$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2; \text{ luego: } 144 = a^2 - b^2$$

Sabemos que:

$$a - b = 8$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - b^2 = 144 \\ a - b = 8 \end{array}\right| \Rightarrow a = 13; \ b = 5$$

SOLUCIÓN: **Los semiejes son: a = 13 ; b = 5**

46. RESOLUCIÓN

La ecuación de la circunferencia de centro O (0, 0) es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

El diámetro es 2c, luego $r = c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

En la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \quad y \quad b^2 = 9$$

La ecuación de la elipse pedida es:

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{\frac{544}{25}} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 544$$

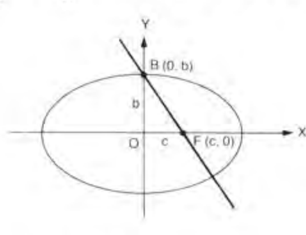
SOLUCIÓN: **$16x^2 + 25y^2 = 544$**

42. RESOLUCIÓN

El foco es F (c, 0) y el punto B (0, b).

La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos es:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + cy = bc$$



SOLUCIÓN: **bx + cy = bc**

43. RESOLUCIÓN

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 + 9y^2 = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow 13x^2 + 18x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 13 \cdot 8}}{2 \cdot 13} = \frac{-18 \pm \sqrt{-92}}{26} = \frac{-9 \pm \sqrt{-23}}{13}$$

SOLUCIÓN: **No hay puntos de intersección**

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ x^2+y^2=4^2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}P_1\left(\dfrac{\sqrt{175}}{4},\dfrac{9}{4}\right);\ P_3\left(\dfrac{\sqrt{175}}{4},\dfrac{9}{4}\right)\\ P_2\left(-\dfrac{\sqrt{175}}{4},\dfrac{9}{4}\right);\ P_4\left(-\dfrac{\sqrt{175}}{4},-\dfrac{9}{4}\right)\end{array}$$

SOLUCIÓN: **Recta secante**

47. RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Por tener su centro en el punto (1, 2) es: $h = 1$ y $k = 2$

Por pasar por (4, 6):

$$\frac{(4-1)^2}{a^2}+\frac{(6-2)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$$

Como $F(h+c,k)=F(1+c,2)=F(6,2)$, por tanto:

$$1+c=6 \Rightarrow c=5$$

Teniendo en cuenta:

$$b^2=a^2-c^2=a^2-5^2=a^2-25$$

resulta:

$$\frac{9}{a^2}+\frac{16}{a^2-25}=1 \Rightarrow a^2=45$$

luego: $b^2=45-25=20$

La ecuación de la elipse pedida es:

$$\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1}$$

48. RESOLUCIÓN

La ecuación se puede escribir así:

$$4(x^2-12x)+9(y^2+8y)+144=0$$

Completando cuadrados en x e y, se tiene:

$$4(x^2-12x+36)+9(y^2+8y+16)+144-144-144=0$$

$$4(x-6)^2+9(y+4)^2-144=0$$

$$\frac{4(x-6)^2}{144}+\frac{9(y+4)^2}{144}-1=0$$

$$\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

Coordenadas del centro: $h=6$; $k=-4$, luego:

$$O'(6,-4)$$

Los semiejes son:

$$a^2=36 \Rightarrow a=6$$

$$b^2=16 \Rightarrow b=4$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Los focos son:

$$F(h+c,k)=F(6+2\sqrt{5},-4)$$

$$F'(h-c,k)=F'(6-2\sqrt{5},-4)$$

SOLUCIÓN:

Centro: O' (6, −4)
Semiejes: a = 6 ; b = 4
Focos: $(6\pm 2\sqrt{5},-4)$

49. RESOLUCIÓN

Coordenadas del centro: $h=-5$; $k=3$, luego el centro es:

$$O'(-5,3)$$

Los semiejes son:

$$a^2=81 \Rightarrow a=9$$

$$a^2=16 \Rightarrow b=4$$

siendo: $$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{81-16}=\sqrt{65}$$

Los focos son:

$$F(-5+\sqrt{65},3)\ ;\ F'(-5-\sqrt{65},3)$$

La excentricidad es:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{65}}{9}$$

SOLUCIÓN:

Centro: O' (−5, 3)
Semiejes: a = 9 ; b = 4
Focos: $(-5\pm\sqrt{65},3)$
Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$

50. RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Por ser $h=-1$; $k=-1$, resulta:

$$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2}=1$$

Como: $A(h+a,k)=A(5,-1)$, se tiene:

$$h+a=5 \Rightarrow a=5-h=5-(-1)=6$$

Por ser:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow c=\frac{2a}{3}=\frac{2\cdot 6}{3}=4$$

$$b^2=a^2-c^2=6^2-4^2=36-16=20$$

La ecuación de la elipse pedida es:

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1}$$

51. RESOLUCIÓN

Completando cuadrados se tiene:

$$4(x^2+4x)+9(y^2-2y)-11=0$$

$$4(x^2+4x+4)+9(y^2-2y+1)-11-16-9=0$$

$$4(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

$$\frac{4(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Coordenadas del centro: $h=-2$; $k=1$, luego el centro es:

$$O'(-2,1)$$

Semiejes:

$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$$b^2=4 \Rightarrow b=2$$

Vértices:

$$(1,1);\ (-5,1);\ (-2,3)\ y\ (-2,-1)$$

Focos:

$$(-2-\sqrt{5},1)\ y\ (-2+\sqrt{5},1)$$

siendo $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

SOLUCIÓN:

Centro: O' (−2, 1)
Semiejes: a = 3 ; b = 2
Focos: $(-2\pm\sqrt{5},1)$
Vértices: (1, 1) ; (−5, 1) ; (−2, 3) y (−2, −1)
Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

52. RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Centro O' (h, k) = O '(2, 1); luego: $h=2\ ;\ k=1$

Distancia focal:

$$2c=16\Rightarrow c=8$$

Eje mayor:

$$2a=20\Rightarrow a=10$$

Sabemos que:

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$$

La ecuación de la elipse pedida es:

$$\frac{(x-2)^2}{10^2}+\frac{(y-1)^2}{6^2}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{36}=1}$

53. RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$2a=10\Rightarrow a=5$$

$$c=4$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

La ecuación de la elipse pedida es:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$

54. RESOLUCIÓN

Coordenadas del centro:

$$h=0;\ k=\frac{-4+2}{2}=-1$$

luego, O' (0, −1)

$$a=2-(-1)=3$$

$$c=3-2=1$$

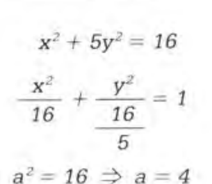
$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1\ ;$$

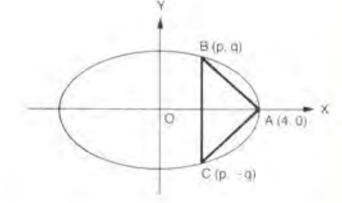
SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{9}=1}$

55. RESOLUCIÓN



$$x^2+5y^2=16$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{5}}=1$$



$$a^2=16\Rightarrow a=4$$

$$b^2=\frac{16}{5}\Rightarrow b=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\sqrt{(p-4)^2+q^2}\\ \overline{BC}=\sqrt{(p-p)^2+(q+q)^2}=2q\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{(p-4)^2+q^2}=2q$$

$$(p-4)^2+q^2=4q^2\quad(1)$$

Como: $p^2+5q^2=16\quad(2)$

Resulta resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$p=4\ ;\ p=1$$

luego:

$$q=0\ ;\ q=\pm\sqrt{3}$$

Por tanto los vértices son: A (4, 0) ; B(1, $\sqrt{3}$*) ; C (1,* $-\sqrt{3}$*)*

SOLUCIÓN: **A(4, 0) ; B(1, $\sqrt{3}$) ; C(1, $-\sqrt{3}$)**

56. RESOLUCIÓN

I.

$$a^2=25\Rightarrow a=5$$

$$b^2=4\Rightarrow b=2$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

$$F(\sqrt{29},0)\ \ y\ \ F'(-\sqrt{29},0)$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{5}$$

SOLUCIÓN I:
Semiejes: a = 5 ; b = 2
Focos: F($\pm\sqrt{29}$, 0)
Excentricidad: e = $\frac{\sqrt{29}}{5}$

II.

$$3x^2-4y^2=4$$

$$\frac{3x^2}{4}-\frac{4y^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{4}{3}}-\frac{y^2}{1}=1$$

$$a^2=\frac{4}{3}\Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$b^2=1\Rightarrow b=1$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{4}{3}+1}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$F\left(\frac{\sqrt{21}}{3},0\right)\ y\ F'\left(-\frac{\sqrt{21}}{3},0\right)$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

SOLUCIÓN II:
Semiejes: a = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; b = 1
Focos: $\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{3},0\right)$
Excentricidad: e = $\frac{\sqrt{7}}{2}$

III.

$$b^2=9\Rightarrow b=3$$

$$a^2=16\Rightarrow a=4$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$F(0,5)\ ;\ F'(0,-5)$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$$

SOLUCIÓN III:
Semiejes: a = 4 ; b = 3
Focos: (0, ± 5)
Excentricidad: e = $\frac{5}{4}$

IV.

$$4x^2-9y^2=36$$

$$\frac{4x^2}{36}-\frac{9y^2}{36}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$a^2=9\Rightarrow a=3;\ \ b^2=4\Rightarrow b=2$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

Focos:

$$(\pm\sqrt{13},0)$$

Excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

SOLUCIÓN IV:
Semiejes: a = 3 ; b = 2
Focos: ($\pm\sqrt{13}$, 0)
Excentricidad: e = $\frac{\sqrt{13}}{3}$

57. RESOLUCIÓN

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$
$$2c = 8 \Rightarrow c = 4$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1}$

58. RESOLUCIÓN

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2;\ 2c = 2\sqrt{29} \Rightarrow c = \sqrt{29}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 = 29 - 4 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1}$

59. RESOLUCIÓN

$$c = 4;\ 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

La ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1}$

60. RESOLUCIÓN

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por pasar por (4, 3): $\frac{4^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1$

Por pasar por (2, 1): $\frac{2^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1\\ \frac{2^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = \frac{5}{2};\quad b^2 = \frac{5}{3}$$

La ecuación es:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3y^2 = 5$$

SOLUCIÓN: $\boxed{2x^2 - 3y^2 = 5}$

61. RESOLUCIÓN

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por pasar por (2, 3):

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \quad (1)$$
$$2c = 4 \Rightarrow c = 2$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - a^2$$

Sustituyendo el valor de b^2 en la ecuación (1), resulta:

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{4 - a^2} = 1$$

Efectuando operaciones:

$$a^4 - 17a^2 + 16 = 0$$

de donde $a = 1;\ a = 4$

Teniendo en cuenta que $c > a$ en la hipérbola, el valor de $a = 4$ no sirve; luego $b^2 = 4 - 1 = 3$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1}$

62. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l}e = 2\sqrt{2}\\ e = \frac{c}{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c}{a} = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}a \quad (1)$$
$$2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

Sustituyendo este valor de $c = 6$ en (1), se tiene:

$$6 = 2\sqrt{2}a \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Sabemos:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{63}{2}}$$

La ecuación de la hipérbola pedida es:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{63}{2}}\right)^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - \frac{y^2}{\frac{63}{2}} = 1$$
$$\frac{2x^2}{9} - \frac{2y^2}{63} = 1 \Leftrightarrow 14x^2 - 2y^2 = 63$$

SOLUCIÓN: $\boxed{14x^2 - 2y^2 = 63}$

63. RESOLUCIÓN

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x^2 - 4y^2 = 9\\ x - 2y - 1 = 0\end{array}\right| \Rightarrow x = 5;\ y = 2$$

La recta corta a la hipérbola en el punto (5, 2), pero es secante porque no es punto doble.

SOLUCIÓN: **Recta secante**

64. RESOLUCIÓN

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}3x^2 - 8y^2 = 19\\ 3x - 4y - 5 = 0\end{array}\right|$$

Despejamos de la 2.ª ecuación:

$$y = \frac{3x - 5}{4} \quad (1)$$

y se sustituye en la 1.ª ecuación:

$$3x^2 - 8\left(\frac{3x - 5}{4}\right)^2 = 19$$

Efectuando operaciones, resulta:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$
$$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = 7$$

Sustituyendo estos valores en (1), se obtiene:

$$y_1 = 1 \quad ; \quad y_2 = 4$$

SOLUCIÓN: **Recta secante**

65. RESOLUCIÓN

La ecuación de la hipérbola equilátera es:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Como: $2c = 24 \Rightarrow c = 12$;

$$c^2 = 2a^2 \Rightarrow 144 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 72$$

La ecuación es:

$$x^2 - y^2 = 72$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x^2 - y^2 = 72}$

66. RESOLUCIÓN

La hipérbola conjugada de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es* $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

La hipérbola dada se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{9x^2}{225} - \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

La conjugada es:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1}$

67. RESOLUCIÓN

$$4x^2 - 8y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{8}} = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Las ecuaciones de las asíntotas pedidas son:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}x = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad ; \quad y = -\frac{b}{a}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

68. RESOLUCIÓN

$$8x^2 - 6y^2 = 48$$

$$\frac{8x^2}{48} - \frac{6y^2}{48} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$$

$$a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6};\ b^2 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{6}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}x\ ;\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x}$

69. RESOLUCIÓN

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x\ ;\quad \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

Por pasar la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *por el punto (2, 1), se verifica:*

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{a} = \frac{3}{4}\\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = \frac{20}{9}\ ;\quad b^2 = \frac{5}{4}$$

La ecuación de la hipérbola pedida es:

$$\frac{x^2}{\frac{20}{9}} - \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

$$\frac{9x^2}{20} - \frac{4y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 16y^2 = 20$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{9x^2 - 16y^2 = 20}$

70. RESOLUCIÓN

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por pasar por (5, 2):

$$\frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$$

Las asíntotas son:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{1}{2}x\ ;\ \text{luego}\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1\\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 9;\quad b^2 = \frac{9}{4}$$

La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 9$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{x^2 - 4y^2 = 9}$

71. RESOLUCIÓN

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2;\quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

I. *Focos:* $F(\sqrt{13}, 0);\ F'(-\sqrt{13}, 0)$

II. *Vértices:* $A(2, 0);\ A'(-2, 0)$

III. *Excentricidad:* $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

IV. *Asíntotas:* $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{2}x$

SOLUCIÓN:

Focos: $\boldsymbol{F(\sqrt{13}, 0);\ F'(-\sqrt{13}, 0)}$
Vértices: $\boldsymbol{A(2, 0)\ ;\ A'(-2, 0)}$
Excentricidad: $\boldsymbol{e = \frac{\sqrt{13}}{2}}$
Asíntotas: $\boldsymbol{y = \pm\frac{3}{2}x}$

72. RESOLUCIÓN

I. *Como la ecuación asintótica es* $xy = \frac{a^2}{2}$, *resulta:*

$$\frac{a^2}{2} = 6 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$\text{siendo } c^2 = 2a^2 = 2\cdot 12 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Luego las coordenadas de los focos son:

$$F(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})\ ;\ F'(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$$

II. *Si en la ecuación* $xy = 6$ *hacemos* $x = y$ *se obtienen las coordenadas de los vértices:*

$$x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

luego: $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})\ ;\ A'(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$

III. *La ecuación de la hipérbola pedida es:*

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 12$$

SOLUCIÓN:

Focos: $\boldsymbol{F(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6});\ F'(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})}$
Vértices: $\boldsymbol{A(\sqrt{6}, \sqrt{6});\ A'(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})}$
Ecuación de la hipérbola: $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 12}$

73. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO:

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollándola se obtiene:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2b^2 - a^2k^2 = 0$$

y comparándola con la propuesta:

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$$

resulta:

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3;\ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$
$$2b^2h = 36 \Rightarrow b^2h = 18 \Rightarrow 9h = 18 \Rightarrow h = 2$$
$$2a^2k = -24 \Rightarrow a^2k = -12 \Rightarrow 4k = -12 \Rightarrow k = -3$$

Centro: $O'(h, k) = O'(2, -3)$

Vértices: $\begin{cases} A(h+a, k) = A(2+2, -3) = A(4, -3) \\ A'(h-a, k) = A(2-2, -3) = A'(0, -3) \end{cases}$

Focos: $\begin{cases} F(h+c, k) = F(2+\sqrt{13}, -3) \\ F'(h-c, k) = F'(2-\sqrt{13}, -3) \end{cases}$

siendo: $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Ecuaciones asíntotas:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \Leftrightarrow y + 3 = \pm\frac{3}{2}(x-2)$$
$$3x - 2y - 12 = 0;\quad 3x + 2y = 0$$

SOLUCIÓN PRIMER MÉTODO:

Centro: O'(2, −3)
Vértices: A (4, −3) ; A' (0, −3)
Focos: (2 ± $\sqrt{13}$, −3)
Asíntotas: 3x − 2y − 12 = 0 ; 3x + 2y = 0

SEGUNDO MÉTODO:

Completando cuadrados se tiene:

$$9(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 6y) = 36$$
$$9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 6y + 9) - 36 + 36 = 36$$
$$9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$$
$$\frac{9(x-2)^2}{36} - \frac{4(y+3)^2}{36} = 1$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Centro: $(2, -3)$

Vértices: $(0, -3)$; $(4, -3)$

Focos: $(2 \pm \sqrt{13}, -3)$

Asíntotas: $y + 3 = \pm\frac{3}{2}(x-2)$

$$3x - 2y - 12 = 0;\quad 3x + 2y = 0$$

SOLUCIÓN SEGUNDO MÉTODO:

Centro: O'(2, −3)
Vértices: A (4, −3) ; A' (0, −3)
Focos: (2 ± $\sqrt{13}$, −3)
Asíntotas: 3x − 2y − 12 = 0 ; 3x + 2y = 0

74. RESOLUCIÓN

I. *Focos:*

$$\left.\begin{array}{l} xy = 18 \\ xy = \dfrac{a^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 18 = \frac{a^2}{2};\quad a^2 = 36 \Rightarrow a = 6\ ;\ b = a = 6$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$
$$F'(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2})\ ;\ F'(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$$

II. *Vértices:*

Si hacemos $x = y$ *en la ecuación* $xy = 18$, *resulta:*

$$x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$A(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2});\ A'(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

III. *Ecuación de la hipérbola:*

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 36$$

SOLUCIÓN:

Focos: (±6$\sqrt{2}$, ±6$\sqrt{2}$)
Vértices: (±3$\sqrt{2}$, ±3$\sqrt{2}$)
Ecuación hipérbola: $x^2 - y^2 = 36$

75. RESOLUCIÓN

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

luego:

$$\frac{(x+4)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$
$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$
$$A(h+a, k) = A(2, 1)$$
$$h + a = 2;\quad k = 1$$

Como: $h = -4$, *resulta:* $-4 + a = 2 \Rightarrow a = 6$

La ecuación es:

$$\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{(x+4)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1}$

76. RESOLUCIÓN

$$ax^2 - 4y^2 = 9$$
$$\frac{ax^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1$$
$$\frac{x^2}{\frac{9}{a}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Para que sea una hipérbola equilátera $a = b$; *luego:*

$$\frac{9}{a} = \frac{9}{4} \Rightarrow a = 4$$

SOLUCIÓN: $\boxed{a = 4}$

77. RESOLUCIÓN

Las asíntotas de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *son:* $y = \pm\frac{b}{a}x$

luego: $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

Cómo un vértice es $(6, 0)$, *resulta* $a = 6$

Sustituyendo este valor de $a = 6$ *en la igualdad anterior, se obtiene:*

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{24}{3} = 8$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1}$

78. RESOLUCIÓN

La hipérbola conjugada de: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

es: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3;\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Los focos de la 1.ª hipérbola son $F(\pm 5, 0)$ y los de la conjugada $F(0, \pm 5)$

Las ecuaciones de las asíntotas de ambas hipérbolas son las mismas:

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{3}x$$

SOLUCIÓN:

Hipérbola conjugada: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
Asíntotas: $y = \pm \frac{4}{3}x$
Focos: $(\pm 5, 0)$; $(0, \pm 5)$

79. RESOLUCIÓN

Completando cuadrados se tiene:

$$5(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) = 19$$
$$5(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) = 19 + 5 - 4$$
$$5(x + 1)^2 - 4(y - 1)^2 = 20$$
$$\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{5} = 1$$

I. *Centro:* $O'(h, k) = O'(-1, 1)$

II. *Focos:*

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$
$$b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$$
$$F(h + c, k) = F(2, 1)$$
$$F'(h - c, k) = F'(-4, 1)$$

III. *Asíntotas:*

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h);\quad y - 1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x + 1)$$

SOLUCIÓN:

Centro: $(-1, 1)$
Focos: $(2, 1)$; $(-4, 1)$
Asíntotas: $y - 1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x + 1)$

80. RESOLUCIÓN

Las hipérbolas conjugadas son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ ;\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Por pasar por $P\left(2, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ *la primera hipérbola, se verifica:*

$$\frac{4}{a^2} - \frac{\frac{6}{9}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{2}{3b^2} = 1 \quad (1)$$

Por pasar por $Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}\right)$ *la segunda hipérbola, se verifica:*

$$\frac{3}{b^2} - \frac{\frac{6}{4}}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{b^2} - \frac{3}{2a^2} = 1 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{a^2} - \frac{2}{3b^2} = 1 \\ \frac{3}{b^2} - \frac{3}{2a^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{3};\quad b = \sqrt{2}$$

Las ecuaciones pedidas son:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1;\quad \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$$

SOLUCIÓN: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$; $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$

NOTA: Para resolver el sistema fácilmente se toman como incógnitas $\frac{1}{a^2}$ y $\frac{1}{b^2}$

81. RESOLUCIÓN

I. *La ecuación de la parábola es* $y^2 = 2px$*; luego:*

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$\textit{El foco } F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{2}{2}, 0\right) \Rightarrow F(1, 0)$$

La ecuación de la directriz es:

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

SOLUCIÓN I:

Foco: $(1, 0)$
Directriz: $x = -1$

II.

$$y^2 + x = 0 \Rightarrow y^2 = -x$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = -x \end{array}\right\} \Rightarrow 2p = -1 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$$

Foco: $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{p}{2} = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

SOLUCIÓN II:

Foco: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$
Directriz: $x = \frac{1}{4}$

III.

$$x^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 = y$$

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 2py \\ x^2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Foco: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; *Directriz:* $y = -\frac{1}{4}$

SOLUCIÓN III:

Foco: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
Directriz: $y = -\frac{1}{4}$

82. RESOLUCIÓN

$$3y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = \frac{8}{3}x$$
$$2p = \frac{8}{3} \Rightarrow p = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

El foco es: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F\left(\frac{4/3}{2}, 0\right) = F\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

La ecuación de la directriz es:

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN:

Foco: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$
Directriz: $x = -\frac{2}{3}$

83. RESOLUCIÓN

La ecuación de la parábola es: $y^2 = 2px$

Como: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F(-2, 0)$

$$\frac{p}{2} = -2 \Rightarrow p = -4$$

La ecuación pedida es: $y^2 = 2(-4)x = -8x$

SOLUCIÓN: $y^2 = -8x$

84. RESOLUCIÓN

Por pertenecer el punto $(-1, 2)$ a la parábola, se verifica:

$$2^2 = 2p(-1)$$
$$4 = -2p$$
$$p = -2$$

SOLUCIÓN: $p = -2$

85. RESOLUCIÓN

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ y = 2x + 4 \end{array}\right| \Rightarrow (2x + 4)^2 = 9x$$

$$4x^2 + 16x + 16 - 9x = 0$$

$$4x^2 + 7x + 16 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 256}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{-207}}{8}$$

No hay puntos de intersección

SOLUCIÓN: **Recta exterior**

86. RESOLUCIÓN

La ecuación de la parábola es: $(y - k)^2 = 2p(x - h)$

$$h = 2 \ ; \ k = 4$$

La directriz: $x = h - \dfrac{p}{2}$

$$1 = 2 - \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2$$

La ecuación pedida es:

$$(y - 4)^2 = 4(x - 2)$$

$$y^2 - 8y - 4x + 24 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y^2 - 8y - 4x + 24 = 0}}$

87. RESOLUCIÓN

La ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -2py$$

Por pasar por (6, −3):

$$36 = -2p(-3)$$

$$36 = 6p$$

$$p = 6$$

La ecuación es:

$$x^2 = -2 \cdot 6y = -12y$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 = -12y}}$

88. RESOLUCIÓN

La ecuación de la parábola es: $(y - k)^2 = 2p(x - h)$

$$V = (2, 1) \Rightarrow h = 2 \ ; \ k = 1$$

$$F\left(h + \frac{p}{2},\ k\right) = F(4, 1)$$

$$h + \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow 2 + \frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 4$$

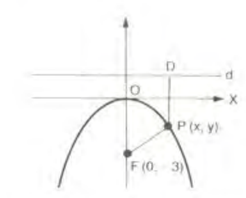
La ecuación pedida es:

$$(y - 1)^2 = 8\,(x - 2)$$

$$y^2 - 2y - 8x + 17 = 0$$

SOLUCION: $\boxed{\mathbf{y^2 - 2y - 8x + 17 = 0}}$

89. RESOLUCIÓN



Sea P(x, y) un punto cualquiera de la parábola:

$$\overline{D\,P} = y - 3$$

$$\overline{P\,F} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 3)^2}$$

Como $\overline{D\,P} = \overline{P\,F}$*, resulta:*

$$y - 3 = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 3)^2}$$

$$(y - 3)^2 = x^2 + (y + 3)^2$$

Efectuando operaciones se obtiene la ecuación de la parábola:

$$x^2 + 12y = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x^2 + 12y = 0}}$

90. RESOLUCIÓN

La distancia de un punto P(x, y) cualquiera de la parábola al foco y a la directriz tiene que ser igual:

$$\overline{d\,P} = \overline{P\,F}$$

$$x - 2 = \sqrt{(x - 6)^2 + (y + 2)^2}$$

$$(x - 2)^2 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4$$

$$y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y^2 + 4y - 8x + 36 = 0}}$

91. RESOLUCIÓN

La ecuación de la parábola es:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

I. *Eje de la parábola:*

$$y - k = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

II. *Coordenadas del vértice:*

$$V(h, k) = V(-3, 2), \text{ es decir: } h = -3 \ ; \ k = 2$$

III. *Coordenadas del foco:*

$$F\left(h + \frac{p}{2},\ k\right) = F(-3 + 3, 2) = F(0, 2)$$

siendo: $2p = 12 \Rightarrow p = 6$; *luego:* $\dfrac{p}{2} = 3$

IV. *Ecuación de la directriz:*

$$x = h - \frac{p}{2} = -3 - 3 = -6$$

SOLUCIÓN:

Eje parábola: y = 2
Vértice: V (−3, 2)
Foco: F (0, 2)
Directriz: x = −6

92. RESOLUCIÓN

Se completa la ecuación dada:

$$x^2 + 12x = 4y + 8$$

$$x^2 + 12x + 36 = 4y + 8 + 36$$

$$(x + 6)^2 = 4(y + 11)$$

La ecuación que resulta es de la forma:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

El valor de p es:

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

I. *Eje de la parábola:*

$$h = -6 \ ; \ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$$

II. *Coordenadas del vértice:*

$$\left.\begin{array}{r} x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \\ y + 11 = 0 \Rightarrow y = -11 \end{array}\right| \Rightarrow V(-6, -11)$$

III. *Coordenadas del foco:*

$$\left.\begin{array}{r} x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \\ y = k + \dfrac{p}{2} = -11 + \dfrac{2}{2} = -11 + 1 = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow (-6, -10)$$

siendo: $k = -11$

IV. *Ecuación de la directriz:*

$$y = k - \frac{p}{2} = -11 - 1 = -12$$

SOLUCIÓN:

Eje parábola: x = −6
Vértice: V (−6, −11)
Foco: F (−6, −10)
Directriz: y + 12 = 0

93. RESOLUCIÓN

Se completa la ecuación dada:

$$y^2 + 6y = 8x + 31$$
$$y^2 + 6y + 9 = 8x + 31 + 9$$
$$y^2 + 6y + 9 = 8x + 40$$
$$(y + 3)^2 = 8(x + 5); \quad 2p = 8 \Rightarrow p = 4$$

El vértice es: $h = -5; k = -3; V(-5, -3)$

El foco es: $F\left(h + \frac{p}{2}, k\right) = F\left(-5 + \frac{4}{2}, -3\right) = F(-3, -3)$

La directriz es: $x = h - \frac{p}{2} = -5 - 2 = -7$

SOLUCIÓN:

Vértice: V (−5, −3)
Foco: F (−3, −3)
Directriz: x = − 7

94. RESOLUCIÓN

$$x^2 - 2x = 6y + 11$$
$$x^2 - 2x + 1 = 6y + 11 + 1$$
$$(x - 1)^2 = 6(y + 2)$$
$$2p = 6 \Rightarrow p = 3$$

Las coordenadas del foco:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + 1 = 1 \\ y = -2 + \frac{p}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow F\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

La ecuación de la directriz:

$$y = -2 - \frac{p}{2} = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2y + 7 = 0$$

SOLUCIÓN:

Foco: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
Directriz: 2y + 7 = 0

95. RESOLUCIÓN

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 2px \\ 2x - y - 1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow y = 2x - 1$$
$$(2x - 1)^2 = 2px$$

Efectuando operaciones:

$$4x^2 - (4 + 2p)x + 1 = 0$$

La recta será secante, tangente o exterior a la parábola, cuando el discriminante de la ecuación de segundo grado:

$$\Delta = b^2 - 4ac \gtreqless 0$$

$$\Delta = (4 + 2p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 + 4p^2 + 16p - 16 = 4p(p + 4) \gtreqless 0$$

SOLUCIÓN:

Secante: $\Delta > 0$; $p > 0$; $p < -4$
Tangente: $\Delta = 0$; $p = -4$
Exterior: $\Delta < 0$; $0 > p > -4$

96. RESOLUCIÓN

Las distancias:

$$\overline{AB} = \sqrt{(m - 0)^2 + (n - 0)^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(m - m)^2 + (-n - n)^2} = \sqrt{(2n)^2}$$

Por ser un triángulo equilátero, los tres lados son iguales, luego:

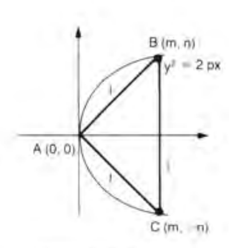
$$\sqrt{m^2 + n^2} = 2n$$
$$m^2 + n^2 = 4n^2 \Rightarrow m^2 = 3n^2$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} m^2 = 3n^2 \\ n^2 = 2pm \end{array}\right| \Rightarrow m = n\sqrt{3}$$
$$n^2 = 2pn\sqrt{3}$$
$$n(n - 2p\sqrt{3}) = 0$$
$$n = 0 \text{ y } n - 2p\sqrt{3} = 0 \Rightarrow n = 2p\sqrt{3}$$

La longitud de sus lados es:

$$l = 2n = 2 \cdot 2p\sqrt{3} = 4p\sqrt{3}$$



SOLUCIÓN: **$l = 4p\sqrt{3}$**

97. RESOLUCIÓN

PRIMER MÉTODO:

La ecuación de la parábola es:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Desarrollando y efectuando operaciones, resulta:

$$y^2 - 2px - 2ky + k^2 + 2ph = 0$$

hacemos:

$$-2p = D; -2k = E; k^2 + 2ph = F$$

tendremos:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Por pasar por los puntos (−2, 1), (1 2), (−1, 3), se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - 2D + E + F = 0 \\ 4 + D + 2E + F = 0 \\ 9 - D + 3E + F = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D = \frac{2}{5}; \quad E = -\frac{21}{5}; \quad F = 4$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$y^2 + \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}y + 4 = 0$$
$$5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$$

SOLUCIÓN PRIMER MÉTODO: **5y² + 2x − 21y + 20 = 0**

SEGUNDO MÉTODO:

La ecuación de la parábola es:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Por pasar por } (-2, 1): & (1 - k)^2 = 2p(-2 - h) \\ \text{Por pasar por } (1, 2): & (2 - k)^2 = 2p(1 - h) \\ \text{Por pasar por } (-1, 3): & (3 - k)^2 = 2p(-1 - h) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p = -\frac{1}{5} \\ k = \frac{21}{20} \\ h = \frac{41}{40} \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$\left(y - \frac{21}{20}\right)^2 = -\frac{2}{5}\left(x - \frac{41}{40}\right)$$
$$200y^2 + 80x - 840y + 800 = 0$$
$$5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$$

SOLUCIÓN SEGUNDO MÉTODO: **5y² + 2x − 21y + 20 = 0**

98. RESOLUCIÓN

La ecuación de la parábola es:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$
$$h = 2; \quad k = 3$$

luego:

$$(x-2)^2 = 2p(y-3)$$

Como el punto (4, 5) pertenece a la parábola, resulta:

$$(4-2)^2 = 2p(5-3)$$
$$4 = 4p$$
$$p = 1$$

La ecuación de la parábola pedida es:

$$(x-2)^2 = 2(y-3)$$
$$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^2 - 4x - 2y + 10 = 0}$

99. RESOLUCIÓN

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 10x - 3y + 4 = 0 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{b}{3} \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo el valor de y de la 2.ª ecuación en la 1.ª, resulta:

$$3x^2 + 10x - 3\left(\frac{4}{3}x + \frac{b}{3}\right) + 4 = 0$$

Efectuando operaciones:

$$3x^2 + 6x + 4 - b = 0$$

Para que la recta sea tangente a la parábola, el discriminante de esta ecuación de segundo grado, $\Delta = b^2 - 4ac$, tiene que ser igual a cero:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3(4-b) = 0$$
$$\Delta = 36 - 48 + 12b = 0$$
$$\Delta = -12 + 12b = 0 \Rightarrow b = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{b = 1}$

100. RESOLUCIÓN

Completando cuadrados se tiene:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16$$
$$y^2 + 8y + 16 = 6x + 12$$
$$(y+4)^2 = 6(x+2)$$
$$V(-2, -4) \; ; \; 2p = 6 \Rightarrow p = 3$$
$$F\left(-\frac{1}{2}, -4\right) ; \; x = -\frac{7}{2}$$

SOLUCIÓN:

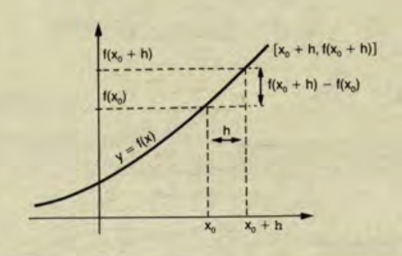
Vértice: $V(-2, -4)$
Foco: $F\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$
Directriz: $x = -\frac{7}{2}$

Bloque 9

- Cálculo diferencial
- Máximos, mínimos, puntos de inflexión
- Estudio y representación gráfica de una función
- Tabla de derivadas

CÁLCULO DIFERENCIAL

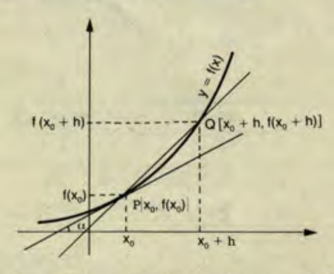
Concepto de derivada



> Llamamos derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0, al límite, si existe, del cociente de dividir el incremento de la función entre el incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero.

$$\mathbf{y_0}' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interpretación geométrica de la derivada



La derivada de la función $y = f(x)$ *en el punto* $P\,[x_0, f(x_0)]$ *representa la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto.*

$$m = y_0' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ecuación de la tangente a una curva en uno de sus puntos

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ *en el punto* $P\,(x_0, y_0)$ es:

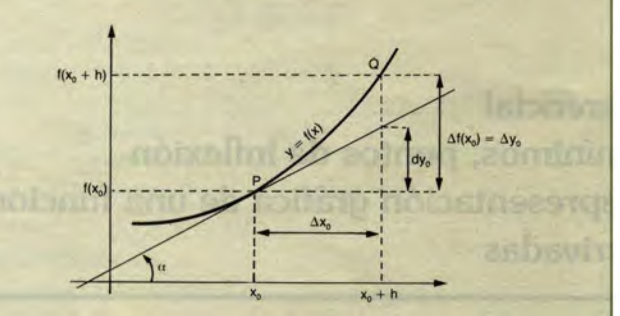
$$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

Concepto de diferencial de una función

Se llama diferencial de una función $y = f(x)$ *en el punto* x_0*, en el que la función admite derivada, al producto de la derivada de la función en dicho punto por un incremento arbitrario de la variable independiente.*

$$dy_0 = f'(x_0)\,\Delta x_0 \qquad\qquad dy_0 = f'(x_0)\,dx_0$$

Interpretación geométrica de la diferencial de una función en un punto



La diferencial de una función $y = f(x)$ *en el punto* x_0*, es el incremento que sufre la ordenada de la tangente a la curva en ese punto, al dar a x un incremento arbitrario* Δx_0.

Obsérvese en la figura la diferencia que existe entre dy_0 *e* Δy_0*, es decir entre la diferencial de la función y el incremento de la función.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular, aplicando la definición, la derivada de la función $y = 3x^2 - 1$ en el punto $x_0 = 2$.

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y_0' = 12}}$

2. Calcular, aplicando la definición, la derivada de:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y' = 3x^2 - 4x}}$

3. Calcular, aplicando la definición, la derivada de $y = \dfrac{1}{1 - x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{1}{(1 - x)^2}}}$

4. Calcular, aplicando la definición, la derivada de $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $x_0 = -2$.

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y_0' = \dfrac{1}{4}}}$

5. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = 8x^4 - 3x^3 + 2x$

II. $y = \dfrac{4}{5}x^4 - \dfrac{2}{7}x^3 + 4x^2 - 2$

III. $y = \dfrac{3}{4}x^{2/5} - \dfrac{1}{2}x^{-2/3}$

IV. $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x^3}$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = 32x^3 - 9x^2 + 2\ ;\ dy = (32x^3 - 9x^2 + 2)\,dx}}$

SOLUCIÓN II:
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{y' = \dfrac{16}{5}x^3 - \dfrac{6}{7}x^2 + 8x} \\ \mathbf{dy = \left(\dfrac{16}{5}x^3 - \dfrac{6}{7}x^2 + 8x\right)dx} \end{array}}$$

SOLUCIÓN III:
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{y' = \dfrac{3}{10\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^5}}} \\ \mathbf{dy = \left(\dfrac{3}{10\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)dx} \end{array}}$$

SOLUCIÓN IV:
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{y' = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{9}{4\sqrt[4]{x}}} \\ \mathbf{dy = \left(\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{9}{4\sqrt[4]{x}}\right)dx} \end{array}}$$

6. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = (3x - 5)^4$

II. $y = 9(2x^2 - 1)^3$

III. $y = (3x - 1)^2(2x + 1)$

IV. $y = \dfrac{4}{(2x - 1)^7}$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = 12(3x - 5)^3}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{y' = 108x(2x^2 - 1)^2}}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{y' = 6(3x - 1)(2x + 1) + 2(3x - 1)^2}}$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{-56}{(2x - 1)^8}}}$

7. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = x^3(x^2 + 1)(x + 6)$ **III.** $y = \dfrac{10 + 5x}{10 - 5x}$

II. $y = \dfrac{3x^2 - 2}{5x + 4}$ **IV.** $y = \dfrac{3x^2 + 2}{x^3 - 11x^2}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = x^2(5x^2 + 3)(x + 6) + x^3(x^2 + 1)}$
$\mathbf{dy = [x^2(5x^2 + 3)(x + 6) + x^3(x^2 + 1)]\,dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{15x^2 + 24x + 10}{(5x + 4)^2}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{15x^2 + 24x + 10}{(5x + 4)^2}\,dx}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \dfrac{4}{(2 - x)^2}\ ;\ \ dy = \dfrac{4}{(2 - x)^2}\,dx}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \dfrac{-3x^4 - 6x^2 + 44x}{(x^3 - 11x^2)^2}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{-3x^4 - 6x^2 + 44x}{(x^3 - 11x^2)^2}\,dx}$

8. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = \left(\dfrac{2x - 1}{4x + 3}\right)^3$ **III.** $y = \left(\dfrac{5x^2 - 3}{7}\right)^5$

II. $y = L(4x^2 - 5x)$ **IV.** $y = L(3x - 5)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \left(\dfrac{2x - 1}{4x + 3}\right)^2 \dfrac{30}{(4x + 3)^2}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{8x - 5}{4x^2 - 5x}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \left(\dfrac{5x^2 - 3}{7}\right)^4 \dfrac{50x}{7}}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \dfrac{3}{3x - 5}}$

9. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = L\,\dfrac{4 - 5x}{2x + 3}$ **III.** $y = L(4 + \sqrt{x})$

II. $y = L(3x^2 - 2x)^4$ **IV.** $y = 5a^{2x}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{-23}{(4 - 5x)(2x + 3)}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{-23}{(4 - 5x)(2x + 3)}\,dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{8(3x - 1)}{3x^2 - 2x}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{8(3x - 1)}{3x^2 - 2x}\,dx}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(4 + \sqrt{x})}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(4 + \sqrt{x})}\,dx}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = 10a^{2x}\,L\,a\ ;\ \ dy = 10a^{2x}\,L\,a\,dx}$

10. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = 4x \cdot 5^{3x}$ **III.** $y = \left(\dfrac{2x^3 - x}{4x + 3}\right)^3$

II. $y = \sqrt[5]{(3x - 2)^2}$ **IV.** $y = 4e^{2x}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = 4 \cdot 5^{3x}[1 + 3x\,L\,5]}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{6}{5\sqrt[5]{(3x - 2)^3}}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = 3\left(\dfrac{2x^3 - x}{4x + 3}\right)^2 \dfrac{16x^3 + 18x^2 - 3}{(4x + 3)^2}}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = 8e^{2x}}$

11. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = 5e^{3x}$ **III.** $y = \dfrac{3^{5x}}{2x - 1}$

II. $y = (6x^2 - 1)e^{3x}$ **IV.** $y = \sqrt[5]{(2x + 7)^{13/2}}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = 15e^{3x}\ ;\ \ dy = 15e^{3x}\,dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = 3e^{3x}(6x^2 + 4x - 1)}$
$\mathbf{dy = 3e^{3x}(6x^2 + 4x - 1)\,dx}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \dfrac{3^{5x}[5(2x - 1)L\,3 - 2]}{(2x - 1)^2}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{3^{5x}[5(2x - 1)L3 - 2]}{(2x - 1)^2}\,dx}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \dfrac{13\sqrt[10]{(2x + 7)^3}}{5}}$
$\mathbf{dy = \dfrac{13\sqrt[10]{(2x + 7)^3}}{5}\,dx}$

12. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = L\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ **III.** $y = \sqrt{5x - 7}$

II. $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ **IV.** $y = \dfrac{4e^{3x}}{5}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{-3}{x(x^2 - 3)}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - 7}}}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \dfrac{12e^{3x}}{5}}$

13. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = L\,\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ **III.** $y = L(5x)^4$

II. $y = L\sqrt{3 - x^2}$ **IV.** $y = e^{x/2}(3x + 1)$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{-2e^x}{1 - e^{2x}}\ ;\ \ dy = \dfrac{-2e^x}{1 - e^{2x}}\,dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{-x}{3 - x^2}\ ;\ \ dy = \dfrac{-x}{3 - x^2}\,dx}$

SOLUCIÓN III: $y' = \frac{4}{x}$; $dy = \frac{4}{x}\,dx$

SOLUCIÓN IV:

$y' = e^{x/2}\left(\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right)$; $dy = e^{x/2}\left(\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right)dx$

14. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = a^{(x^2)}$ **III.** $y = e^{\sqrt{3x}}$

II. $y = L\sqrt{a^2 + x^2}$ **IV.** $y = L(1 + e^{2x})$

SOLUCIÓN I: $y' = 2xa^{(x^2)}\,L\,a$

SOLUCIÓN II: $y' = \frac{x}{a^2 + x^2}$

SOLUCIÓN III: $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x}}\,e^{\sqrt{3x}}$

SOLUCIÓN IV: $y' = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

15. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = \operatorname{sen} 5x$ **III.** $y = \cos(4x - 1)$

II. $y = 4\operatorname{sen}(2x + 1)$ **IV.** $y = \frac{3}{5}\cos(5x - 2)$

SOLUCIÓN I: $y' = 5\cos 5x$; $dy = 5\cos 5x\,dx$

SOLUCIÓN II: $y' = 8\cos(2x + 1)$; $dy = 8\cos(2x + 1)\,dx$

SOLUCIÓN III: $y' = -4\operatorname{sen}(4x - 1)$; $dy = -4\operatorname{sen}(4x - 1)\,dx$

SOLUCIÓN IV: $y' = -3\operatorname{sen}(5x - 2)$; $dy = -3\operatorname{sen}(5x - 2)\,dx$

16. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = \operatorname{tg} 3x$ **III.** $y = \operatorname{ctg} 2x$

II. $y = 8\operatorname{tg}\frac{3x - 1}{16}$ **IV.** $y = 10\operatorname{ctg}(6x - 1)$

SOLUCIÓN I: $y' = 3\sec^2 3x$

SOLUCIÓN II: $y' = \frac{3}{2}\sec^2\frac{3x - 1}{16}$

SOLUCIÓN III: $y' = -2\operatorname{cosec}^2 2x$

SOLUCIÓN IV: $y' = -60\operatorname{cosec}^2(6x - 1)$

17. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = \sec 3x$ **III.** $y = \operatorname{cosec} 6x$

II. $y = 4\sec(x - 5)$ **IV.** $y = 3\operatorname{cosec}\frac{x}{6}$

SOLUCIÓN I: $y' = 3\sec 3x\operatorname{tg} 3x$; $dy = 3\sec 3x\operatorname{tg} 3x\,dx$

SOLUCIÓN II: $y' = 4\sec(x - 5)\operatorname{tg}(x - 5)$
$dy = 4\sec(x - 5)\operatorname{tg}(x - 5)\,dx$

SOLUCIÓN III: $y' = -6\operatorname{cosec} 6x\operatorname{ctg} 6x$
$dy = -6\operatorname{cosec} 6x\operatorname{ctg} 6x\,dx$

SOLUCIÓN IV: $y' = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{6}\operatorname{ctg}\frac{x}{6}$
$dy = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{6}\operatorname{ctg}\frac{x}{6}\,dx$

18. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = \operatorname{arc\,sen} 2x$ **III.** $y = \operatorname{arc\,cos} 3x$

II. $y = 5\operatorname{arc\,sen}(2x - 3)$ **IV.** $y = 4\operatorname{arc\,cos}\sqrt{x}$

SOLUCIÓN I: $y' = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

SOLUCIÓN II: $y' = \frac{10}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$

SOLUCIÓN III: $y' = \frac{-3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

SOLUCIÓN IV: $y' = \frac{-2}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}$

19. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = \operatorname{arc\,tg} x^2$ **III.** $y = \operatorname{arc\,ctg} 7x$

II. $y = 5\operatorname{arc\,tg}(2x - 1)$ **IV.** $y = 8\operatorname{arc\,ctg}(x - 2)$

SOLUCIÓN I: $y' = \frac{2x}{1 + x^4}$; $dy = \frac{2x}{1 + x^4}\,dx$

SOLUCIÓN II: $y' = \frac{10}{1 + (2x - 1)^2}$; $dy = \frac{10}{1 + (2x - 1)^2}\,dx$

SOLUCIÓN III: $y' = \frac{-7}{1 + 49x^2}$; $dy = \frac{-7}{1 + 49x^2}\,dx$

SOLUCIÓN IV: $y' = \frac{-8}{1 + (x - 2)^2}$; $dy = \frac{-8}{1 + (x - 2)^2}\,dx$

20. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = \operatorname{arc\,sec} 2x$ **III.** $y = \operatorname{arc\,cosec} 5x$

II. $y = 4\operatorname{arc\,sec}(2x - 3)$ **IV.** $y = 4\operatorname{arc\,cosec}(2 - x)$

SOLUCIÓN I: $y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

SOLUCIÓN II: $y' = \frac{8}{(2x - 3)\sqrt{(2x - 3)^2 - 1}}$

SOLUCIÓN III: $y' = \frac{-1}{x\sqrt{25x^2 - 1}}$

SOLUCIÓN IV: $y' = \frac{4}{(2 - x)\sqrt{(2 - x)^2 - 1}}$

21. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = \operatorname{sen} 2x^3$ **III.** $y = \operatorname{sen}^3 2x$

II. $y = \operatorname{sen}(2x)^3$ **IV.** $y = 4\cos^2\frac{x}{2}$

SOLUCIÓN I: $y' = 6x^2\cos 2x^3$; $dy = 6x^2\cos 2x^3\,dx$

SOLUCIÓN II: $y' = 24x^2\cos 8x^3$; $dy = 24x^2\cos 8x^3\,dx$

SOLUCIÓN III: $y' = 6\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x$
$dy = 6\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x\,dx$

SOLUCIÓN IV: $y' = -2\operatorname{sen} x$; $dy = -2\operatorname{sen} x\,dx$

22. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = \text{sen } 4x \cos 4x$

II. $y = 5e^{\cos 3x}$

III. $y = 4 \cos^2 \dfrac{x}{5} + 3 \text{ sen } 5x$

IV. $y = \dfrac{\cos 2x}{1 + \text{tg } 2x}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = 4 \cos 8x}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = -15 \text{ sen } 3x \, e^{\cos 3x}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = -\dfrac{4}{5} \text{ sen } \dfrac{2x}{5} + 15 \cos 5x}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \dfrac{-2\,[\text{sen } 2x\,(1 + \text{tg } 2x) + \sec 2x\,]}{(1 + \text{tg } 2x)^2}}$

23. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)^4$

II. $y = \cos^3 2x$

III. $y = \cos 2x^3$

IV. $y = \cos (2x)^3$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = -\dfrac{x^3}{4} \text{ sen} \left(\dfrac{x}{2}\right)^4}$
$\mathbf{dy = -\dfrac{x^3}{4} \text{ sen} \left(\dfrac{x}{2}\right)^4 dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = -6 \cos^2 2x \text{ sen } 2x}$
$\mathbf{dy = -6 \cos^2 2x \text{ sen } 2x \, dx}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = -6x^2 \text{ sen } 2x^3 \; ; \; dy = -6x^2 \text{ sen } 2x^3 \, dx}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = -24x^2 \text{ sen } 8x^3 \; ; \; dy = -24x^2 \text{ sen } 8x^3 \, dx}$

24. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = e^{\text{sen}(x + \Pi/2)}$

II. $y = 4^{\text{sen}(x + \Pi/2)}$

III. $y = 2 \text{ tg}^3 5x$

IV. $y = \dfrac{1}{x} e^{\text{sen } x}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \cos\left(x + \dfrac{\Pi}{2}\right) e^{\text{sen}(x + \Pi/2)}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \cos\left(x + \dfrac{\Pi}{2}\right) \cdot 4^{\text{sen}(x + \Pi/2)} \cdot L\,4}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = 30 \text{ tg}^2 5x \sec^2 5x}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \dfrac{1}{x} e^{\text{sen } x} \left[\cos x - \dfrac{1}{x}\right]}$

25. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = \dfrac{1}{8} L \dfrac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}$

II. $y = \sqrt{\text{sen } 2x}$

III. $y = \cos x \, e^{\text{sen } x}$

IV. $y = \text{tg}^2 3x$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{1}{4 \cos x} \; ; \; dy = \dfrac{1}{4 \cos x} dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\text{sen } 2x}} \; ; \; dy = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\text{sen } 2x}} dx}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = e^{\text{sen } x} (\cos^2 x - \text{sen } x)}$
$\mathbf{dy = e^{\text{sen } x} (\cos^2 x - \text{sen } x) \, dx}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = 6 \text{ tg } 3x \sec^2 3x}$
$\mathbf{dy = 6 \text{ tg } 3x \sec^2 3x \, dx}$

26. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = \text{sen}^4 \dfrac{x}{2}$

II. $y = L \cos e^{2x}$

III. $y = L \sqrt{(1 + \text{sen } x)^3}$

IV. $y = (2x)^{\text{sen } 2x}$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = 2 \text{ sen}^3 \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = -2e^{2x} \text{ tg } e^{2x}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \dfrac{3 \cos x}{2(1 + \text{sen } x)}}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = (2x)^{\text{sen } 2x} \left[2 \cos 2x \, L\,(2x) + \dfrac{1}{x} \text{ sen } 2x\right]}$

27. Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $y = L \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen } 4x}{1 - \text{sen } 4x}}$

II. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\text{sen } 4x}{8}$

III. $y = \dfrac{\text{sen}^5 3x}{5} - \dfrac{\text{sen}^7 3x}{7}$

IV. $y = \cos^{2/3} 3x \left[\dfrac{\cos^3 3x}{11} - \dfrac{\cos 3x}{5}\right]$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{4}{\cos 4x} \; ; \; dy = \dfrac{4}{\cos 4x} dx}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{1 - \cos 4x}{2} \; ; \; dy = \dfrac{1 - \cos 4x}{2} dx}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = 3 \text{ sen}^4 3x \cos^3 3x}$
$\mathbf{dy = 3 \text{ sen}^4 3x \cos^3 3x \, dx}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \cos^{2/3} 3x \text{ sen}^3 3x}$
$\mathbf{dy = \cos^{2/3} 3x \text{ sen}^3 3x \, dx}$

28. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

I. $y = (\cos 3x)^{5x}$

II. $y = \dfrac{\cos(2x + 1)\,[\cos^2 (2x + 1) - 3\,]}{6}$

III. $y = \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{\text{sen}^4 ax}{4} - \dfrac{\text{sen}^6 ax}{6}\right]$

IV. $y = \text{arc ctg } \dfrac{1 + x}{1 - x} - \text{arc tg } x$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = (\cos 3x)^{5x} \cdot [\,5 \, L \cos 3x - 15x \text{ tg } 3x\,]}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \text{sen}^3 (2x + 1)}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \text{sen}^3 ax \cos^3 ax}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = -\dfrac{2}{1 + x^2}}$

29. Calcular, derivando implícitamente, la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

I. $xy - 2x + 3y = 4$

II. $x^3 + 6xy + y^3 = 8$

III. $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$

IV. $xy^2 = 10$

V. $x^2 + y^2 = x^2y^2$

VI. $4x^2 + 9y^2 = 36$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{2 - y}{x + 3} \; ; \; dy = \dfrac{2 - y}{x + 3} dx}$

SOLUCIÓN II: $y' = \dfrac{-(x^2+2y)}{2x+y^2}$; $dy = \dfrac{-(x^2+2y)}{2x+y^2}dx$

SOLUCIÓN III: $y' = \dfrac{2x-3y}{3x+4y}$; $dy = \dfrac{2x-3y}{3x+4y}dx$

SOLUCIÓN IV: $y' = -\dfrac{y}{2x}$; $dy = -\dfrac{y}{2x}dx$

SOLUCIÓN V: $y' = \dfrac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$; $dy = \dfrac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}dx$

SOLUCIÓN VI: $y' = \dfrac{-4x}{9y}$; $dy = \dfrac{-4x}{9y}dx$

30. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida del siguiente modo:

$$f(x)\begin{cases} = x^2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN I: **f(x) es continua $\forall x \in R$**

SOLUCIÓN II: **f(x) es derivable $\forall x \in R$**

31. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida del siguiente modo:

$$f(x)\begin{cases} = 2 & \text{si } x < 0 \\ = x - 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ = x^2 - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN I: **f(x) es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$**
f(x) es discontinua en $x = 0$; $x = 4$

SOLUCIÓN II: **f(x) es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$**
f(x) no es derivable en $x = 0$ y $x = 4$

32. Hallar el valor de la derivada de $y = \dfrac{x^2 - x}{e^x}$ para $x_0 = 0$ y calcular la ecuación de la tangente a la curva representada por esa ecuación en el punto de abscisa $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN I: $y_0' = -1$

SOLUCIÓN II: $x + y = 0$

33. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{12}{x}$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

SOLUCIÓN: $3x - y - 12 = 0$

34. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 4$ en el punto de ordenada 14 y abscisa negativa.

SOLUCIÓN: $7x + y = 0$

35. Dada la curva $y = 3x^2 - 10$ y la recta $y = 12x + n$, determinar «n» para que la recta sea tangente a la curva.

SOLUCIÓN: $n = -22$

36. Determinar los puntos de la curva: $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$.

SOLUCIÓN: $P_1 = (1, 16)$; $P_2 = (-7, 276)$

37. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 40 = 0$$

en el punto $(-1, 5)$.

SOLUCIÓN: $x - 2y + 11 = 0$

38. Hallar la ecuación de las tangentes a la parábola $y^2 = 4x + 8$ en los puntos de abscisa $x = 2$.

I. Determinación de los puntos de tangencia.

II. Ecuación de la tangente en P_1

III. Ecuación de la tangente en P_2

SOLUCIÓN I: $P_1\ (2, 4)$; $P_2\ (2, -4)$

SOLUCIÓN II: $x - 2y + 6 = 0$

SOLUCIÓN III: $x + 2y + 6 = 0$

39. Un móvil se desplaza de forma que su movimiento se rige por la ecuación:

$$S = t^3 + 2t^2 - 4t - 20$$

Hallar su posición, velocidad y aceleración iniciales y después de 8 segundos.

SOLUCIÓN: $\begin{cases} S_0 = 20 \text{ UL} \\ v_0 = -4 \text{ UL/s} \\ a_0 = 4 \text{ UL/s}^2 \end{cases}$ $\begin{cases} S_1 = 588 \text{ UL} \\ v_1 = 220 \text{ UL/s} \\ a_1 = 52 \text{ UL/s}^2 \end{cases}$

40. Un punto se mueve de forma que el espacio recorrido viene dado por la ecuación:

$$S = 10 + 6t - t^2$$

Dando el espacio en metros cuando el tiempo se toma en segundos. ¿Cuándo y dónde se para?

SOLUCIÓN: **Se detiene a los 3 seg. de iniciado el movimiento, a 19 m del origen**

41. Dada la función $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 4x$; hallar Δy_0, dy_0, $\Delta y_0 - dy_0$ para $x_0 = 2$ y $dx_0 = 0{,}1$.

SOLUCIÓN: $\begin{cases} \Delta y_0 = 0{,}5025 \\ dy_0 = 0{,}5 \\ \Delta y_0 - dy_0 = 0{,}0025 \end{cases}$

42. Calcular, aproximadamente, el volumen del plástico que se precisa para fabricar un balón de 10 cm de radio interior y 3 mm de espesor.

SOLUCIÓN: $dV \simeq \Delta V = 376{,}99 \text{ cm}^3$

43. Hallar la masa aproximada de un tubo de cobre de 2 m de largo, diámetro interior 4 cm y 2 mm de espesor. Densidad del cobre: 9 gr/cm³

SOLUCIÓN: $M \simeq 4\,523{,}4 \text{ gr}$

MÁXIMOS, MÍNIMOS, PUNTOS DE INFLEXIÓN

Función creciente en un punto

Sea la función $y = f(x)$*, definida en el* $[a, b]$

> Se dice que la función $y = f(x)$ es creciente en el punto $x_0 \in (a, b)$, si en un entorno de x_0, $(x_0 - h, x_0 + h) \in (a, b)$, infinitamente pequeño, se verifica:
>
> $$\left.\begin{array}{l} f(x_0 - h) \leqslant f(x_0) \\ f(x_0 + h) \geqslant f(x_0) \end{array}\right.$$

NOTA: *Si* $f(x)$ *es creciente en* $x_0 \in (a, b)$ *se verifica* $f'(x_0) > 0$.

Función decreciente en un punto

Sea la función $y = f(x)$*, definida en el* $[a, b]$

> Se dice que la función $y = f(x)$ es decreciente en el punto $x_0 \in (a, b)$, si en un entorno de x_0, $(x_0 - h, x_0 + h) \in (a, b)$, infinitamente pequeño, se verifica:
>
> $$\left.\begin{array}{l} f(x_0 - h) \geqslant f(x_0) \\ f(x_0 + h) \leqslant f(x_0) \end{array}\right\}$$

NOTA: *Si* $f(x)$ *es decreciente en* $x_0 \in (a, b)$ *se verifica* $f'(x_0) < 0$.

Máximos y mínimos relativos de una función

Sea la función $y = f(x)$*, continua en el* $[a, b]$

> Se dice que la función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en el $x_0 \in (a, b)$, si se verifica:
>
> $$f(x_0 - h) < f(x_0) > f(x_0 + h)$$
>
> siendo $(x_0 - h, x_0 + h)$ un entorno de x_0 infinitamente pequeño.

Si $y = f(x)$ *tiene un máximo relativo en* $x_0 \in (a, b)$ *se verifica:*

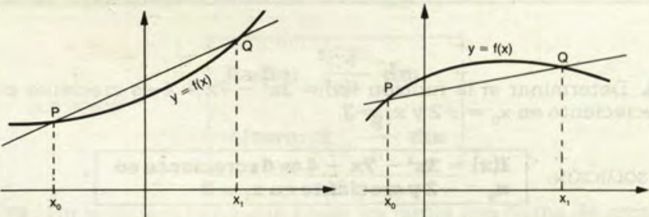
$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\}$$

> Se dice que la función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo en el $x_0 \in (a, b)$, si se verifica:
>
> $$f(x_0 - h) > f(x_0) < f(x_0 + h)$$
>
> siendo $(x_0 - h, x_0 + h)$ un entorno de x_0 infinitamente pequeño.

Si $y = f(x)$ *tiene un mínimo relativo en* $x_0 \in (a, b)$ *se verifica:*

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array}\right\}$$

Función cóncava de un intervalo



Sea la función $y = f(x)$ *definida en el* $[a, b]$

> Se dice que la función $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo (a, b) si $\forall\, x_0, x_1 \in (a, b)$ la recta determinada por los puntos $P\,[\,x_0, f(x_0)\,]$ y $Q\,[\,x_1, f(x_1)\,]$ queda por encima de la gráfica de $f(x)$ en el (x_0, x_1).

NOTA: *Si* $f(x)$ *es cóncava hacia arriba en el* (a, b)*, en todo* $x_0 \in (a, b)$ *se verifica* $f''(x_0) > 0$.

> Se dice que la función $y = f(x)$ es convexa, o cóncava hacia abajo, en el intervalo (a, b) si $\forall\, x_0, x_1 \in (a, b)$ la recta determinada por los puntos $P\,[\,x_0, f(x_0)\,]$ y $Q\,[\,x_1, f(x_1)\,]$ queda por debajo de la gráfica de $f(x)$ en el (x_0, x_1).

NOTA: *Si* $f(x)$ *es convexa en el* (a, b)*, en todo* $x_0 \in (a, b)$ *se verifica* $f''(x_0) < 0$.

Puntos de inflexión

> Se llaman puntos de inflexión de una función $y = f(x)$, a aquellos puntos en los que la curva cambia de concavidad.
>
> Si $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x_0 \in (a, b)$ se verifica:
>
> $$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

44. Determinar si la función $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ es creciente o decreciente en $x_0 = -2$ y $x_1 = 3$.

SOLUCIÓN: **$f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ es decreciente en $x_0 = -2$ y creciente en $x_1 = 3$**

45. Averiguar si la función $y = \operatorname{sen} 2x$ es creciente o decreciente en $x_0 = \pi/3$.

SOLUCIÓN: **$y = \operatorname{sen} 2x$ es decreciente en $x_0 = \pi/3$**

46. Hallar los intervalos en los que la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 5$$

es creciente.

SOLUCIÓN: **$(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$**

47. La función $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ ¿es creciente o decreciente?

SOLUCIÓN: **Decreciente $\forall x \in R \mid x \neq 1$**

48. Dada la función $f(x) = L\dfrac{x-1}{x+1}$ hallar su dominio de definición y los intervalos de su dominio en los que la función es creciente.

SOLUCIÓN: **$f(x)$ está definida en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$**
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

49. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$.

SOLUCIÓN:
MÍN.: $P_1\left(\frac{5}{3}, \frac{104}{27}\right)$
MÁX.: $P_2\,(1, 4)$
INFLEX.: $P_3\left(\frac{4}{3}, \frac{106}{27}\right)$

50. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$.

SOLUCIÓN:
MÁX.: No tiene
MÍN.: No tiene
INFLEX.: $P_1\,(1, 7)$

51. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$y = \frac{2x - 7}{x^2 + 8}$$

SOLUCIÓN:
MÁX.: $P_1\left(8, \frac{1}{8}\right)$
MÍN.: $P_2\,(-1, -1)$

52. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$y = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2}$$

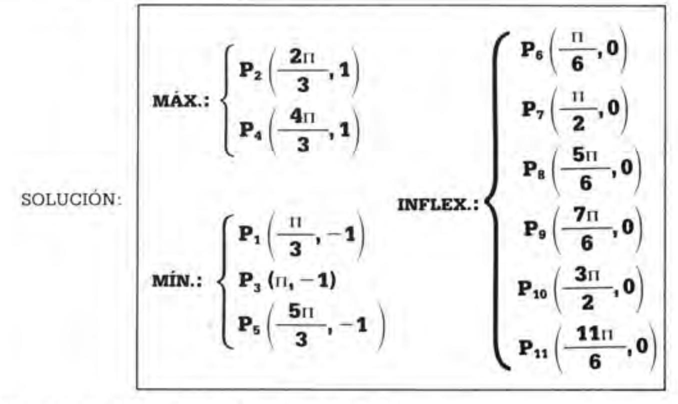
SOLUCIÓN:
MÁX.: No tiene
MÍN.: $P_3\left(-9, -\frac{5\,083}{8}\right)$
INFLEX.: $P_4\,(0, 0)$; $P_5\,(-6, -54)$

53. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función: $y = \operatorname{sen} 2x$ en el $I = (0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN:
MÁX.: $P_1\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; $P_3\left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)$
MÍN.: $P_2\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$; $P_4\left(\frac{7\pi}{4}, -1\right)$
INFLEX.: $P_5\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $P_6\,(\pi, 0)$; $P_7\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

54. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función: $y = \cos 3x$ en el $I = (0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN:



MÁX.: $P_2\left(\frac{2\pi}{3}, 1\right)$; $P_4\left(\frac{4\pi}{3}, 1\right)$
MÍN.: $P_1\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$; $P_3\,(\pi, -1)$; $P_5\left(\frac{5\pi}{3}, -1\right)$
INFLEX.: $P_6\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$; $P_7\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $P_8\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$; $P_9\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right)$; $P_{10}\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; $P_{11}\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

55. Hallar los intervalos en los que la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 18x - 6$$

es cóncava.

SOLUCIÓN: **$x \in \left(\frac{11}{2}, \infty\right)$**

56. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad de la curva:

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x + 1$$

SOLUCIÓN:
Cóncava: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
Convexa: $x \in (1, 2)$

57. Se desea construir una caja abierta, de base cuadrada y 864 dm^3 de capacidad. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que su superficie sea mínima?

SOLUCIÓN:
Lado de la base: 12 dm
Altura: 6 dm

58. Con una plancha de cartón cuadrada de 12 dm de lado, se quiere construir una caja con el mayor volumen posible, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando luego la plancha de forma adecuada, ¿qué lado debe tener el cuadrado que se ha de cortar?

SOLUCIÓN: **Hay que cortar cuadrados de 2 dm de lado**

59. Hallar la base y la altura del triángulo de máxima área que se puede inscribir en una circunferencia de 12 cm de diámetro.

SOLUCIÓN:
Longitud de la base: $6\sqrt{3}$ cm
Longitud de la altura: 9 cm

60. Descomponer el número 40 en dos partes, tales que el triple del cuadrado de la primera más siete veces el cuadrado de la segunda sea mínimo.

SOLUCIÓN:
Primera parte: 28
Segunda parte: 12

61. Siendo la suma de los catetos de un triángulo rectángulo 12 cm, hallar la longitud de los que corresponden al de área máxima.

SOLUCIÓN: **El de área máxima es el que tiene los dos catetos iguales, de 6 cm de longitud cada uno.**

62. Se quiere cercar un terreno rectangular, situado junto a una carretera. Si la valla que está junto a la carretera cuesta a 2 400 pts. por metro y la del resto a 1 200 pts., hallar el área del mayor campo que puede cercarse con un presupuesto de 432 000 pts.

SOLUCIÓN: **Frente: 60 m**, **Fondo: 90 m** | **Área = 5 400 m²**

63. De todos los triángulos isósceles de 30 cm de perímetro, ¿cuál es el de área máxima?

SOLUCIÓN: **Base: 10 cm**
Lados laterales: 10 cm

64. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide 12 cm ¿cuál es la longitud de la base del que tiene el área máxima?

SOLUCIÓN: **Longitud de la base: $12\sqrt{2}$ cm**

65. Hallar el radio y la altura del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir en una superficie esférica de 24 cm de radio.

SOLUCIÓN: **Radio de la base: $8\sqrt{6}$ cm**
Altura: $16\sqrt{3}$ cm

66. Hallar el radio y la altura del cono de volumen máximo que se puede inscribir en una superficie esférica de 12 cm de radio.

SOLUCIÓN: **Radio: $8\sqrt{2}$ cm**
Altura: 16 cm

67. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

SOLUCIÓN: **Base: $15\sqrt{2}$ cm**
Altura: $15\sqrt{2}$ cm

68. Hallar la longitud de la base del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en una circunferencia de 16π cm de longitud.

SOLUCIÓN: **Base: $8\sqrt{3}$ cm**

69. De todos los triángulos isósceles cuya base y altura suman 30 cm, ¿qué longitud tiene la base del de área máxima?

SOLUCIÓN: **Base: 15 cm**

70. De todos los cilindros de 8 dm³ de volumen, ¿cuanto mide el radio y la altura del de menor superficie total?

SOLUCIÓN: **Radio: $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm**
Altura: $2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm

71. Un jardinero tiene que hacer un jardín con forma de sector circular de 120 m de perímetro. ¿Qué radio le debe dar para que su superficie sea máxima?

SOLUCIÓN: **Radio: 37,5 m**

72. Un triángulo isósceles, de 30 cm de perímetro, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué longitud debe tener la base para que el volumen del cono sea máximo?

SOLUCIÓN: **Longitud de la base: 12 cm**

73. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene 10 cm de base y 15 cm de altura.

SOLUCIÓN: **Base: 5 cm**
Altura: 7,5 cm

74. Se quiere construir un marco para una ventana de 1 m² de área. El coste del marco se estima en 600 pts. por cada m de altura de la ventana y 300 pts. por cada m de anchura. ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico?

SOLUCIÓN: **Ancho: 1,414 m**
Alto: 0,707 m

75. A las 10 de la mañana un barco A está 130 millas al este de otro barco B. El barco A navega hacia el oeste a 20 nudos y el B hacia el sur a 30 nudos. ¿A qué hora será mínima la distancia entre ambos barcos?

SOLUCIÓN: **A las 12 horas**

76. Dos pueblos, A y B, distan 6 y 9 km de la orilla de un río, cuyo cauce podemos considerar rectilíneo, y quieren construir mancomunadamente un depósito de agua en la orilla del río para abastecer ambos pueblos, que distan entre sí $\sqrt{409}$ km. ¿En qué punto de la orilla deben hacer el depósito para que la longitud de tubería de conducción sea mínima?

SOLUCIÓN: **A 8 km de la proyección del pueblo A sobre la orilla**

ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para representar gráficamente una función $y = f(x)$ es conveniente estudiar sucesivamente las siguientes cuestiones.

Intervalos de existencia

Se trata de hallar el dominio de definición, es decir, el conjunto de valores de x para los que existe f (x).

Simetría respecto al eje OY

Una función f(x) es par, y su gráfica simétrica respecto a OY, si para todo valor de x perteneciente al dominio se verifica que $f(x) = f(-x)$

Simetría respecto al origen

Una función f(x) es impar, y su gráfica simétrica respecto al origen de coordenadas, si para todo valor de x perteneciente al dominio se verifica que $f(x) = -f(-x)$.

Intersección con el eje OX

Los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje OX, se determinan resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Intersección con el eje OY

Los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje OY, se determinan resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Asíntotas

Se llaman puntos del infinito de una función $y = f(x)$, a aquellos puntos de la curva en los que al menos una de sus coordenadas se hace infinita.
Las tangentes a una curva en sus puntos del infinito se denominan asíntotas.

I. *Asíntotas verticales*

Cuando el punto del infinito es de la forma $P(x_0, \infty)$ la asíntota correspondiente se llama vertical.
Para hallar su ecuación, que será de la forma $x = x_0$, basta determinar x_0, valor de x para el que f(x) es infinito.

II. *Asíntotas horizontales*

Si el punto del infinito es de la forma $P(\infty, y_0)$ la asíntota correspondiente se llama horizontal.
Para hallar su ecuación, que será de la forma $y = y_0$, basta determinar y_0, valor que toma y cuando x se hace infinita.

III. *Asíntotas oblicuas*

Si el punto del infinito es de la forma $P(\infty, \infty)$ la asíntota correspondiente se llama oblicua.
Para hallar su ecuación, que será de la forma $y = mx + n$, hay que determinar m y n. Se hace del siguiente modo:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \text{ ó } \lim\limits_{x \to \infty} f'(x) \\ n = \lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - mx \,] \end{cases}$$

Máximos, mínimos y crecimientos

Se hallan los máximos y mínimos de la función con arreglo a las normas dadas para ello.
También puede ser interesante determinar los intervalos de crecimiento, atendiendo para ello, como hemos visto, al signo de la derivada primera.

Puntos de inflexión y concavidades

Se hallan los puntos de inflexión de la función con arreglo a la normas dadas para ello.
También puede ser interesante determinar los intervalos de concavidad y convexidad, atendiendo para ello, como hemos visto, al signo de la derivada segunda.

Tabla de valores

Determinados los intervalos de existencia, trazadas las asíntotas, situados máximos, mínimos, puntos de inflexión y de intersección con los ejes, conocidas las simetrías y a ser posible los intervalos de crecimiento y concavidad, es fundamental, para el trazado de la curva, una adecuada tabla de valores.

EJERCICIOS PROPUESTOS

77. Hallar los puntos de intersección con los ejes de las siguientes curvas:

I. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$ **III.** $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x^2 - 1}$

II. $y = x^3 - 36x$ **IV.** $y = x^4 - 10x^2 + 9$

SOLUCIÓN I: **$P_1(1, 0)$; $P_2(3, 0)$; $P_3\left(0, -\dfrac{3}{5}\right)$**

SOLUCIÓN II: **$P_1(0, 0)$; $P_2(6, 0)$; $P_3(-6, 0)$**

SOLUCIÓN III: **$P_1(0, 0)$; $P_2(-2, 0)$; $P_3(4, 0)$**

SOLUCIÓN IV: **$P_1(-1, 0)$; $P_2(1, 0)$; $P_3(3, 0)$
$P_4(-3, 0)$; $P_5(0, 9)$**

78. Hallar los intervalos de existencia de la función:

$$y = \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}}$$

SOLUCIÓN: **f(x) está definida en $[1, 2) \cup (3, \infty)$**

79. Hallar los intervalos de existencia de la función:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 + 2x}}$$

SOLUCIÓN: **f(x) está definida en $[-1, 0) \cup (2, 3]$**

80. Hallar el dominio de definición de la función:

$$y = L\,\frac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 + 2x}$$

SOLUCIÓN: **El dominio de f(x) es $(-1, 0) \cup (2, 3)$**

81. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes curvas:

I. $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 7x + 10}$ **III.** $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

II. $y = \dfrac{x^3}{(10 + x)^2}$ **IV.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

SOLUCIÓN I:
**Verticales: $x = 2$; $x = 5$
Horizontales: $y = 2$
Oblicuas: No hay**

SOLUCIÓN II:
**Verticales: $x = -10$
Horizontales: No hay
Oblicuas: $y = x - 20$**

SOLUCIÓN III:
**Verticales: $x = 2$; $x = -2$
Horizontales: $y = 0$
Oblicuas: No hay**

SOLUCIÓN IV:
**Verticales: $x = 3$
Horizontales: No hay
Oblicuas: $y = x + 1$**

82. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

83. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

84. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{2(x-1)}{x}$$

85. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

86. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

87. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

88. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{4x - 5}{2(x^2 - 1)}$$

89. Estudiar y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 11}{2(x - 3)}$$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$$y_0' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x_0 + h)^2 - 1] - (3x_0^2 - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x_0^2 + 6x_0 h + 3h^2 - 1 - 3x_0^2 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} (6x_0 + 3h) =$$

$$= 6x_0 = 12$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y_0' = 12}}$

2. RESOLUCIÓN

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - 2(x+h)^2 + 3] - (x^3 - 2x^2 + 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3 - x^3 + 2x^2 - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 4x - 2h) = 3x^2 - 4x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y' = 3x^2 - 4x}}$

3. RESOLUCIÓN

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1-(x+h)} - \frac{1}{1-x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(1-x) - [1-(x+h)]}{[1-(x+h)](1-x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{[1-(x+h)](1-x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{[1-(x+h)](1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y' = \frac{1}{(1-x)^2}}}$

4. RESOLUCIÓN

$$y_0' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^2} - \frac{1}{x_0^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0^2 - (x_0+h)^2}{(x_0+h)^2 \cdot x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 - (x_0^2 + 2x_0h + h^2)}{h(x_0+h)^2 \cdot x_0^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2x_0 - h}{(x_0+h)^2 \cdot x_0^2} = \frac{-2x_0}{x_0^2 \cdot x_0^2} = \frac{-2}{x_0^3} = \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{y_0' = \frac{1}{4}}}$

5. RESOLUCIÓN

I.

$$y = 8x^4 - 3x^3 + 2x \Rightarrow y' = 32x^3 - 9x^2 + 2$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = 32x^3 - 9x^2 + 2 \; ; \; dy = (32x^3 - 9x^2 + 2)dx}}$

II.

$$y = \frac{4}{5}x^4 - \frac{2}{7}x^3 + 4x^2 - 2 \Rightarrow y' = \frac{16}{5}x^3 - \frac{6}{7}x^2 + 8x$$

SOLUCIÓN II:

$$\mathbf{y' = \frac{16}{5}x^3 - \frac{6}{7}x^2 + 8x}$$

$$\mathbf{dy = \left(\frac{16}{5}x^3 - \frac{6}{7}x^2 + 8x\right)dx}$$

III.

$$y = \frac{3}{4}x^{2/5} - \frac{1}{2}x^{-2/3} \Rightarrow y' = \frac{6}{20}x^{-3/5} + \frac{2}{6}x^{-5/3}$$

SOLUCIÓN III: $$\mathbf{y' = \frac{3}{10\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^5}}}$$ $$\mathbf{dy = \left(\frac{3}{10\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)dx}$$

IV.

$$y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x^3} = x^{2/5} - 3x^{3/4} \Rightarrow y' = \frac{2}{5}x^{-3/5} - \frac{9}{4}x^{-1/4}$$

SOLUCIÓN IV: $$\mathbf{y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{9}{4\sqrt[4]{x}}}$$ $$\mathbf{dy = \left(\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{9}{4\sqrt[4]{x}}\right)dx}$$

6. RESOLUCIÓN

I.

$$y = (3x-5)^4 \Rightarrow y' = 4(3x-5)^3 \cdot 3$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = 12\,(3x-5)^3}$

II.

$$y = 9\,(2x^2-1)^3 \Rightarrow y' = 27\,(2x^2-1)^2 \cdot 4x$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = 108x\,(2x^2-1)^2}$

III.

$$y = (3x-1)^2\,(2x+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = 2\,(3x-1)\,3\,(2x+1) + 2\,(3x-1)^2$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = 6\,(3x-1)\,(2x+1) + 2\,(3x-1)^2}$

IV.

$$y = \frac{4}{(2x-1)^7} \Rightarrow y' = \frac{-4 \cdot 7\,(2x-1)^6 \cdot 2}{(2x-1)^{14}}$$

SOLUCIÓN IV: $$\mathbf{y' = \frac{-56}{(2x-1)^8}}$$

7. RESOLUCIÓN

I.

$$y = x^3\,(x^2+1)\,(x+6) = (x^5+x^3)\,(x+6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = (5x^4+3x^2)\,(x+6) + (x^5+x^3)$$

SOLUCIÓN I: $$\mathbf{y' = x^2\,(5x^2+3)\,(x+6) + x^3\,(x^2+1)}$$ $$\mathbf{dy = [x^2\,(5x^2+3)\,(x+6) + x^3\,(x^2+1)]\,dx}$$

II.

$$y = \frac{3x^2-2}{5x+4} \Rightarrow y' = \frac{6x\,(5x+4) - 5\,(3x^2-2)}{(5x+4)^2}$$

SOLUCIÓN II: $$\mathbf{y' = \frac{15x^2+24x+10}{(5x+4)^2}}$$ $$\mathbf{dy = \frac{15x^2+24x+10}{(5x+4)^2}\,dx}$$

III.

$$y = \frac{10+5x}{10-5x} \Rightarrow y' = \frac{5\,(10-5x) + 5\,(10+5x)}{[5\,(2-x)]^2} =$$
$$= \frac{100}{25\,(2-x)^2}$$

SOLUCIÓN III: $$\mathbf{y' = \frac{4}{(2-x)^2}\ ;\ dy = \frac{4}{(2-x)^2}\,dx}$$

IV.

$$y = \frac{3x^2+2}{x^3-11x^2} \Rightarrow y' = \frac{6x\,(x^3-11x^2) - (3x^2-22x)\,(3x^2+2)}{(x^3-11x^2)^2}$$

SOLUCIÓN IV: $$\mathbf{y' = \frac{-3x^4-6x^2+44x}{(x^3-11x^2)^2}}$$ $$\mathbf{dy = \frac{-3x^4-6x^2+44x}{(x^3-11x^2)^2}\,dx}$$

8. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \left(\frac{2x-1}{4x+3}\right)^3 \Rightarrow y' = 3\left(\frac{2x-1}{4x+3}\right)^2 \frac{2\,(4x+3) - 4\,(2x-1)}{(4x+3)^2}$$

SOLUCIÓN I: $$\mathbf{y' = \left(\frac{2x-1}{4x+3}\right)^2 \frac{30}{(4x+3)^2}}$$

II.

$$y = L\,(4x^2-5x) \Rightarrow y' = \frac{8x-5}{4x^2-5x}$$

SOLUCIÓN II: $$\mathbf{y' = \frac{8x-5}{4x^2-5x}}$$

III.

$$y = \left(\frac{5x^2-3}{7}\right)^5 \Rightarrow y' = 5\left(\frac{5x^2-3}{7}\right)^4 \frac{10x}{7}$$

SOLUCIÓN III: $$\mathbf{y' = \left(\frac{5x^2-3}{7}\right)^4 \frac{50x}{7}}$$

IV.

$$y = L\,(3x-5) \Rightarrow y' = \frac{3}{3x-5}$$

SOLUCIÓN IV: $$\mathbf{y' = \frac{3}{3x-5}}$$

9. RESOLUCIÓN

I.

$$y = L\,\frac{4-5x}{2x+3} = L\,(4-5x) - L\,(2x+3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{-5}{4-5x} - \frac{2}{2x+3} = \frac{-5\,(2x+3) - 2\,(4-5x)}{(4-5x)\,(2x+3)} = \ldots$$

SOLUCIÓN I: $$\mathbf{y' = \frac{-23}{(4-5x)(2x+3)}}$$ $$\mathbf{dy = \frac{-23}{(4-5x)(2x+3)}\,dx}$$

II.

$$y = L\,(3x^2-2x)^4 = 4\,L\,(3x^2-2x) \Rightarrow y' = \frac{4\,(6x-2)}{3x^2-2x}$$

SOLUCIÓN II: $$\mathbf{y' = \frac{8(3x-1)}{3x^2-2x}}$$ $$\mathbf{dy = \frac{8(3x-1)}{3x^2-2x}\,dx}$$

III.

$$y = L\,(4+\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{1/2\,\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}\,(4+\sqrt{x})}$$

SOLUCIÓN III: $$\mathbf{y' = \frac{1}{2\,\sqrt{x}\,(4+\sqrt{x})}}$$ $$\mathbf{dy = \frac{1}{2\,\sqrt{x}\,(4+\sqrt{x})}\,dx}$$

IV.

$$y = 5a^{2x} \Rightarrow y' = 10a^{2x}\,La$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = 10a^{2x}\,La\ ;\ dy = 10a^{2x}\,La\,dx}$

10. RESOLUCIÓN

I.

$$y = 4x \cdot 5^{3x} \Rightarrow y' = 4 \cdot 5^{3x} + 4x \cdot 3 \cdot 5^{3x} L5$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{y' = 4 \cdot 5^{3x}\,[1 + 3x\,L\,5]}$

II.

$$y = \sqrt[5]{(3x-2)^2} = (3x-2)^{2/5} \Rightarrow y' = \frac{2}{5}(3x-2)^{-3/5} \cdot 3$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{y' = \dfrac{6}{5\sqrt[5]{(3x-2)^3}}}$

III.

$$y = \left(\frac{2x^3 - x}{4x+3}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = 3\left(\frac{2x^3 - x}{4x+3}\right)^2 \frac{(6x^2-1)(4x+3) - 4(2x^3 - x)}{(4x+3)^2}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{y' = 3\left(\dfrac{2x^3 - x}{4x+3}\right)^2 \dfrac{16x^3 + 18x^2 - 3}{(4x+3)^2}}$

IV.

$$y = 4e^{2x} \Rightarrow y' = 8e^{2x}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{y' = 8e^{2x}}$

11. RESOLUCIÓN

I.

$$y = 5e^{3x} \Rightarrow y' = 15e^{3x}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{y' = 15e^{3x} \;;\; dy = 15e^{3x}\,dx}$

II.

$$y = (6x^2 - 1)\,e^{3x} \Rightarrow y' = 12xe^{3x} + 3e^{3x}(6x^2 - 1)$$

SOLUCIÓN II:
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = 3e^{3x}(6x^2 + 4x - 1) \\ dy = 3e^{3x}(6x^2 + 4x - 1)\,dx \end{array}}$$

III.

$$y = \frac{3^{5x}}{2x-1} \Rightarrow y' = \frac{5 \cdot 3^{5x} \cdot L3\,(2x-1) - 2 \cdot 3^{5x}}{(2x-1)^2}$$

SOLUCIÓN III:
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = \dfrac{3^{5x}\,[5(2x-1)L3 - 2]}{(2x-1)^2} \\ dy = \dfrac{3^{5x}\,[5(2x-1)L3 - 2]}{(2x-1)^2}\,dx \end{array}}$$

IV.

$$y = \sqrt{(2x+7)^{13/2}} = (2x+7)^{13/10} \Rightarrow y' = \frac{13}{10}(2x+7)^{3/10} \cdot 2$$

SOLUCIÓN IV:
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = \dfrac{13\sqrt[10]{(2x+7)^3}}{5} \\ dy = \dfrac{13\sqrt[10]{(2x+7)^3}}{5}\,dx \end{array}}$$

12. RESOLUCIÓN

I.

$$y = L\frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = Lx - \frac{1}{2}L(x^2-3) \Rightarrow y' = \frac{1}{x} - \frac{2x}{2(x^2-3)}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{y' = \dfrac{-3}{x(x^2-3)}}$

II.

$$y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \Rightarrow y' = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{y' = \dfrac{4x-3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}}$

III.

$$y = \sqrt{5x-7} \Rightarrow y' = \frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-7}}}$

IV.

$$y = \frac{4 \cdot e^{3x}}{5} \Rightarrow y' = \frac{12e^{3x}}{5}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{y' = \dfrac{12e^{3x}}{5}}$

13. RESOLUCIÓN

I.

$$y = L\frac{1-e^x}{1+e^x} = L(1-e^x) - L(1+e^x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1-e^x)(1+e^x)} = \cdots$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{y' = \dfrac{-2e^x}{1-e^{2x}} \;;\; dy = \dfrac{-2e^x}{1-e^{2x}}\,dx}$

II.

$$y = L\sqrt{3-x^2} = \frac{1}{2}L(3-x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{3-x^2}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{y' = \dfrac{-x}{3-x^2} \;;\; dy = \dfrac{-x}{3-x^2}\,dx}$

III.

$$y = L(5x)^4 = 4\,L(5x) \Rightarrow y' = \frac{4 \cdot 5}{5x}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{y' = \dfrac{4}{x} \;;\; dy = \dfrac{4}{x}\,dx}$

IV.

$$y = e^{x/2}(3x+1) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}e^{x/2}(3x+1) + 3e^{x/2}$$

SOLUCIÓN IV:

$$\boxed{y' = e^{x/2}\left(\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right) \;;\; dy = e^{x/2}\left(\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right)dx}$$

14. RESOLUCIÓN

I.

$$y = a^{(x^2)} \Rightarrow y' = 2x\,a^{(x^2)} \cdot La$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{y' = 2x\,a^{(x^2)}\,La}$

II.

$$y = L\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}L(a^2 + x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{a^2 + x^2}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{y' = \dfrac{x}{a^2 + x^2}}$

III.

$$y = e^{\sqrt{3x}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{3x}}\,e^{\sqrt{3x}}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}\,e^{\sqrt{3x}}}$

IV.

$$y = L\,(1 + e^{2x}) \Rightarrow y' = \frac{2\,e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}}}$

15. RESOLUCIÓN

I.

$$y = sen\ 5x \Rightarrow y' = 5\cos 5x$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = 5\cos 5x\ ;\ dy = 5\cos 5x\,dx}}$

II.

$$y = 4\,sen\,(2x + 1) \Rightarrow y' = 8\cos(2x + 1)$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{y' = 8\cos(2x + 1)\ ;\ dy = 8\cos(2x + 1)\,dx}}$

III.

$$y = \cos(4x - 1) \Rightarrow y' = -4\,sen\,(4x - 1)$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{y' = -4\,sen\,(4x - 1)\ ;\ dy = -4\,sen\,(4x - 1)\,dx}}$

IV.

$$y = \frac{3}{5}\cos(5x - 2) \Rightarrow y' = -\frac{3}{5}\cdot 5\,sen\,(5x - 2)$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{y' = -3\,sen\,(5x - 2)\ ;\ dy = -3\,sen\,(5x - 2)\,dx}}$

16. RESOLUCIÓN

I.

$$y = tg\ 3x \Rightarrow y' = 3\sec^2 3x$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = 3\sec^2 3x}}$

II.

$$y = 8\,tg\,\frac{3x - 1}{16} \Rightarrow y' = 8\cdot\frac{3}{16}\sec^2\frac{3x - 1}{16}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{3}{2}\sec^2\dfrac{3x - 1}{16}}}$

III.

$$y = ctg\ 2x \Rightarrow y' = -2\,cosec^2\,2x$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{y' = -2\,cosec^2\,2x}}$

IV.

$$y = 10\,ctg\,(6x - 1) \Rightarrow y' = -10\cdot 6\,cosec^2\,(6x - 1)$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{y' = -60\,cosec^2\,(6x - 1)}}$

17. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \sec 3x \Rightarrow y' = 3\sec 3x\,tg\,3x$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = 3\sec 3x\,tg\,3x\ ;\ dy = 3\sec 3x\,tg\,3x\,dx}}$

II.

$$y = 4\sec(x - 5) \Rightarrow y' = 4\sec(x - 5)\,tg\,(x - 5)$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{y' = 4\sec(x - 5)\,tg\,(x - 5)}\\ \mathbf{dy = 4\sec(x - 5)\,tg\,(x - 5)\,dx}\end{array}}$

III.

$$y = cosec\ 6x \Rightarrow y' = -6\,cosec\,6x\,ctg\,6x$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{y' = -6\,cosec\,6x\,ctg\,6x}\\ \mathbf{dy = -6\,cosec\,6x\,ctg\,6x\,dx}\end{array}}$

IV.

$$y = 3\,cosec\,\frac{x}{6} \Rightarrow y' = -3\,\frac{1}{6}\,cosec\,\frac{x}{6}\,ctg\,\frac{x}{6}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{y' = -\dfrac{1}{2}\,cosec\,\dfrac{x}{6}\,ctg\,\dfrac{x}{6}}\\ \mathbf{dy = -\dfrac{1}{2}\,cosec\,\dfrac{x}{6}\,ctg\,\dfrac{x}{6}\,dx}\end{array}}$

18. RESOLUCIÓN

I.

$$y = arc\ sen\ 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}}}$

II.

$$y = 5\,arc\ sen\,(2x - 3) \Rightarrow y' = \frac{5\cdot 2}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{10}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}}}$

III.

$$y = arc\cos 3x \Rightarrow y' = \frac{-3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{-3}{\sqrt{1 - 9x^2}}}}$

IV.

$$y = 4\,arc\cos\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{-4\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{-2}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}}}$

19. RESOLUCIÓN

I.

$$y = arc\ tg\ x^2 \Rightarrow y' = \frac{2x}{1 + x^4}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{2x}{1 + x^4}\ ;\ dy = \dfrac{2x}{1 + x^4}\,dx}}$

II.

$$y = 5\,arc\ tg\,(2x - 1) \Rightarrow y' = \frac{5\cdot 2}{1 + (2x - 1)^2}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{10}{1 + (2x - 1)^2}\ ;\ dy = \dfrac{10}{1 + (2x - 1)^2}\,dx}}$

III.

$$y = arc\ ctg\ 7x \Rightarrow y' = -\frac{7}{1 + 49x^2}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{-7}{1 + 49x^2}\ ;\ dy = \dfrac{-7}{1 + 49x^2}\,dx}}$

IV.

$$y = 8\,arc\ ctg\,(x - 2) \Rightarrow y' = -\frac{8}{1 + (x - 2)^2}$$

SOLUCION IV: $\boxed{\mathbf{y' = \dfrac{-8}{1 + (x - 2)^2}\ ;\ dy = \dfrac{-8}{1 + (x - 2)^2}\,dx}}$

20. RESOLUCIÓN

I.

$$y = arc\sec 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{2x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

SOLUCIÓN I: $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

II.

$$y = 4 \text{ arc sec } (2x - 3) \Rightarrow y' = \frac{4 \cdot 2}{(2x-3)\sqrt{(2x-3)^2 - 1}}$$

SOLUCIÓN II: $y' = \dfrac{8}{(2x-3)\sqrt{(2x-3)^2-1}}$

III.

$$y = \text{arc cosec } 5x \Rightarrow y' = -\frac{5}{5x\sqrt{25x^2-1}}$$

SOLUCIÓN III: $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{25x^2-1}}$

IV.

$$y = 4 \text{ arc cosec } (2-x) \Rightarrow y' = -\frac{4(-1)}{(2-x)\sqrt{(2-x)^2-1}}$$

SOLUCIÓN IV: $y' = \dfrac{4}{(2-x)\sqrt{(2-x)^2-1}}$

21. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \text{sen } 2x^3 \Rightarrow y' = 6x^2 \cos 2x^3$$

SOLUCIÓN I: $y' = 6x^2 \cos 2x^3$; $dy = 6x^2 \cos 2x^3\, dx$

II.

$$y = \text{sen } (2x)^3 = \text{sen } 8x^3 \Rightarrow y' = 24x^2 \cos 8x^3$$

SOLUCIÓN II: $y' = 24x^2 \cos 8x^3$; $dy = 24x^2 \cos 8x^3\, dx$

III.

$$y = \text{sen}^3\, 2x \Rightarrow y' = 3\, \text{sen}^2\, 2x \cdot 2 \cos 2x$$

SOLUCIÓN III: $y' = 6\, \text{sen}^2\, 2x \cos 2x$
$dy = 6\, \text{sen}^2\, 2x \cos 2x\, dx$

IV.

$$y = 4 \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow y' = 4 \cdot 2 \cos \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2}\text{ sen } \frac{x}{2}\right) = \cdots$$

SOLUCIÓN IV: $y' = -2 \text{ sen } x$; $dy = -2 \text{ sen } x\, dx$

22. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \text{sen } 4x \cos 4x = \frac{1}{2}\text{ sen } 8x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 8 \cos 8x$$

SOLUCIÓN I: $y' = 4 \cos 8x$

II.

$$y = 5\, e^{\cos 3x} \Rightarrow y' = -5 \cdot 3 \text{ sen } 3x\, e^{\cos 3x}$$

SOLUCIÓN II: $y' = -15 \text{ sen } 3x\, e^{\cos 3x}$

III.

$$y = 4 \cos^2 \frac{x}{5} + 3 \text{ sen } 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -8 \cos \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{5} \text{ sen } \frac{x}{5} + 15 \cos 5x$$

SOLUCIÓN III: $y' = -\dfrac{4}{5} \text{ sen } \dfrac{2x}{5} + 15 \cos 5x$

IV.

$$y = \frac{\cos 2x}{1 + \text{tg } 2x} \Rightarrow y' = \frac{-2 \text{ sen } 2x\,(1 + \text{tg } 2x) - 2 \sec^2 2x \cos 2x}{(1 + \text{tg } 2x)^2}$$

SOLUCIÓN IV: $y' = \dfrac{-2\left[\text{sen } 2x\,(1 + \text{tg } 2x) + \sec 2x\right]}{(1 + \text{tg } 2x)^2}$

23. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)^4 \Rightarrow y' = -4\left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \text{ sen } \left(\frac{x}{2}\right)^4$$

SOLUCIÓN I: $y' = -\dfrac{x^3}{4} \text{ sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4$
$dy = -\dfrac{x^3}{4} \text{ sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 dx$

II.

$$y = \cos^3 2x \Rightarrow y' = 3 \cos^2 2x\,(-2 \text{ sen } 2x)$$

SOLUCIÓN II: $y' = -6 \cos^2 2x \text{ sen } 2x$
$dy = -6 \cos^2 2x \text{ sen } 2x\, dx$

III.

$$y = \cos 2x^3 \Rightarrow y' = -6x^2 \text{ sen } 2x^3$$

SOLUCIÓN III: $y' = -6x^2 \text{ sen } 2x^3$; $dy = -6x^2 \text{ sen } 2x^3\, dx$

IV.

$$y = \cos (2x)^3 = \cos 8x^3 \Rightarrow y' = -24x^2 \text{ sen } 8x^3$$

SOLUCIÓN IV: $y' = -24x^2 \text{ sen } 8x^3$; $dy = -24x^2 \text{ sen } 8x^3\, dx$

24. RESOLUCIÓN

I.

$$y = e^{\text{sen}(x + \pi/2)} \Rightarrow y' = \cos(x + \pi/2)\, e^{\text{sen}(x + \pi/2)}$$

SOLUCIÓN I: $y' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) e^{\text{sen}(x + \pi/2)}$

II.

$$y = 4^{\text{sen}(x + \pi/2)} \Rightarrow y' = \cos(x + \pi/2) \cdot 4^{\text{sen}(x + \pi/2)} \cdot L4$$

SOLUCIÓN II: $y' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 4^{\text{sen}(x + \pi/2)} \cdot L4$

III.

$$y = 2 \text{ tg}^3\, 5x \Rightarrow y' = 6 \text{ tg}^2\, 5x \cdot 5 \sec^2 5x$$

SOLUCIÓN III: $y' = 30 \text{ tg}^2\, 5x \sec^2 5x$

IV.

$$y = \frac{1}{x}\, e^{\text{sen } x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}\, e^{\text{sen } x} + \cos x\, e^{\text{sen } x}\, \frac{1}{x}$$

SOLUCIÓN IV: $y' = \dfrac{1}{x}\, e^{\text{sen } x}\left[\cos x - \dfrac{1}{x}\right]$

25. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \frac{1}{8} L \frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x} = \frac{1}{8}\left[L(1 + \text{sen } x) - L(1 - \text{sen } x)\right]$$

$$y' = \frac{1}{8}\left[\frac{\cos x}{1 + \text{sen } x} - \frac{\cos x \cdot}{1 - \text{sen } x}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\, \frac{\cos x\,(1 - \text{sen } x) - \cos x\,(1 + \text{sen } x)}{1 - \text{sen}^2 x} = \cdots$$

SOLUCIÓN I: $y' = \dfrac{1}{4 \cos x}$; $dy = \dfrac{1}{4 \cos x}\, dx$

II.

$$y = \sqrt{sen\ 2x} \Rightarrow y' = \frac{2 \cos 2x}{2\sqrt{sen\ 2x}}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{sen\ 2x}}\ ;\ dy = \frac{\cos 2x}{\sqrt{sen\ 2x}}\,dx}$

III.

$$y = \cos x\, e^{sen\,x} \Rightarrow y' = -sen\,x\, e^{sen\,x} + \cos^2 x\, e^{sen\,x}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = e^{sen\,x}(\cos^2 x - sen\,x)}$
$\mathbf{dy = e^{sen\,x}(\cos^2 x - sen\,x)\,dx}$

IV.

$$y = tg^2 3x \Rightarrow y' = 2\,tg\,3x \cdot 3\sec^2 3x$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = 6\,tg\,3x \sec^2 3x}$
$\mathbf{dy = 6\,tg\,3x \sec^2 3x\,dx}$

26. RESOLUCIÓN

I.

$$y = sen^4 \frac{x}{2} \Rightarrow y' = 4\,sen^3 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = 2\,sen^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$

II.

$$y = L \cos e^{2x} \Rightarrow y' = \frac{-2e^{2x}\,sen\,e^{2x}}{\cos e^{2x}}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = -2e^{2x}\,tg\,e^{2x}}$

III.

$$y = L\sqrt{(1+sen\,x)^3} = \frac{3}{2} L(1+sen\,x) \Rightarrow y' = \frac{3}{2} \frac{\cos x}{1+sen\,x}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \frac{3\cos x}{2(1+sen\,x)}}$

IV.

$$y = (2x)^{sen\,2x} \Rightarrow L\,y = sen\,2x \cdot L(2x)$$

$$\frac{y'}{y} = 2\cos 2x \cdot L(2x) + \frac{1}{x} sen\,2x \Rightarrow y' = y(\cdots)$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = (2x)^{sen\,2x}\left[2\cos 2x\, L(2x) + \frac{1}{x} sen\,2x\right]}$

27. RESOLUCIÓN

I.

$$y = L\sqrt{\frac{1+sen\,4x}{1-sen\,4x}} = \frac{1}{2}[L(1+sen\,4x) - L(1-sen\,4x)]$$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{4\cos 4x}{1+sen\,4x} - \frac{4\cos 4x}{1-sen\,4x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4\cos 4x(1-sen\,4x) - 4\cos 4x(1+sen\,4x)}{1-sen^2 4x} = \cdots$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \frac{4}{\cos 4x}\ ;\ dy = \frac{4}{\cos 4x}\,dx}$

II.

$$y = \frac{x}{2} - \frac{sen\,4x}{8} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{4\cos 4x}{8}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \frac{1-\cos 4x}{2}\ ;\ dy = \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx}$

III.

$$y = \frac{sen^5 3x}{5} - \frac{sen^7 3x}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{5\,sen^4 3x \cdot 3\cos 3x}{5} - \frac{7\,sen^6 3x \cdot 3\cos 3x}{7} =$$

$$= 3\,sen^4 3x \cos 3x\,(1 - sen^2 3x) = 3\,sen^4 3x \cos^3 3x$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = 3\,sen^4 3x \cos^3 3x}$
$\mathbf{dy = 3\,sen^4 3x \cos^3 3x\,dx}$

IV.

$$y = \cos^{2/3} 3x\left[\frac{\cos^3 3x}{11} - \frac{\cos 3x}{5}\right] = \frac{\cos^{11/3} 3x}{11} - \frac{\cos^{5/3} 3x}{5}$$

$$y' = \frac{-\frac{11}{3}\cos^{8/3} 3x \cdot 3\,sen\,3x}{11} - \frac{-\frac{5}{3}\cos^{2/3} 3x \cdot 3\,sen\,3x}{5} =$$

$$= -\cos^{8/3} 3x\,sen\,3x + \cos^{2/3} 3x\,sen\,3x =$$

$$= \cos^{2/3} 3x\,sen\,3x\,(1-\cos^2 3x) = \cos^{2/3} 3x \cdot sen^3 3x$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = \cos^{2/3} 3x\,sen^3 3x}$
$\mathbf{dy = \cos^{2/3} 3x\,sen^3 3x\,dx}$

28. RESOLUCIÓN

I.

$$y = (\cos 3x)^{5x} \Rightarrow Ly = 5x\,L\cos 3x$$

$$\frac{y'}{y} = 5\,L\cos 3x - \frac{3\,sen\,3x}{\cos 3x} \cdot 5x \Rightarrow y' = y(\cdots)$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = (\cos 3x)^{5x} \cdot [\,5\,L\cos 3x - 15x\,tg\,3x\,]}$

II.

$$y = \frac{\cos(2x+1)[\cos^2(2x+1) - 3]}{6} =$$

$$= \frac{\cos^3(2x+1) - 3\cos(2x+1)}{6}$$

$$y' = \frac{-3\cos^2(2x+1)\cdot 2\,sen(2x+1) + 6\,sen(2x+1)}{6} =$$

$$= sen(2x+1)[1-\cos^2(2x+1)] = sen^3(2x+1)$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = sen^3(2x+1)}$

III.

$$y = \frac{1}{a}\left[\frac{sen^4 ax}{4} - \frac{sen^6 ax}{6}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{a}\left[\frac{4\,sen^3 ax \cdot a\cos ax}{4} - \frac{6\,sen^5 ax \cdot a\cos ax}{6}\right] =$$

$$= sen^3 ax \cos ax - sen^5 ax \cos ax =$$

$$= sen^3 ax \cos ax\,[1 - sen^2 ax] = sen^3 ax \cos^3 ax$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = sen^3 ax \cos^3 ax}$

IV.

$$y = arc\,ctg\,\frac{1+x}{1-x} - arc\,tg\,x$$

$$y' = \frac{-\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = -\frac{2}{1+x^2}}$

29. RESOLUCIÓN

I.

$$xy - 2x + 3y = 4 \Rightarrow y + xy' - 2 + 3y' = 0;$$

$$y'(x+3) = 2 - y \Rightarrow y' = \frac{2-y}{x+3}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y' = \dfrac{2-y}{x+3}\ ;\ dy = \dfrac{2-y}{x+3}dx}$

II.

$$x^3 + 6xy + y^3 = 8 \Rightarrow 3x^2 + 6y + 6xy' + 3y^2y' = 0;$$

$$3y'(2x + y^2) = -3(x^2 + 2y) \Rightarrow y' = \frac{-(x^2+2y)}{2x+y^2}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{y' = \dfrac{-(x^2+2y)}{2x+y^2}\ ;\ dy = \dfrac{-(x^2+2y)}{2x+y^2}dx}$

III.

$$x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \Rightarrow 2x - 3y - 3xy' - 4yy' = 0;$$

$$2x - 3y = y'(3x + 4y) \Rightarrow y' = \frac{2x-3y}{3x+4y}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{y' = \dfrac{2x-3y}{3x+4y}\ ;\ dy = \dfrac{2x-3y}{3x+4y}dx}$

IV.

$$xy^2 = 10 \Rightarrow y^2 + 2xyy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{2xy}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{y' = -\dfrac{y}{2x}\ ;\ dy = -\dfrac{y}{2x}dx}$

V.

$$x^2 + y^2 = x^2y^2 \Rightarrow 2x + 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy';$$

$$2yy'(1 - x^2) = 2x(y^2 - 1) \Rightarrow y' = \frac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$$

SOLUCIÓN V: $\mathbf{y' = \dfrac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}\ ;\ dy = \dfrac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}dx}$

VI.

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow 8x + 18yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-8x}{18y}$$

SOLUCIÓN VI: $\mathbf{y' = \dfrac{-4x}{9y}\ ;\ dy = \dfrac{-4x}{9y}dx}$

30. RESOLUCIÓN

I.

a)

$\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0$, f(x) es continua, pues es el producto de dos funciones continuas.

b)

Para $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$, puesto que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

y $\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ en todo entorno reducido de $x = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$, la f(x) es continua en $x = 0$

SOLUCIÓN I: **f(x) es continua $\forall x \in \mathbf{R}$**

II.

a)

$\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0$, f(x) es derivable, pues es el producto de dos funciones derivables.

b) Para $x = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0 \cdot | \leqslant 1 | = 0$$

Como $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$, f(x) es derivable en $x = 0$

SOLUCIÓN II: **f(x) es derivable $\forall x \in \mathbf{R}$**

31. RESOLUCIÓN

I.

a)

La f(x) es continua $\forall x \in C$:

$$C = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$$

pues f(x) es una función polinómica en cada uno de estos tres intervalos.

b)

Para $x = 0$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 2 = 2\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x-2) = -2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Discontinua en } x = 0$$

c)

Para $x = 4$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^-} (x-2) = 2\\ \lim_{x\to 4^+} f(x) &= \lim_{x\to 4^+} (x^2-4) = 12\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Discontinua en } x = 4$$

SOLUCIÓN I: **f(x) es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$**
f(x) es discontinua en $x = 0$; $x = 4$

II.

a)

La f(x) es derivable $\forall x \in C$

$$C = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$$

pues es una función polinómica en cada uno de estos tres intervalos.

b)

La f(x) no es derivable en $x = 0$ y $x = 4$, pues es discontinua en estos puntos.

SOLUCIÓN II: **f(x) es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$**
f(x) no es derivable en $x = 0$ y $x = 4$

32. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \frac{x^2 - x}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{(2x-1)e^x - e^x(x^2 - x)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{e^x(-x^2 + 3x - 1)}{e^{2x}} = \frac{-x^2 + 3x - 1}{e^x} \Rightarrow y_0' = \frac{-1}{1} = -1$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y_0' = -1}$

II.

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2 - x}{e^x}\\ x_0 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

$$y - 0 = -1(x - 0)$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{x + y = 0}$

33. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{12}{x} \Rightarrow y' = \frac{-12}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{12}{x} \\ y' = \dfrac{-12}{x^2} \\ x_0 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0 = 6 \\ P_0\ (2, 6) \\ y_0' = -3 \end{array}\right.$$

$$y - y_0 = y_0'\ (x - x_0)$$
$$y - 6 = -3\ (x - 2)$$

SOLUCIÓN: **$3x - y - 12 = 0$**

34. RESOLUCIÓN

a) *Cálculo del punto de tangencia:*

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cancel{x_1 = 5} \\ \cancel{y_1 = 14} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ y_2 = 14 \end{array}\right.$$

$$P\ (-2, 14)$$

b) *Ecuación de la tangente:*

$$y = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow y' = 2x - 3 \Rightarrow y_2' = -7$$
$$y - y_2 = y_2'\ (x - x_2)$$
$$y - 14 = -7\ (x + 2)$$

SOLUCIÓN: **$7x + y = 0$**

35. RESOLUCIÓN

a) *Cálculo del punto de tangencia P.*

La derivada de la curva en el punto de tangencia da la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto, por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} y_0' = 6x_0 \\ y_0' = m = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x_0 = 12 \Rightarrow x_0 = 2$$
$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow P\ (2, 2)$$

b) *Determinación de n.*

Como la recta $y = 12x + n$ ha de pasar por $P\ (2, 2)$:

$$2 = 12 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -22$$

SOLUCIÓN: **$n = -22$**

36. RESOLUCIÓN

Serán aquellos en los que la derivada de la función sea igual a la pendiente de la recta.

$$\left.\begin{array}{r} y' = 3x^2 + 18x - 9 \\ y' = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -7 \end{array}\right.$$
$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 16\ ;\ x_2 = -7 \Rightarrow y_2 = 276$$

SOLUCIÓN: **$P_1 = (1, 16)\ ;\ P_2 = (-7, 276)$**

37. RESOLUCIÓN

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 40 = 0 \Rightarrow 2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0$$

El valor de la derivada en el punto de tangencia será:

$$-2 + 10y_0' - 4 + 2y_0' = 0 \Rightarrow y_0' = \frac{1}{2}$$
$$y - y_0 = y_0'\ (x - x_0)$$
$$y - 5 = \frac{1}{2}\ (x + 1)$$

SOLUCIÓN: **$x - 2y + 11 = 0$**

38. RESOLUCIÓN

I. *Determinación de los puntos de tangencia.*

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

SOLUCIÓN I: **$P_1\ (2, 4)\ ;\ P_2\ (2, -4)$**

II. *Ecuación de la tangente en P_1.*

$$2yy' = 4 \Rightarrow y_1' = \frac{1}{2}$$
$$y - y_1 = y_1'\ (x - x_1)$$
$$y - 4 = \frac{1}{2}\ (x - 2)$$

SOLUCIÓN II: **$x - 2y + 6 = 0$**

III. *Ecuación de la tangente en P_2.*

$$2yy' = 4 \Rightarrow y_2' = -\frac{1}{2}$$
$$y + 4 = -\frac{1}{2}\ (x - 2)$$

SOLUCIÓN III: **$x + 2y + 6 = 0$**

39. RESOLUCIÓN

$$S = t^3 + 2t^2 - 4t - 20$$
$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t - 4$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$$

I. *Para $t_0 = 0$:*

$S_0 = -20$ UL ; $v_0 = -4$ UL/s ; $a_0 = 4$ UL/s²

II. *Para $t_1 = 8$:*

$S_1 = 588$ UL ; $v_1 = 220$ UL/s ; $a_1 = 52$ UL/s²

SOLUCIÓN:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{S_0 = 20\ UL} \\ \mathbf{v_0 = -4\ UL/s} \\ \mathbf{a_0 = 4\ UL/s^2} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{S_1 = 588\ UL} \\ \mathbf{v_1 = 220\ UL/s} \\ \mathbf{a_1 = 52\ UL/s^2} \end{array}\right.$$

40. RESOLUCIÓN

Se para cuando $v = 0$, donde se encuentre en el momento en que su $v = 0$

$$S = 10 + 6t - t^2 \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = 6 - 2t$$
$$v = 0 \Rightarrow t = 3s\ ;\ t = 3s \Rightarrow S = 19\ m$$

SOLUCIÓN: **Se detiene a los 3 seg. de iniciado el movimiento, a 19 m del origen**

41. RESOLUCIÓN

$$\Delta y_0 = f\ (2, 1) - f\ (2) = 9{,}5025 - 9 = 0{,}5025$$
$$dy_0 = \left(\frac{x_0}{2} + 4\right)dx_0 = 5 \times 0{,}1 = 0{,}5$$
$$\Delta y_0 - dy_0 = 0{,}5025 - 0{,}5 = 0{,}0025$$

SOLUCIÓN:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{\Delta y_0 = 0{,}5025} \\ \mathbf{dy_0 = 0{,}5} \\ \mathbf{\Delta y_0 - dy_0 = 0{,}0025} \end{array}\right.$$

42. RESOLUCIÓN

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2\, dr$$

Para $r = 10$ cm y $dr = 0{,}3$ cm se obtiene: $dV = 376{,}99\ cm^3$

SOLUCIÓN: **$dV = \Delta V = 376{,}99\ cm^3$**

43. RESOLUCIÓN

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow dV = 2\pi r h\, dr$$

para $h = 200$ cm, $r = 2$ cm, $dr = 0{,}2$ cm

se obtiene $dV = \Delta V = 502{,}6\ cm^3$

$$M = V \cdot D = 502{,}6\ cm^3 \cdot 9\ gr/cm^3$$

SOLUCIÓN: **M = 4 523,4 gr**

44. RESOLUCIÓN

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 4 \Rightarrow f'(x) = 6x - 7$$

a)

$$x_0 = -2 \Rightarrow f'(x_0) < 0\text{: función decreciente en } x_0$$

b)

$$x_1 = 3 \Rightarrow f'(x_1) > 0\text{: función creciente en } x_1$$

SOLUCIÓN: **$f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ es decreciente en $x_0 = -2$ y creciente en $x_1 = 3$**

45. RESOLUCIÓN

$$y = \text{sen } 2x \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

$$x_0 = \pi/3 \Rightarrow y_0' < 0\text{: función decreciente en } x_0$$

SOLUCIÓN: **$y = \text{sen } 2x$ es decreciente en $x_0 = \pi/3$**

46. RESOLUCIÓN

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 5 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

La f(x) será creciente siempre que f'(x) > 0

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad ó \quad x < 2$$

SOLUCIÓN: **$(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$**

47. RESOLUCIÓN

$$f(x) = \frac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

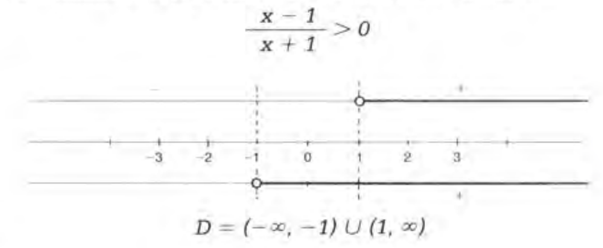
Como $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$, excepto para $x = 1$, para el que no está definida, f(x) es decreciente $\forall x \in \mathbf{R} \mid x \neq 1$

SOLUCIÓN: **Decreciente $\forall x \in \mathbf{R} \mid x \neq 1$**

48. RESOLUCIÓN

a) *El dominio corresponde a los valores de x que hacen:*

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$



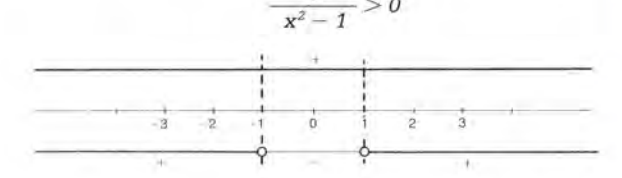
$$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

b)

$$f(x) = L\,\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$$

Será creciente para todo x perteneciente a su dominio que haga:

$$\frac{2}{x^2-1} > 0$$



La f'(x) es positiva en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, y como f(x) está definida en ambos intervalos esta función es creciente en dichos intervalos.

SOLUCIÓN: **f(x) está definida en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$**
f(x) es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

49. RESOLUCIÓN

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$$
$$y' = 3x^2 - 8x + 5$$
$$y'' = 6x - 8$$
$$y''' = 6$$

a)

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow y_1'' > 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_1\left(\frac{5}{3}, \frac{104}{27}\right)$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } P_2\ (1, 4)$$

b)

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow y_3''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_3\left(\frac{4}{3}, \frac{106}{27}\right)$$

SOLUCIÓN:
MÍN.: $P_1\left(\frac{5}{3}, \frac{104}{27}\right)$
MÁX.: P_2 (1, 4)
INFLEX.: $P_3\left(\frac{4}{3}, \frac{106}{27}\right)$

50. RESOLUCIÓN

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 6$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

a)

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 6 = 0$$

No tiene soluciones reales, no hay máximo ni mínimo.

b)

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_1\ (1, 7)$$

SOLUCIÓN:
MÁX.: No tiene
MÍN.: No tiene
INFLEX.: P_1 (1, 7)

51. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{2x - 7}{x^2 + 8}$$

$$y' = \frac{-2x^2 + 14x + 16}{(x^2+8)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 - 42x^2 - 96x + 112}{(x^2+8)^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -2x^2 + 14x + 16 = 0 \Rightarrow x_1 = 8; \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = 8 \Rightarrow y_1'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } P_1\left(8, \frac{1}{8}\right)$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2'' > 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_2\ (-1, -1)$$

SOLUCIÓN:
MÁX.: $P_1\left(8, \frac{1}{8}\right)$
MÍN.: P_2 (−1, −1)

52. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x^4 + 12x^3}{24} \qquad y' = \frac{x^3 + 9x^2}{6}$$

$$y'' = \frac{x^2 + 6x}{2} \qquad y''' = x + 3$$

a)

$$y' = 0 \Rightarrow x^3 + 9x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ ;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = -9$$

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow y_1'' = y_2'' = 0 \qquad \text{«DUDOSO»}$$

$$x_3 = -9 \Rightarrow y_3'' > 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_3\left(-9, -\frac{5\,083}{8}\right)$$

b)

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_4 = 0; \quad x_5 = -6$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow y_4''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_4\ (0, 0)$$

NOTA: *Aclarado el caso dudoso: en $x_1 = x_2 = 0$ no hay máximo ni mínimo, sino un punto de inflexión.*

$$x_5 = -6 \Rightarrow y_5''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_5\ (-6, -54)$$

SOLUCIÓN:

MÁX.: No tiene

MÍN.: $\mathbf{P_3\left(-9,\ \frac{5\,083}{8}\right)}$

INFLEX.: $\mathbf{P_4\ (0, 0)}$; $\mathbf{P_5\ (-6, -54)}$

53. RESOLUCIÓN

$$y = \text{sen } 2x$$
$$y' = 2 \cos 2x$$
$$y'' = -4 \text{ sen } 2x$$
$$y''' = -8 \cos 2x$$

a)

$$y' = 0 \Rightarrow 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4};\ x_2 = \frac{3\pi}{4};\ x_3 = \frac{5\pi}{4};$$
$$x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_1'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } P_1\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow y_2'' > 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_2\left(\frac{3\pi}{4},\ -1\right)$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow y_3'' > 0 \Rightarrow \text{máx.: } P_3\left(\frac{5\pi}{4},\ 1\right)$$

$$x_4 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow y_4'' < 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_4\left(\frac{7\pi}{4},\ -1\right)$$

b)

$$y'' = 0 \Rightarrow -4 \text{ sen } 2x = 0 \Rightarrow x_5 = \frac{\pi}{2};\ x_6 = \pi;\ x_7 = \frac{3\pi}{2}$$

NOTA: *No sirven ni $x = 0$ ni $x = 2\pi$ porque no pertenecen al $(0, 2\pi)$*

$$x_5 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_5''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_5\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$$

$$x_6 = \pi \Rightarrow y_6''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_6\ (\pi, 0)$$

$$x_7 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y_7''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_7\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$$

SOLUCIÓN:

MÁX.: $\mathbf{P_1\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)}$; $\mathbf{P_3\left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)}$

MÍN.: $\mathbf{P_2\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)}$; $\mathbf{P_4\left(\frac{7\pi}{4}, -1\right)}$

INFLEX.: $\mathbf{P_5\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$; $\mathbf{P_6\ (\pi, 0)}$; $\mathbf{P_7\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)}$

54. RESOLUCIÓN

$$y = \cos 3x$$
$$y' = -3 \text{ sen } 3x$$
$$y'' = -9 \cos 3x$$
$$y''' = 27 \text{ sen } 3x$$

a)

$$y' = 0 \Rightarrow -3 \text{ sen } 3x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3};\ x_2 = \frac{2\pi}{3};\ x_3 = \pi;$$
$$x_4 = \frac{4\pi}{3};\ x_5 = \frac{5\pi}{3}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y_1'' > 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_1\left(\frac{\pi}{3},\ -1\right)$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y_2'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } P_2\left(\frac{2\pi}{3},\ 1\right)$$

$$x_3 = \pi \Rightarrow y_3'' > 0 \Rightarrow \text{mín. } P_3\ (\pi, -1)$$

$$x_4 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow y_4'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } P_4\left(\frac{4\pi}{3},\ 1\right)$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow y_5'' > 0 \Rightarrow \text{mín.: } P_5\left(\frac{5\pi}{3},\ -1\right)$$

b)

$$y'' = 0 \Rightarrow -9 \cos 3x = 0 \Rightarrow x_6 = \frac{\pi}{6};\ x_7 = \frac{\pi}{2};\ x_8 = \frac{5\pi}{6};$$

$$x_9 = \frac{7\pi}{6};\ x_{10} = \frac{3\pi}{2};\ x_{11} = \frac{11\pi}{6}$$

$$x_6 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y_6''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_6\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$$

$$x_7 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_7''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_7\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$$

$$x_8 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y_8''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_8\left(\frac{5\pi}{6},\ 0\right)$$

$$x_9 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow y_9''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_9\left(\frac{7\pi}{6},\ 0\right)$$

$$x_{10} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y_{10}''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_{10}\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$$

$$x_{11} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow y_{11}''' \neq 0 \Rightarrow \text{inflex.: } P_{11}\left(\frac{11\pi}{6},\ 0\right)$$

SOLUCIÓN:

MÁX.: $\mathbf{P_2\left(\frac{2\pi}{3}, 1\right)}$; $\mathbf{P_4\left(\frac{4\pi}{3}, 1\right)}$

MÍN.: $\mathbf{P_1\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)}$; $\mathbf{P_3\ (\pi, -1)}$; $\mathbf{P_5\left(\frac{5\pi}{3}, -1\right)}$

INFLEX.: $\mathbf{P_6\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)}$; $\mathbf{P_7\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$; $\mathbf{P_8\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)}$; $\mathbf{P_9\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right)}$; $\mathbf{P_{10}\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)}$; $\mathbf{P_{11}\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)}$

55. RESOLUCIÓN

La función es cóncava cuando $y'' > 0$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 18x - 6;\ y' = x^2 - 11x + 18;$$
$$y'' = 2x - 11$$
$$y'' > 0 \Rightarrow 2x - 11 > 0 \Rightarrow x > \frac{11}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x \in \left(\frac{11}{2},\ \infty\right)}$

56. RESOLUCIÓN

La función es cóncava cuando $y'' > 0$ y convexa cuando $y'' < 0$

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x + 1;\quad y' = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 5$$
$$y'' = 12x^2 - 36x + 24 = 12\ (x - 1)\ (x - 2)$$

a) *Intervalos de concavidad:*

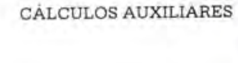
$$y'' > 0 \Rightarrow 12\ (x - 1)\ (x - 2) > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ ó } x < 1$$

b) *Intervalos de convexidad:*

$$y'' < 0 \Rightarrow 12\ (x - 1)\ (x - 2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

SOLUCIÓN: **Cóncava: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$**
Convexa: $x \in (1, 2)$

57. RESOLUCIÓN



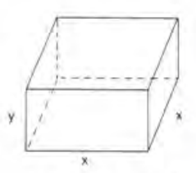
CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{3\,456}{x}$$

$$S' = 2x - \frac{3\,456}{x^2} \; ; \; S'' = 2 + \frac{6\,912}{x^3}$$

$$S' = 0 \Rightarrow x = 12 \text{ dm}$$

$$x = 12 \Rightarrow S'' > 0 \Rightarrow \text{mín.:} \begin{cases} x = 12 \text{ dm} \\ y = 6 \text{ dm} \end{cases}$$



$$V = x^2 y = 864$$

$$y = \frac{864}{x^2}$$

SOLUCIÓN: **Lado de la base: 12 dm**
Altura: 6 dm

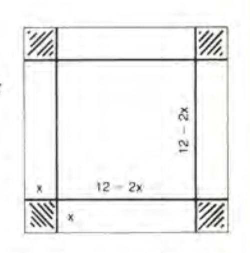
58. RESOLUCIÓN

$$V = (12 - 2x)^2 x = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$V' = 144 - 96x + 12x^2; \quad V'' = -96 + 24x$$

$$V' = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 6$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow V'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } x_1 = 2 \text{ dm}$$



NOTA: *Para $x_2 = 6$ dm obtendríamos $V'' > 0$, mínimo, cosa por otra parte evidente, pues la plancha habría sido cortada en cuatro partes iguales y el volumen de la caja construida «con lo que queda» sería, naturalmente, nulo.*

SOLUCIÓN: **Hay que cortar cuadrados de 2 dm de lado**

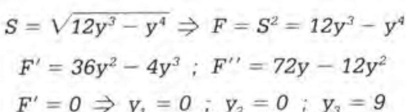
59. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = x \cdot y = y \cdot \sqrt{12y - y^2}$$

$$S = \sqrt{12y^3 - y^4}$$

En casos similares a este podemos simplificar mucho los cálculos razonando del siguiente modo: S será máximo cuando lo sea la función $F = S^2$, siempre que descartemos las soluciones que hagan a S negativa, si las hay, cosa que en cualquier caso es inadmisible por la naturaleza del problema.



$$S = \sqrt{12y^3 - y^4} \Rightarrow F = S^2 = 12y^3 - y^4$$

$$F' = 36y^2 - 4y^3 \; ; \; F'' = 72y - 12y^2$$

$$F' = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \; ; \; y_2 = 0 \; ; \; y_3 = 9$$

$$y_3 = 9 \Rightarrow F'' < 0 \Rightarrow \text{máx.:} \begin{cases} y_3 = 9 \text{ cm} \\ x_3 = 3\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}$$

$$x = \sqrt{6^2 - (y - 6)^2} = \sqrt{12y - y^2}$$

NOTA: La solución $y = 0$, que también anula la derivada primera, no merece la pena ensayarla, pues es inaceptable por la naturaleza del problema.

SOLUCIÓN: **Longitud de la base: $6\sqrt{3}$ cm**
Longitud de la altura: 9 cm

60. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

Sean x e y la primera y segunda parte, respectivamente:

$$x + y = 40$$
$$x = 40 - y$$

$$F = 3x^2 + 7y^2 = 3\,(40 - y)^2 + 7y^2$$

$$F = 10y^2 - 240y + 4\,800$$

$$F' = 20y - 240 \; ; \; F'' = 20$$

$$F' = 0 \Rightarrow y_1 = 12$$

$$y_1 = 12 \Rightarrow F'' > 0 \Rightarrow \text{mín.:} \begin{cases} x_1 = 28 \\ y_1 = 12 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **Primera parte: 28**
Segunda parte: 12

61. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x\,(12 - x)}{2} = \frac{12x - x^2}{2}$$

$$S' = 6 - x; \quad S'' = -1$$

$$S' = 0 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$x_1 = 6 \Rightarrow S'' < 0 \Rightarrow \text{máx.:} \begin{cases} x_1 = 6 \text{ cm} \\ y_1 = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$x + y = 12$$
$$y = 12 - x$$

SOLUCIÓN: **El de área máxima es el que tiene los dos catetos iguales, de 6 cm de longitud cada uno**

62. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = x \cdot y = x\left(180 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$S = 180x - \frac{3}{2}x^2$$

$$S' = 180 - 3x \; ; \; S'' = -3$$

$$S' = 0 \Rightarrow x_1 = 60 \text{ m}$$

$$x_1 = 60 \Rightarrow S'' < 0 \Rightarrow \text{máx.:} \begin{cases} x_1 = 60 \text{ m} \\ y_1 = 90 \text{ m} \end{cases}$$

$$P = 2\,400\,x + 1\,200\,(x + 2y)$$

$$432\,000 = 3\,600\,x + 2\,400\,y$$

$$y = 180 - \frac{3}{2}x$$

SOLUCIÓN: **Frente: 60 m** | **Fondo: 90 m** | **Área: 5 400 m²**

63. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = x \cdot h = x\sqrt{225 - 30x}$$

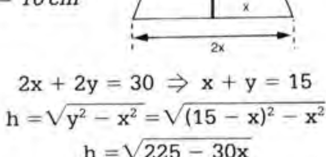
$$S = \sqrt{225x^2 - 30x^3}$$

$$F = S^2 = 225x^2 - 30x^3$$

$$F' = 450x - 90x^2 \; ; \; F'' = 450 - 180x$$

$$F' = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 5$$

$$x_2 = 5 \Rightarrow F'' < 0 \Rightarrow \text{máx.:} \begin{cases} x_2 = 5 \text{ cm} \\ y_2 = 10 \text{ cm} \end{cases}$$



$$2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15$$

$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2}$$

$$h = \sqrt{225 - 30x}$$

NOTA: Para $F = S^2$ ver resolución n.º *16*. La $x_1 = 0$, que anula F' no merece la pena ensayarla por la naturaleza del problema.

SOLUCIÓN: **Base: 10 cm**
Lados laterales: 10 cm

64. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

$$S = x \cdot h = x\sqrt{144 - x^2}$$

$$S = \sqrt{144x^2 - x^4}$$

$$F = S^2 = 144x^2 - x^4$$

$$F' = 288x - 4x^3 \; ; \; F'' = 288 - 12x^2$$

$$F' = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 6\sqrt{2} \; ; \; x_3 = -6\sqrt{2}$$

$$x_2 = 6\sqrt{2} \Rightarrow F'' < 0 \Rightarrow \text{máx.: } x_2 = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{144 - x^2}$$

SOLUCIÓN: **Longitud de la base: $12\sqrt{2}$ cm**

65. RESOLUCIÓN

$$V = \pi x^2 y = \frac{\pi (2\,304 - y^2)\, y}{4}$$

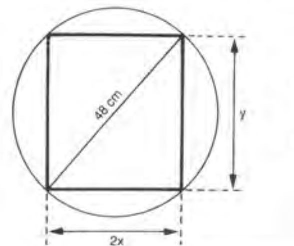
$$V = \frac{\pi}{4}(2\,304\, y - y^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{4}(2\,304 - 3y^2); \quad V'' = \frac{-3\pi y}{2}$$

$$V' = 0 \Rightarrow y_1 = 16\sqrt{3}; \quad y_2 = -16\sqrt{3}$$

$$y_1 = 16\sqrt{3} \Rightarrow V'' < 0 \Rightarrow máx.: \begin{cases} y_1 = 16\sqrt{3}\,cm \\ x_1 = 8\sqrt{6}\,cm \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES



$$4x^2 + y^2 = 48^2$$

$$x^2 = \frac{2\,304 - y^2}{4}$$

SOLUCIÓN: **Radio de la base: $8\sqrt{6}$ cm**
Altura: $16\sqrt{3}$ cm

66. RESOLUCIÓN

$$V = \frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi (24y - y^2)\, y}{3}$$

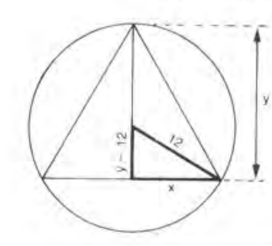
$$V = \frac{\pi (24y^2 - y^3)}{3}$$

$$V' = \pi (16y - y^2); \quad V'' = \pi (16 - 2y)$$

$$V' = 0 \Rightarrow y_1 = 0; \quad y_2 = 16\,cm$$

$$y_2 = 16\,cm \Rightarrow V'' < 0 \Rightarrow máx.: \begin{cases} y_2 = 16\,cm \\ x_2 = 8\sqrt{2}\,cm \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES



$$x^2 = 12^2 - (y - 12)^2$$

$$x^2 = 24y - y^2$$

SOLUCIÓN: **Radio: $8\sqrt{2}$ cm**
Altura: 16 cm

67. RESOLUCIÓN

$$S = x \cdot y = x\sqrt{900 - x^2}$$

$$S = \sqrt{900x^2 - x^4}$$

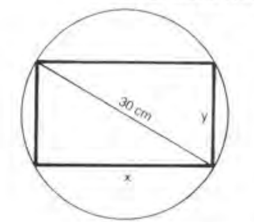
$$F = S^2 = 900x^2 - x^4$$

$$F' = 1\,800\,x - 4x^3\;;\; F'' = 1\,800 - 12x^2$$

$$F' = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 15\sqrt{2}; \quad x_3 = -15\sqrt{2}$$

$$x_2 = 15\sqrt{2} \Rightarrow F'' < 0 \Rightarrow máx. \begin{cases} x_2 = 15\sqrt{2}\,cm \\ y_2 = 15\sqrt{2}\,cm \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES



$$x^2 + y^2 = 30^2$$

$$y = \sqrt{900 - x^2}$$

SOLUCIÓN: **Base: $15\sqrt{2}$ cm**
Altura: $15\sqrt{2}$ cm

68. RESOLUCIÓN

$$S = x \cdot y = y\sqrt{16y - y^2}$$

$$S = \sqrt{16y^3 - y^4}$$

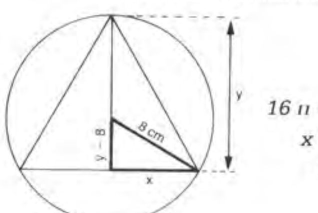
$$F = S^2 = 16y^3 - y^4$$

$$F' = 48y^2 - 4y^3 \;;\; F'' = 96y - 12y^2$$

$$F' = 0 \Rightarrow y_1 = 0; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 12\,cm$$

$$y_3 = 12 \Rightarrow F'' < 0 \Rightarrow máx.: \begin{cases} y_3 = 12\,cm \\ x_3 = 4\sqrt{3}\,cm \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES



$$L = 2\pi r$$

$$16\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 8\,cm$$

$$x = \sqrt{8^2 - (y - 8)^2}$$

$$x = \sqrt{16y - y^2}$$

SOLUCIÓN: **Base: $8\sqrt{3}$ cm**

69. RESOLUCIÓN

CÁLCULOS AUXILIARES

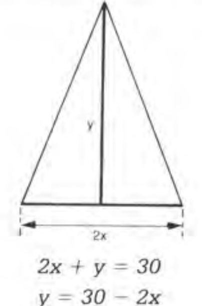
$$S = xy = x(30 - 2x)$$

$$S = 30x - 2x^2$$

$$S' = 30 - 4x \;;\; S'' = -4$$

$$S' = 0 \Rightarrow x_1 = 7{,}5\,cm$$

$$x_1 = 7{,}5 \Rightarrow S'' < 0 \Rightarrow máx.: x_1 = 7{,}5\,cm$$



$$2x + y = 30$$

$$y = 30 - 2x$$

SOLUCIÓN: **Base: 15 cm**

70. RESOLUCIÓN

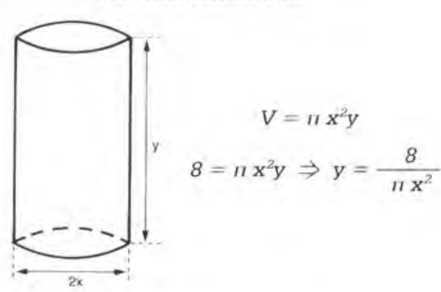
$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x^2 + \frac{16}{x}$$

$$S' = 4\pi x - \frac{16}{x^2} \;;\; S'' = 4\pi + \frac{32}{x^3}$$

$$S' = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\,dm$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \Rightarrow S'' > 0 \Rightarrow mín.: \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\,dm \\ y_1 = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\,dm \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES



$$V = \pi x^2 y$$

$$8 = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{8}{\pi x^2}$$

SOLUCIÓN: **Radio: $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm**
Altura: $2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm

71. RESOLUCIÓN

$$S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x(150 - 2x)}{2}$$

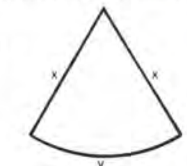
$$S = 75x - x^2$$

$S' = 75 - 2x \; ; \; S'' = -2$

$S' = 0 \Rightarrow x_1 = 37{,}5\ m$

$x_1 = 37{,}5 \Rightarrow S'' < 0 \Rightarrow \text{máx.}: x_1 = 37{,}5\ m$

CÁLCULOS AUXILIARES



$P = 2x + y$

$150 = 2x + y \Rightarrow y = 150 - 2x$

SOLUCIÓN: **Radio: 37,5 m**

72. RESOLUCIÓN

$$V = \frac{\pi}{3}x^2y = \frac{\pi}{3}x^2\sqrt{225 - 30x}$$

$$V = \frac{\pi}{3}\sqrt{225x^4 - 30x^5}$$

$$F = V^2 = \frac{\pi^2}{9}(225x^4 - 30x^5)$$

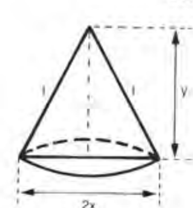
$$F' = \frac{\pi^2}{9}(900x^3 - 150x^4) \; ;$$

$$F'' = \frac{\pi^2}{9}(2\,700x^2 - 600x^3)$$

$$F' = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 6\ cm$$

$$x_4 = 6 \Rightarrow F'' < 0 \Rightarrow \text{máx.}: x_4 = 6\ cm$$

CÁLCULOS AUXILIARES



$$2x + 2l = 30 \Rightarrow l + x = 15$$

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{225 - 30x}$$

SOLUCIÓN: **Longitud de la base: 12 cm**

73. RESOLUCIÓN

$$S = 2xy = 2y\,\frac{15 - y}{3}$$

$$S = \frac{30y - 2y^2}{3}$$

$$S' = \frac{30 - 4y}{3} \; ; \; S'' = -\frac{4}{3}$$

$$S' = 0 \Rightarrow y_1 = 7{,}5\ cm$$

$$y_1 = 7{,}5 \Rightarrow S'' < 0 \Rightarrow \text{máx.}: \begin{cases} y_1 = 7{,}5\,cm \\ x_1 = 2{,}5\,cm \end{cases}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{15}{5} = \frac{15 - y}{x}$$

$$x = \frac{15 - y}{3}$$

SOLUCIÓN: **Base: 5 cm**
Altura: 7,5 cm

74. RESOLUCIÓN

$$P = 300 \cdot 2x + 600 \cdot 2y$$

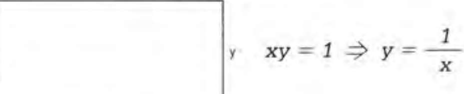
$$P = 600\,x + \frac{1\,200}{x}$$

$$P' = 600 - \frac{1\,200}{x^2} \; ; \quad P'' = \frac{2\,400}{x^3}$$

$$P' = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}\ m$$

$$x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow P'' > 0 \Rightarrow \text{mín.}: \begin{cases} x_1 = \sqrt{2}\,m \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ m \end{cases}$$

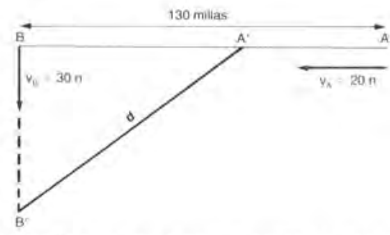
CÁLCULOS AUXILIARES



$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

SOLUCIÓN: **Ancho: 1,414 m**
Alto: 0,707 m

75. RESOLUCIÓN



Supongamos que la distancia entre los barcos es mínima al cabo de t horas, cuando el barco A esté en la posición A' y el B en la B'.

$$d = \sqrt{\overline{BB'}^2 + \overline{BA'}^2} = \sqrt{(30\,t)^2 + (130 - 20\,t)^2}$$

$$d = \sqrt{1\,300\,t^2 - 5\,200\,t + 16\,900}$$

$$F = d^2 = 1\,300\,t^2 - 5\,200\,t + 16\,900$$

$$F' = 2\,600\,t - 5\,200 \quad ; \quad F'' = 2\,600$$

$$F' = 0 \Rightarrow t_1 = 2\,h$$

$$t = 2 \Rightarrow F'' > 0 \Rightarrow \text{mín.}: t_1 = 2\,h.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$AA' = 20\,t$$

$$BA' = 130 - AA' = 130 - 20\,t$$

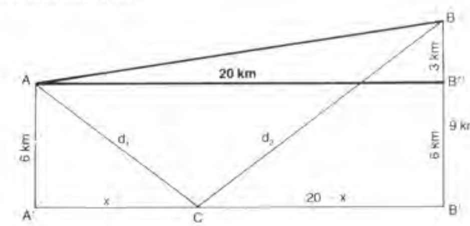
$$BB' = 30\,t$$

SOLUCIÓN: **A las 12 horas**

NOTA: El nudo es equivalente a una milla por hora.

76. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO:



$$l = d_1 + d_2$$

$$l = \sqrt{6^2 + x^2} + \sqrt{9^2 + (20 - x)^2}$$

$$l = \sqrt{36 + x^2} + \sqrt{481 - 40x + x^2}$$

$$l' = \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} + \frac{-20 + x}{\sqrt{481 - 40x + x^2}}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\overline{AB''} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{B''B}^2}$$

$$\overline{AB''} = \sqrt{409 - 9} = 20\ km$$

$$\overline{A'B'} = \overline{AB''} = 20\ km$$

$$\overline{A'C} = x; \; \overline{CB'} = 20 - x$$

$$l' = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} + \frac{-20 + x}{\sqrt{481 - 40x + x^2}} = 0 \Rightarrow x_1 = 8$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

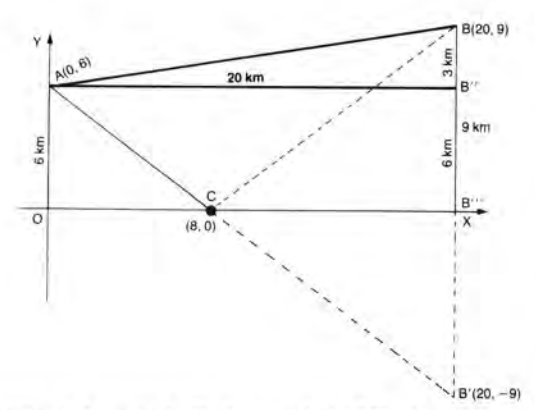
Si ambos pueblos estuviesen en distintas orillas del río, y considerásemos éste reducido a una línea recta, el segmento rectilíneo limitado por ambos pueblos nos daría la mínima distancia entre ambos.

$$\overline{AB''} = \overline{OB'''} = 20$$

Recta que pasa por $A\ (0, 6) \; ; \; B'\ (20, -9)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{y - 6}{-9 - 6} \Rightarrow 3x + 4y - 24 = 0$$



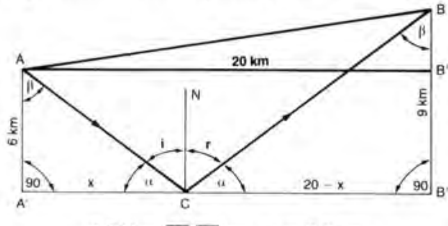
Intersección de la recta hallada con el eje OX (el río):

$$\left.\begin{matrix} 3x + 4y - 24 = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 8 \\ y = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow P\,(8, 0)$$

NOTA: Obsérvese en la figura donde se ha tomado el origen, los ejes y las coordenadas de A y B'. Evidentemente: $\overline{CB'} = \overline{CB}$

TERCER PROCEDIMIENTO:

Si considerásemos el río como un espejo plano, la longitud mínima de tubería sería la que correspondiese al recorrido de un rayo de luz, que emitido en A y reflejado en el río pasase por B.



$$AB'' = \overline{A'}\,\overline{B'} = \cdots = 20 \text{ km}$$

Los triángulos AA'C y BB'C son semejantes, por tener los tres ángulos iguales. De esta semejanza:

$$\frac{6}{9} = \frac{x}{20 - x} \Rightarrow x = 8 \text{ km}$$

SOLUCIÓN: **A 8 km de la proyección del pueblo A sobre la orilla**

77. RESOLUCIÓN

I.

a) Con el eje OX:

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 5} \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = 1 \Rightarrow P_1\,(1, 0) \\ x_2 = 3 \Rightarrow P_2\,(3, 0) \end{matrix}$$

b) Con el eje OY:

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5} \\ x = 0 \end{matrix}\right\} y_3 = -\frac{3}{5} \Rightarrow P_3\left(0, -\frac{3}{5}\right)$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{P_1\,(1, 0)\ ;\ P_2\,(3, 0)\ ;\ P_3\left(0, -\frac{3}{5}\right)}$

II.

a) Con el eje OX:

$$\left.\begin{matrix} y = x^3 - 36x \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = 0 \Rightarrow P_1\,(0, 0) \\ x_2 = 6 \Rightarrow P_2\,(6, 0) \\ x_3 = -6 \Rightarrow P_3\,(-6, 0) \end{matrix}$$

b) Con el eje OY:

$$\left.\begin{matrix} y = x^3 - 36x \\ x = 0 \end{matrix}\right\} y_1 = 0 \Rightarrow P_1\,(0, 0)$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{P_1\,(0, 0)\ ;\ P_2\,(6, 0)\ ;\ P_3\,(-6, 0)}$

III.

a) Con el eje OX:

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x^2 - 1} \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = 0 \Rightarrow P_1\,(0, 0) \\ x_2 = -2 \Rightarrow P_2\,(-2, 0) \\ x_3 = 4 \Rightarrow P_3\,(4, 0) \end{matrix}$$

b) Con el eje OY:

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x^2 - 1} \\ x = 0 \end{matrix}\right\} y_1 = 0 \Rightarrow P_1\,(0, 0)$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{P_1\,(0, 0)\ ;\ P_2\,(-2, 0)\ ;\ P_3\,(4, 0)}$

IV.

a) Con el eje OX:

$$\left.\begin{matrix} y = x^4 - 10x^2 + 9 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = -1 \Rightarrow P_1\,(-1, 0) \\ x_2 = 1 \Rightarrow P_2\,(1, 0) \\ x_3 = 3 \Rightarrow P_3\,(3, 0) \\ x_4 = -3 \Rightarrow P_4\,(-3, 0) \end{matrix}$$

b) Con el eje OY:

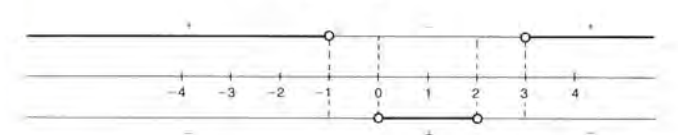
$$\left.\begin{matrix} y = x^4 - 10x^2 + 9 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} y_5 = 9 \Rightarrow P_5\,(0, 9)$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{P_1\,(-1, 0)\ ;\ P_2\,(1, 0)\ ;\ P_3\,(3, 0)}$
$\mathbf{P_4\,(-3, 0)\ ;\ P_5\,(0, 9)}$

78. RESOLUCIÓN

Los intervalos de existencia corresponden a los valores de x que hacen:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 0$$



$$D = [1, 2) \cup (3, \infty)$$

SOLUCIÓN: **f(x) está definida en $[1, 2) \cup (3, \infty)$**

79. RESOLUCIÓN

Los intervalos de existencia corresponden a los valores de x que hacen:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 + 2x} \geqslant 0$$

$$D = [-1, 0) \cup (2, 3]$$

SOLUCIÓN: **f(x) está definida en $[-1, 0) \cup (2, 3]$**

80. RESOLUCIÓN

Los intervalos de existencia corresponden a los valores de x que hacen:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 + 2x} > 0$$

Observando el gráfico anterior (ejercicio 79):

SOLUCIÓN: **El dominio de f(x) es $(-1, 0) \cup (2, 3)$**

81. RESOLUCIÓN

I.

$$y = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 7x + 10}$$

a) Asíntotas verticales:

$$y = \infty \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 5$$
$$x = 2;\ x = 5$$

b) *Asíntotas horizontales:*

$$x = \infty \Rightarrow y_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 7x + 10} = 2$$
$$y = 2$$

c) *Asíntotas oblicuas:*

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 7x + 10}}{x} = 0$$

NO HAY

SOLUCIÓN I:

Verticales: x = 2 ; x = 5
Horizontales: y = 2
Oblicuas: No hay

II.

$$y = \frac{x^3}{(10 + x)^2}$$

a) *Verticales:*

$$y = \infty \Rightarrow (10 + x)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -10$$
$$x = -10$$

b) *Horizontales:*

$$x = \infty \Rightarrow y_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(10 + x)^2} = \infty$$

NO HAY

c) *Oblicuas:*

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{(10 + x)^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 + 20x^2 + 10x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 20x + 100} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-20x^2 - 100x}{x^2 + 20x + 100} = -20$$

$$y = x - 20$$

SOLUCIÓN II:

Verticales: x = −10
Horizontales: No hay
Oblicuas: y = x − 20

III.

$$y = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

a) *Verticales:*

$$y = \infty \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = -2$$
$$x = 2; \quad x = -2$$

b) *Horizontales:*

$$x = \infty \Rightarrow y_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2 - 4} = 0$$
$$y = 0$$

c) *Oblicuas:*

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2 - 4}}{x} = 0$$

NO HAY

SOLUCIÓN III:

Verticales: x = 2 ; x = −2
Horizontales: y = 0
Oblicuas: No hay

IV.

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

a) *Verticales:*

$$y = \infty \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$
$$x = 3$$

b) *Horizontales:*

$$x = \infty \Rightarrow y_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \infty$$

NO HAY

c) *Oblicuas:*

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} - x\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 3} = 1$$

$$y = x + 1$$

SOLUCIÓN IV:

Vérticales: x = 3
Horizontales: No hay
Oblicuas: y = x + 1

82. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \qquad y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

- *Intervalos de existencia:*

  $\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 1 \ ; \ x \neq -1$

- *Simetrías:*

  Respecto a OY: f (x) = f (−x): SI

  Respecto al O: f (x) ≠ −f (−x): NO

- *Intersección con los ejes:*

  Con OX: P_1 *(0, 0)*

  Con OY: P_1 *(0, 0)*

- *Asíntotas:*

  Verticales: **x = 1 ; x = −1**

  Horizontales: y = 1

  Oblicuas: NO TIENE

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*

  Máx.: P_1 *(0, 0); Mín.:* NO TIENE

  Función creciente: $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

  Función decreciente: $\forall x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$

- *Puntos de inflexión, concavidades:*

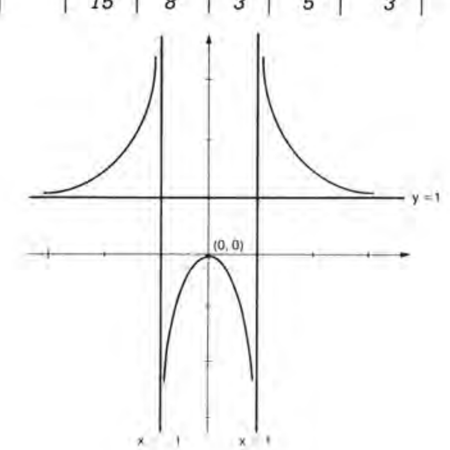
  Inflex.: NO TIENE

  Función cóncava: $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

  Función convexa: $\forall x \in (-1, 1)$

- *Tabla de valores:*

x	...	±4	±3	±2	$\pm\frac{3}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	...
y	...	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{3}$	...



83. RESOLUCIÓN

$y = x^4 - 5x^2 + 4$ $\qquad y' = 4x^3 - 10x$ $\qquad y'' = 12x^2 - 10$

- *Intervalos de existencia:*

$$\forall x \in \mathbf{R}$$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) = f(-x)$: SÍ
  Respecto al O: $f(x) \neq -f(-x)$: NO

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: $P_1\ (-2, 0)$, $P_2\ (2, 0)$, $P_3\ (-1, 0)$, $P_4\ (1, 0)$
  Con OY: $P_5\ (0, 4)$

- *Asíntotas:*
  Verticales: NO TIENE
  Horizontales: NO TIENE
  Oblicuas: NO TIENE

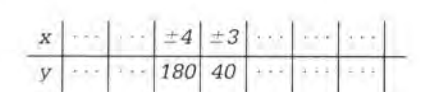
- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: $P_5\ (0, 4)$
  Mín.: $P_6\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{9}{4}\right)$; $P_7\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{9}{4}\right)$

  Función creciente:
  $\forall x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty\right)$
  Función decreciente:
  $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

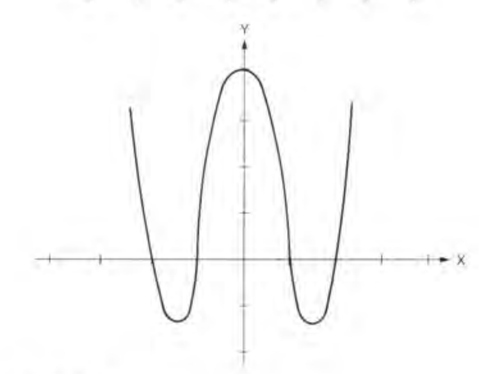
- *Puntos de inflexión, concavidades:*
  Inflex.: $P_8\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$; $P_9\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$
  Función cóncava:
  $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \infty\right)$

  Función convexa:
  $\forall x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\right)$

- *Tabla de valores:*



x	···	···	±4	±3	···	···	···
y	···	···	180	40	···	···	···



84. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{2(x-1)}{x} \qquad y' = \frac{2}{x^2} \qquad y'' = \frac{-4}{x^3}$$

- *Intervalos de existencia:*

$$\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0$$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) \neq f(-x)$: NO
  Respecto al O: $f(x) \neq -f(-x)$: NO

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: $P_1\ (1, 0)$
  Con OY: NO CORTA

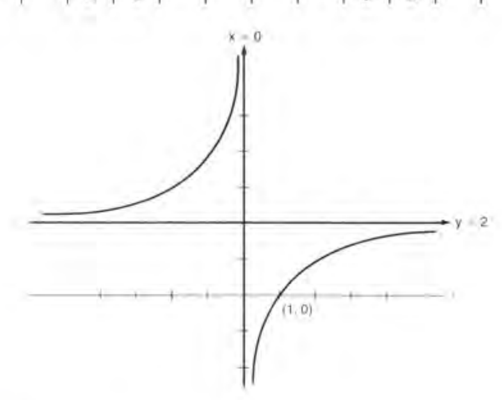
- *Asíntotas:*
  Verticales: $x = 0$
  Horizontales: $y = 2$
  Oblicuas: NO TIENE

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: NO TIENE; *Mín.:* NO TIENE
  Función creciente: $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
  Función decreciente: NUNCA

- *Puntos de inflexión, concavidades:*
  Inflex.: NO TIENE
  Función cóncava: $\forall x \in (-\infty, 0)$
  Función convexa: $\forall x \in (0, \infty)$

- *Tabla de valores:*

x	···	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	···
y	···	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	4	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	···



85. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \qquad y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \qquad y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

- *Intervalos de existencia:*

$$\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 1 \ ; \ x \neq -1$$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) \neq f(-x)$: NO
  Respecto al O: $f(x) = -f(-x)$: SÍ

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: $P_1\ (0, 0)$
  Con OY: $P_1\ (0, 0)$

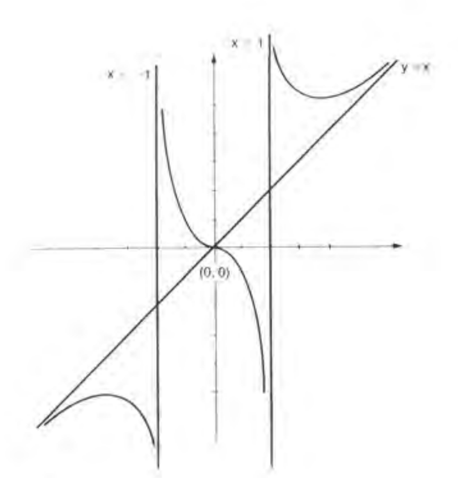
- *Asíntotas:*
  Verticales: $x = 1$; $x = -1$
  Horizontales: NO TIENE
  Oblicuas: $y = x$

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: $P_4\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; Mín.: $P_5\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
  Función creciente: $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
  Función decreciente: $\forall x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

- *Puntos de inflexión, concavidades:*
  Inflex.: $P_1\ (0, 0)$
  Función cóncava: $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$
  Función convexa: $\forall x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

- *Tabla de valores:*

x	···	−3	−2	2	3	···
y	···	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{27}{8}$	···



86. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{1}{\pi\,(1 + x^2)} \qquad y' = \frac{-2x}{\pi\,(1 + x^2)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2 - 2}{\pi\,(1 + x^2)^3}$$

- *Intervalos de existencia:*

  $\forall\, x \in \mathbf{R}$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) = f(-x)$: SÍ
  Respecto al O: $f(x) \neq -f(-x)$: NO

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: NO CORTA
  Con OY: $P_1\ (0,\ 1/\pi)$

- *Asíntotas:*
  Verticales: NO TIENE
  Horizontales: $y = 0$
  Oblicuas: NO TIENE

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: $P_1\ (0,\ 1/\pi)$; *Mín.:* NO TIENE
  Función creciente: $\forall\, x \in (-\infty,\ 0)$
  Función decreciente: $\forall\, x \in (0,\ \infty)$

- *Puntos de inflexión, concavidades:*

  Inflex.: $P_2 \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{4\pi}\right)$; $P_3 \left(+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{4\pi}\right)$

  Función cóncava:

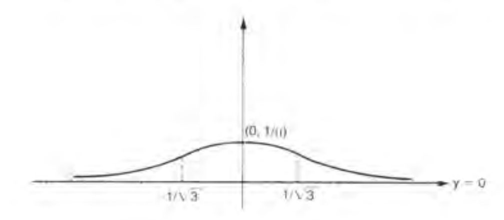
  $\forall\, x \in \left(-\infty,\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \infty\right)$

  Función convexa:

  $\forall\, x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

- *Tabla de valores:*

x	···	±4	±3	±2	±1	···
y	···	≃0,02	≃0,03	≃0,06	≃0,16	···



87. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}\ ;\ y' = \frac{4 - x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2}\ ;\ y'' = \frac{2x^3 - 24x + 40}{(x^2 - 5x + 4)^3}$$

- *Intervalos de existencia:*

  $\forall\, x \in \mathbf{R} / x \neq 1\ ;\ x \neq 4$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) \neq f(-x)$: NO TIENE
  Respecto al O: $f(x) \neq -f(-x)$: NO TIENE

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: $P_1\ (0,\ 0)$
  Con OY: $P_1\ (0,\ 0)$

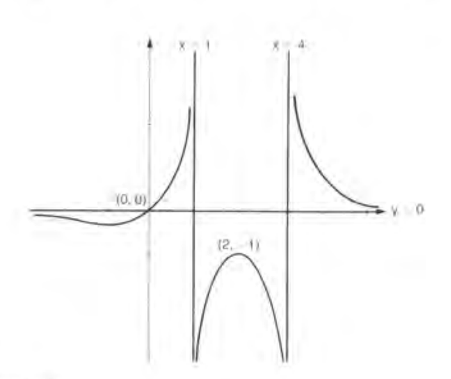
- *Asíntotas:*
  Verticales: $x = 1$; $x = 4$
  Horizontales: $y = 0$
  Oblicuas: NO TIENE

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: $P_2\ (2,\ -1)$; *Mín.:* $P_3 \left(-2,\ -\frac{1}{9}\right)$
  Función creciente: $\forall\, x \in (\simeq -4{,}2,\ 1) \cup (1,\ 2)$
  Función decreciente: $\forall\, x \in (-\infty,\ \simeq 4{,}2) \cup (2,\ 4) \cup (4,\ \infty)$

- *Puntos de inflexión, concavidades:*
  Inflex.: $P_4\ (\simeq -4{,}2,\ \simeq -0{,}1)$
  Función cóncava: $\forall\, x \in (\simeq -4{,}2,\ 1) \cup (2,\ \infty)$
  Función convexa: $\forall\, x \in (-\infty,\ \simeq 4{,}2) \cup (1,\ 4)$

- *Tabla de valores:*

x	···	−3	−1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	5	6	7	···
y	···	$-\frac{3}{28}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{18}$	···



88. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{4x - 5}{2\,(x^2 - 1)} \qquad y' = \frac{-2x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 - 15x^2 + 12x - 5}{(x^2 - 1)^3}$$

- *Intervalos de existencia:*

  $\forall\, x \in \mathbf{R} / x \neq -1\ ;\ x \neq 1$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) \neq f(-x)$: NO TIENE
  Respecto al O: $f(x) \neq -f(-x)$: NO TIENE

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: $P_1 \left(\frac{5}{4},\ 0\right)$
  Con OY: $P_2 \left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

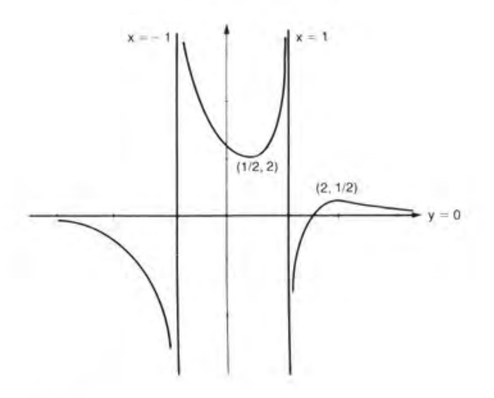
- *Asíntotas:*
  Verticales: $x = -1$; $x = 1$
  Horizontales: $y = 0$
  Oblicuas: NO TIENE

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: $P_3\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ *Mín.:* $P_4\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$
  Función creciente: $\forall x \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \cup (1,\ 2)$
  Función decreciente: $\forall x \in (-\infty,\ -1) \cup \left(-1,\ \frac{1}{2}\right) \cup (2,\ \infty)$

- *Puntos de inflexión, concavidades:*
  Inflex.: $P_5\ (\simeq 2{,}8,\ \simeq 0{,}4)$
  Función cóncava: $\forall x \in (-1,\ 1) \cup (\simeq 2{,}8,\ \infty)$
  Función convexa: $\forall x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \simeq 2{,}8)$

- *Tabla de valores:*

x	...	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	4	...
y	...	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{17}{16}$	$-\frac{10}{7}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{30}$	...



89. RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x^2 + 2x - 11}{2\,(x-3)} \qquad y' = \frac{x^2 - 6x + 5}{2\,(x-3)^2} \qquad y'' = \frac{4}{(x-3)^3}$$

- *Intervalos de existencia:*
  $$\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 3$$

- *Simetrías:*
  Respecto a OY: $f(x) \neq f(-x)$: NO TIENE
  Respecto al O: $f(x) \neq -f(-x)$: NO TIENE

- *Intersección con los ejes:*
  Con OX: $P_1\,[(-1 + 2\sqrt{3}),\ 0]$; $P_2\,[(-1 - 2\sqrt{3}),\ 0]$
  Con OY: $P_3\left(0,\ \frac{11}{6}\right)$

- *Asíntotas:*
  Verticales: $x = 3$
  Horizontales: NO TIENE
  Oblicuas: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

- *Máximos, mínimos, crecimientos:*
  Máx.: $P_4\ (1,\ 2)$ *Mín.:* $P_5\ (5,\ 6)$
  Función creciente: $\forall x \in (-\infty,\ 1) \cup (5,\ \infty)$
  Función decreciente: $\forall x \in (1,\ 3) \cup (3,\ 5)$

- *Puntos de inflexión, concavidades:*
  Inflex.: NO TIENE
  Función cóncava: $\forall x \in (3,\ \infty)$
  Función convexa: $\forall x \in (-\infty,\ 3)$

- *Tabla de valores:*

x	...	-3	-2	-1	2	4	6	...
y	...	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{37}{6}$	...

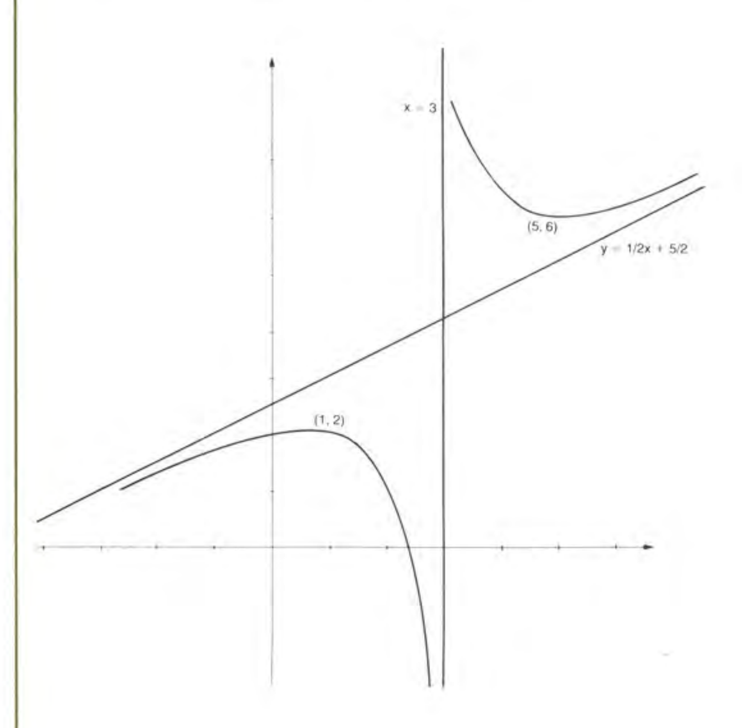


TABLA DE DERIVADAS

$u = f(x)$		$v = g(x)$	
$y = k$	$y' = 0$	$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \text{sen}\, u$	$y' = u' \cos u$
$y = kx$	$y' = k$	$y = \cos u$	$y' = -u' \,\text{sen}\, u$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = \text{tg}\, u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = kx^m$	$y' = mkx^{m-1}$	$y = \text{ctg}\, u$	$y' = -u' \,\text{cosec}^2\, u$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$	$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \,\text{tg}\, u$
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1} \cdot u'$	$y = \text{cosec}\, u$	$y' = -u' \,\text{cosec}\, u \,\text{ctg}\, u$
$y = ku^m$	$y' = mku^{m-1} \cdot u'$	$y = \text{arc sen}\, u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$	$y = \text{arc cos}\, u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \text{arc tg}\, u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log e$	$y = \text{arc ctg}\, u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
$y = \text{L}\, u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \text{arc sec}\, u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = a^u$	$y' = u'\, a^u\, \text{L}\, a$	$y = \text{arc cosec}\, u$	$y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = e^u$	$y' = u'\, e^u$		
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$		

Bloque 10

- ✔ Integrales indefinidas
- ✔ Ejercicios propuestos
- ✔ Resolución de los ejercicios

INTEGRALES INDEFINIDAS

Función primitiva e integral indefinida

Dada la función f(x), *si existe una función* F(x) *tal que en un cierto intervalo* [a, b] *sea:*

$$F'(x) = f(x)$$

se dice que F(x) *es una función primitiva de* f(x) *en ese intervalo.*

Si F(x) *es una función primitiva de* f(x), *también lo será:*

$$F(x) + C$$

Al conjunto F(x) + C *de todas las primitivas de* f(x), *se le llama integral indefinida o simplemente integral, y se representa por:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Signo de integración: $\int$

Integrando: f(x)

Elemento de integración: f(x) dx

Constante de integración: C

Propiedades de la integral indefinida

1.ª $\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

2.ª $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Tabla de integrales

$$\int u^m \cdot u'\,dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$\int \frac{u'\,dx}{u} = L\,|u| + C$$

$$\int e^u \cdot u'\,dx = e^u + C$$

$$\int a^u \cdot u'\,dx = \frac{a^u}{L\,a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} u \cdot u'\,dx = -\cos u + C$$

$$\int \cos u \cdot u'\,dx = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \operatorname{tg} u \cdot u'\,dx = -L\,|\cos u| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} u \cdot u'\,dx = L\,|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec^2 u \cdot u'\,dx = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u \cdot u'\,dx = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + C$$

$$\int \frac{u'\,dx}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C$$

$$\int \frac{u'\,dx}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} u + C$$

Integración por descomposición

La segunda propiedad de las integrales indefinidas permite descomponer una integral en suma o diferencia de varias, si el integrando se expresa como suma o diferencia de varias funciones.

Integración por sustitución o cambio de variable

A veces, para calcular:

$$\int f(x)\,dx \quad (1)$$

se efectúa un cambio de variable:

$$x = g(t) \quad \textit{siendo} \quad dx = g'(t)\,dt$$

valores que sustituidos en (1), resulta:

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = F(t) + C = F[h(x)] + C$$

siendo t = h(x) *la función inversa de* x = g(t)

Integración por partes

Si u *y* v *son funciones continuas de* x, *se verifica:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Integración de funciones racionales

Sea la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

donde P(x) *y* Q(x) *son dos polinomios.*

Si el grado de P(x) ⩾ *grado de* Q(x), *se realiza la división de* P(x) *por* Q(x):

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \quad \textit{de donde:}\ P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x);$$

dividiendo ambos miembros por Q(x):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

y la integral quedará:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

La primera integral del segundo miembro es inmediata, queda ahora el problema de calcular la integral:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx \quad \textit{donde grado de } R(x) < \textit{grado de } Q(x)$$

Para calcular esta integral se procede de la siguiente manera:

Se iguala Q(x) = 0 *y se obtienen sus raíces:*

I. Q(x) = 0. *Sólo tiene raíces reales simples:*

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Se pone:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n} \quad (1)$$

luego: $R(x) = A_1 (x - x_2) \cdots (x - x_n) + \cdots + A_n (x - x_1) \cdots \cdots (x - x_{n-1})$

Se aplica el método de los coeficientes indeterminados para calcular $A_1, A_2, \cdots, A_n$; *se sustituyen sus valores en (1) y luego se integra:*

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = A_1 \int \frac{dx}{x - x_1} + A_2 \int \frac{dx}{x - x_2} + \cdots$$

$$\cdots + A_n \int \frac{dx}{x - x_n} = A_1\,L\,|x - x_1| + \cdots + A_n\,L|x - x_n| + C$$

II. *Q(x) = 0. Tiene raíces múltiples:*

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_1) \overset{n}{\cdots} (x - x_1) = (x - x_1)^n$$

Se descompone:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n}$$

y luego se procede como en el caso anterior.

III. Q(x) = 0. *Tiene raíces imaginarias.*

Si la ecuación Q(x) = 0 *admite la raíz* $x_1 = \alpha + \beta i$, *admite también la conjugada* $x_2 = \alpha - \beta i$

$$Q(x) = (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Se descompone:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

y se procede como en los casos anteriores.

Integración de funciones trigonométricas

I. *Integrales del tipo* $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$; *se racionalizan mediante el cambio:*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\ ;\ \frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} t\ ;\ x = 2\operatorname{arc\,tg} t\ ;\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

siendo:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

II. *Integrales del tipo:* $\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x\,dx$

Si m = impar, *se hace* cos x = t

Si n = impar, *se hace* sen x = t

Si m *y* n *tienen la misma paridad, se hace:*

$\text{tg}\, x = t$; $x = \text{arc tg}\, t$; $dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}$, siendo:

$\text{sen}\, x = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$

III. *Integrales del tipo:* $\int \text{sen}\, a \cdot \cos b\, dx$; $\int \cos a \cdot \cos b\, dx$; $\int \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b\, dx$

Teniendo en cuenta:

$\text{sen}\, a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\text{sen}\,(a + b) + \text{sen}\,(a - b)]$

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos\,(a + b) + \cos\,(a - b)]$

$\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b = \dfrac{1}{2}[\cos\,(a - b) - \cos\,(a + b)]$

resulta:

$$\int \text{sen}\, a \cdot \cos b\, dx = \frac{1}{2}\int [\text{sen}\,(a + b) + \text{sen}\,(a - b)]\, dx$$

$$\int \cos a \cdot \cos b\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos\,(a + b) + \cos\,(a - b)]\, dx$$

$$\int \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos\,(a - b) - \cos\,(a + b)]\, dx$$

IV. *Integrales del tipo:* $\int \text{sen}^m x\, dx$; $\int \cos^m x\, dx$

Teniendo en cuenta:

$\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

resulta:

$$Si\ m = \text{par} \begin{cases} \int \text{sen}^m x\, dx = \int \left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{m/2} dx \\ \int \cos^m x\, dx = \int \left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)^{m/2} dx \end{cases}$$

$$Si\ m = \text{impar} \begin{cases} \int \text{sen}^m x\, dx = \int \text{sen}^{m-1} x \cdot \text{sen}\, x\, dx = \\ = \int (1 - \cos^2 x)^{(m-1)/2}\, \text{sen}\, x\, dx \\ \int \cos^m x\, dx = \int \cos^{m-1} x \cdot \cos x\, dx = \\ = \int (1 - \text{sen}^2 x)^{(m-1)/2} \cos x\, dx \end{cases}$$

Integración de funciones irracionales

I. *Integrales del tipo:* $\int R(x^{m/n}, x^{p/q}, \ldots, x^{r/s})\, dx$

Se hace: $x = t^M$ *siendo* $M = \text{m.c.m.}\,(n, q, \ldots, s)$

II. *Integrales del tipo:* $\int R\,(x, \sqrt[n]{ax + b})\, dx$

Se transforma en racional haciendo el cambio de variable:

$$ax + b = t^n$$

III. *Integrales del tipo:* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$

Se hace el cambio de variable: $\sqrt[n]{\dfrac{ax + b}{cx + d}} = t$

IV. *Integrales del tipo:*

$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$; *se hace:* $x = a\, \text{sen}\, t$ o $x = a \cos t$

$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$; *se hace:* $x = a\, \text{tg}\, t$

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$; *se hace:* $x = a \sec t$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular: $I = \int x^3\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{x^4}{4} + C}$

2. Calcular: $I = \int \dfrac{dx}{x^3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\dfrac{1}{2x^2} + C}$

3. Calcular: $I = \int x \cdot \sqrt[3]{x}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{3}{7} x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + C}$

4. Calcular: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C}$

5. Calcular: $I = \int \left(\dfrac{2}{3} x^4 - \dfrac{2}{4} x^2 + 1\right) dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{x^3}{6} + x + C}$

6. Calcular: $I = \int \left(\dfrac{2}{3} x^{3/2} - \dfrac{3}{4} x^{1/2} - \dfrac{2}{3}\right) dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{4x^{5/2}}{15} - \dfrac{x^{3/2}}{2} - \dfrac{2x}{3} + C}$

7. Calcular: $I = \int \left(-\dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^5}\right) dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x^4} + C}$

8. Calcular: $I = \int (x^2 - 3x + 4)\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x + C}$

9. Calcular: $I = \int \dfrac{2x^3 + 2x + 1}{1 + x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x^2 + \text{arc tg}\, x + C}$

10. Calcular: $I = \int \dfrac{x - 1}{x + 1}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x - 2\, L\, |x + 1| + C}$

11. Calcular: $I = \int \dfrac{x^4 - 5x^2 + 10}{x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{x^3}{3} - 5x - \dfrac{10}{x} + C}$

12. Calcular: $I = \int (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = ax - \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C}$

13. Calcular: $I = \int \sqrt{x}\,(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2ax^{3/2}}{3} - x^2\sqrt{a} + \dfrac{2x^{5/2}}{5} + C}$

14. Calcular: $I = \int 10^x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{10^x}{L\,10} + C}$

15. Calcular: $I = \int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{x^2}{2} + 2x + L\,|x| + C}$

16. Calcular: $I = \int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = tg\,x - ctg\,x + C}$

17. Calcular: $I = \int tg^2 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = tg\,x - x + C}$

18. Calcular: $I = \int \dfrac{3\cos x + 2 - 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 3x + 2\,sen\,x + C}$

19. Calcular: $I = \int \dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2a\sqrt{x} + 2x\sqrt{a} + \dfrac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C}$

20. Calcular: $I = \int \dfrac{x^3 - 6x + 5}{x - 2}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 2x + L\,|x - 2| + C}$

21. Calcular: $I = \int \left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \cos x\right) dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2x + sen\,x + C}$

22. Calcular: $I = \int (4x - 2)^5\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(4x - 2)^6}{24} + C}$

23. Calcular: $I = \int x\,(3x^2 + 1)\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(3x^2 + 1)^2}{12} + C}$

24. Calcular: $I = \int \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 3}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|x^2 + x - 3| + C}$

25. Calcular: $I = \int (x^3 - 5x^2 + 4x)\,(3x^2 - 10x + 4)\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(x^3 - 5x^2 + 4x)^2}{2} + C}$

26. Calcular: $I = \int 2x\sqrt{1 + 3x^2}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2}{9}\,(1 + 3x^2)\sqrt{1 + 3x^2} + C}$

27. Calcular: $I = \int \dfrac{2x}{\sqrt{8 + x^2}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{8 + x^2} + C}$

28. Calcular: $I = \int (x + 3)\,(x^2 + 6x - 4)\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(x^2 + 6x - 4)^2}{4} + C}$

29. Calcular: $I = \int (x + 3)\operatorname{sen}(x^2 + 6x - 4)\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\dfrac{1}{2}\cos\,(x^2 + 6x - 4) + C}$

30. Calcular: $I = \int x\sqrt{x - 1}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2\,(x - 1)^{5/2}}{5} + \dfrac{2\,(x - 1)^{3/2}}{3} + C}$

31. Calcular: $I = \int x \cdot \operatorname{sen} x^2\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\dfrac{\cos x^2}{2} + C}$

32. Calcular: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\,tg\sqrt{x} + C}$

33. Calcular: $I = \int \dfrac{x}{(x + 1)\,(x - 1)}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{L\,|x^2 - 1|}{2} + C}$

34. Calcular: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{7x - 2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2\sqrt{7x - 2}}{7} + C}$

35. Calcular: $I = \int \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(arc\,sen\,x)^2}{2} + C}$

36. Calcular: $I = \int x\sqrt{5x^2 + 1}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(5x^2 + 1)^{3/2}}{15} + C}$

37. Calcular: $I = \int \dfrac{L\,x}{x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{(L\,x)^2}{2} + C}$

38. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{x-1} + C}$

39. Calcular: $I = \int \frac{(L\,x)^3}{x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(L\,x)^4}{4} + C}$

40. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + C}$

41. Calcular: $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{5x^3+7}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2}{15}\sqrt{5x^3+7} + C}$

42. Calcular: $I = \int \frac{6x^3 - 11x^2 - 19x - 7}{3x+2}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 3x - \frac{1}{3}\,L\,|3x+2| + C}$

43. Calcular: $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x + 4\sqrt{x} + 8\,L\,|\sqrt{x}-2| + C}$

44. Calcular: $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 3\,L\,|\sqrt[3]{x}+1| + C}$

45. Calcular: $I = \int (e^x - 3\,e^{2x} + 4\,e^{3x})\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = e^x - \frac{3}{2}\,e^{2x} + \frac{4}{3}\,e^{3x} + C}$

46. Calcular: $I = \int sen^3\,3x \cdot \cos 3x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{sen^4\,3x}{12} + C}$

47. Calcular: $I = \int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|e^x+2| + C}$

48. Calcular: $I = \int \frac{2x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{4}{3}\,x\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} - 4\,L\,|\sqrt{x}+1| + C}$

49. Calcular: $I = \int \frac{ctg\,x}{\sqrt{sen\,x}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2}{\sqrt{sen\,x}} + C}$

50. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x} + C}$

51. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C}$

52. Calcular: $I = \int \sqrt{ax}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C}$

53. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a-bx}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2\sqrt{a-bx}}{b} + C}$

54. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{4}\,arc\,sen\,\frac{4x}{3} + C}$

55. Calcular: $I = \int \sqrt{a+bx}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2(a+bx)^{3/2}}{3b} + C}$

56. Calcular: $I = \int x\,(2+x^2)^2\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(2+x^2)^3}{6} + C}$

57. Calcular: $I = \int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(2x^2+3)^{3/2}}{6} + C}$

58. Calcular: $I = \int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C}$

59. Calcular: $I = \int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2\,(\sqrt{a}+\sqrt{x})^3}{3} + C}$

60. Calcular: $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{a^4-x^4}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{\sqrt{a^4-x^4}}{2} + C}$

61. Calcular: $I = \int \frac{x}{(a+bx^2)^3}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{4b\,(a+bx^2)^2} + C}$

62. Calcular: $I = \int x^{n-1} \cdot \sqrt{a + bx^n}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{2\,(a + bx^n)^{3/2}}{3bn} + C}}$

63. Calcular: $I = \int \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2\sqrt{x^2 + 3x - 1} + C}}$

64. Calcular: $I = \int \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{2\sqrt{x^3 + 3x}}{3} + C}}$

65. Calcular: $I = \int \dfrac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 10x - 4}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \sqrt{x^2 + 10x - 4} + C}}$

66. Calcular: $I = \int \dfrac{2 + Lx}{x}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{(2 + Lx)^2}{2} + C}}$

67. Calcular: $I = \int \text{sen } 3x \cdot \cos 3x\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{sen^2\, 3x}{6} + C}}$

68. Calcular: $I = \int (\text{sen } 2x \cdot \cos^2 2x)\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\dfrac{\cos^3 2x}{6} + C}}$

69. Calcular: $I = \int \text{tg } \dfrac{x}{2} \cdot \sec^2 \dfrac{x}{2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = tg^2\, \dfrac{x}{2} + C}}$

70. Calcular: $I = \int \dfrac{\cos 4x}{\sqrt{3 + \text{sen } 4x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{\sqrt{3 + sen\, 4x}}{2} + C}}$

71. Calcular: $I = \int \left(\dfrac{\sec 2x}{1 + \text{tg } 2x} \right)^2 dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{-1}{2\,(1 + tg\, 2x)} + C}}$

72. Calcular: $I = \int \dfrac{e^{2x}}{3 + 5e^{2x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{L\,|3 + 5e^{2x}|}{10} + C}}$

73. Calcular: $I = \int \dfrac{x}{\sqrt{1 - 2x^2}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\dfrac{\sqrt{1 - 2x^2}}{2} + C}}$

74. Calcular: $I = \int \dfrac{\text{sen } ax}{\cos ax + b}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\dfrac{L\,|\cos ax + b|}{a} + C}}$

75. Calcular: $I = \int \dfrac{\text{cosec}^2\, x}{\sqrt{2 \text{ ctg } x + 3}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\sqrt{2\, ctg\, x + 3} + C}}$

76. Calcular: $I = \int \dfrac{e^x + 2}{\sqrt{e^x + 2x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2\sqrt{e^x + 2x} + C}}$

77. Calcular: $I = \int \dfrac{e^x + \text{sen } x}{\sqrt{e^x - \cos x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2\sqrt{e^x - \cos x} + C}}$

78. Calcular: $I = \int \dfrac{\sec 2x \cdot \text{tg } 2x}{\sec 2x - 3}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{L\,|\sec 2x - 3|}{2} + C}}$

79. Calcular: $I = \int (e^{x/a} - e^{-x/a})\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = a\,(e^{x/a} + e^{-x/a}) + C}}$

80. Calcular: $I = \int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2e^{\sqrt{x}} + C}}$

81. Calcular: $I = \int e^{\text{tg } x} \cdot \sec^2 x\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = e^{tg\, x} + C}}$

82. Calcular: $I = \int a^{2x}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{a^{2x}}{2\, La} + C}}$

83. Calcular: $I = \int (e^{5x} + a^{5x})\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{e^{5x}}{5} + \dfrac{a^{5x}}{5\, La} + C}}$

84. Calcular: $I = \int \dfrac{3\, dx}{e^{3x}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -e^{-3x} + C}}$

85. Calcular: $I = \int 6x\, e^{-x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -3e^{-x^2} + C}}$

86. Calcular: $I = \int \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2\, e^{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x} + C}}$

87. Calcular: $I = \int \text{sen}\,\frac{2x}{3}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3} + C}$

88. Calcular: $I = \int \cos 5x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{sen}\,5x}{5} + C}$

89. Calcular: $I = \int \text{tg}\,\frac{x}{5}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -5\,L\left|\cos\frac{x}{5}\right| + C}$

90. Calcular: $I = \int \text{ctg}\,10x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{10}\,L\,|\text{sen}\,10x| + C}$

91. Calcular: $I = \int \text{cosec}\,x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -L\,|\text{cosec}\,x + \text{ctg}\,x| + C}$

92. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\,\text{arc tg}\,x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|\text{arc tg}\,x| + C}$

93. Calcular: $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen}\,x - \sqrt{1-x^2} + C}$

94. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2+9}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{3} + C}$

95. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x-2}{3} + C}$

96. Calcular: $I = \int \frac{ax}{x^4+b^4}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{a}{2b^2}\,\text{arc tg}\,\frac{x^2}{b^2} + C}$

97. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x\,Lx}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|Lx| + C}$

98. Calcular: $I = \int \cos^2 5x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,10x}{20} + C}$

99. Calcular: $I = \int \cos x \cdot \text{sen}\,2x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2\cos^3 x}{3} + C}$

100. Calcular: $I = \int \frac{dx}{1+\cos x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\text{ctg}\,x + \frac{1}{\text{sen}\,x} + C}$

101. Calcular: $I = \int \text{sen}^2\,3x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\,\text{sen}\,6x + C}$

102. Calcular: $I = \int \text{tg}^2\,2x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,2x - x + C}$

103. Calcular: $I = \int \sec^2 10x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{10}\,\text{tg}\,10x + C}$

104. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen}\,\frac{x}{5} + C}$

105. Calcular: $I = \int \frac{5x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{5}{2}\,\text{arc sen}\,x^2 + C}$

106. Calcular: $I = \int \sec^2\left(\frac{8x^2-2x-15}{4x+5}\right)dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,(2x-3) + C}$

107. Calcular: $I = \int \frac{1}{4}\,x\,a^{x^2}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{a^{x^2}}{8\,La} + C}$

108. Calcular: $I = \int \frac{3\,dx}{5^{2x-1}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{3\cdot 5^{1-2x}}{2\,L5} + C}$

109. Calcular: $I = \int \frac{x^6}{\cos^2(x^7+2)}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{7}\,\text{tg}\,(x^7+2) + C}$

110. Calcular: $I = \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{x^2-1} - \text{arc sec}\,x + C}$

111. Calcular: $I = \int \frac{x\cdot a^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{a^{\sqrt{x^2-1}}}{La} + C}$

112. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+3)^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\ sen\ \frac{x+3}{2} + C}$

113. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2} + C}$

114. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2 + 64}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{8}\ arc\ tg\ \frac{x}{8} + C}$

115. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}\ arc\ sen\ \frac{3x}{4} + C}$

116. Calcular: $I = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\ tg\ e^x + C}$

117. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{a}\ arc\ sen\ ax + C}$

118. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (Lx)^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\ sen\ (Lx) + C}$

119. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\ sen\ (x - 1) + C}$

120. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x - x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\ sen\ \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C}$

121. Calcular: $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{10}\ arc\ tg\ \frac{2x}{5} + C}$

122. Calcular: $I = \int \frac{dx}{3 + 7x^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{21}}{21}\ arc\ tg\ \frac{\sqrt{21}}{3}\ x + C}$

123. Calcular: $I = \int \frac{3\,dx}{x^2 - 8x + 25}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\ tg\ \frac{x-4}{3} + C}$

124. Calcular: $I = \int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 5}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|x^2 + 2x + 5| + \frac{3}{2}\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2} + C}$

125. Calcular: $I = \int \frac{8x - 3}{\sqrt{12x - 4x^2 - 5}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -2\sqrt{12x - 4x^2 - 5} + \frac{9}{2}\ arc\ sen\ \frac{2x-3}{2} + C}$

126. Calcular: $I = \int sec\ x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|sec\ x + tg\ x| + C}$

127. Calcular: $I = \int \frac{cosec\ 2x \cdot ctg\ 2x}{5 - 4\ cosec\ 2x}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{8}\ L\,|5 - 4\ cosec\ 2x| + C}$

128. Calcular: $I = \int \frac{cosec^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{3 - ctg \frac{x}{2}}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 4\sqrt{3 - ctg\ \frac{x}{2}} + C}$

129. Calcular: $I = \int \frac{dx}{sen\ x\ cos\ x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|tg\ x| + C}$

130. Calcular: $I = \int x\, e^{-x}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -e^{-x}(x + 1) + C}$

131. Calcular: $I = \int \frac{L\, x}{x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{x}(1 + L\, x) + C}$

132. Calcular: $I = \int x\ cos\ x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\ sen\ x + cos\ x + C}$

133. Calcular: $I = \int x\, e^{ax}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C}$

134. Calcular: $I = \int x^2\, e^{ax}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C}$

135. Calcular: $I = \int L\ 4x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\,(L\ 4x - 1) + C}$

136. Calcular: $I = \int x \cos 4x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{4} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C}$

137. Calcular: $I = \int x \sec^2 3x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x \operatorname{tg} 3x}{3} + \frac{1}{9} L |\cos 3x| + C}$

138. Calcular: $I = \int \operatorname{arc} \cos x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1 - x^2} + C}$

139. Calcular: $I = \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} L |1 + x^2| + C}$

140. Calcular: $I = \int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 3x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{6} L |1 + (3x)^2| + C}$

141. Calcular: $I = \int x^2 Lx \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^3}{3} \left(Lx - \frac{1}{3} \right) + C}$

142. Calcular: $I = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} (x - \operatorname{sen} x \cos x) + C}$

143. Calcular: $I = \int x^2 \cos x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C}$

144. Calcular: $I = \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{x}{2} + C}$

145. Calcular: $I = \int x^2 \cdot e^{-x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C}$

146. Calcular: $I = \int (Lx)^2 \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x (Lx)^2 - 2x \, Lx + 2x + C}$

147. Calcular: $I = \int x \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + C}$

148. Calcular: $I = \int \cos x \cdot L \operatorname{sen} x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \operatorname{sen} x (L \operatorname{sen} x - 1) + C}$

149. Calcular: $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) + C}$

150. Calcular: $I = \int \frac{Lx}{(x + 1)^2} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = - \frac{Lx}{x + 1} + L \left| \frac{x}{x + 1} \right| + C}$

151. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{2 (x^2 + 1)} + C}$

152. Calcular: $I = \int \sec^3 x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + L |\sec x + \operatorname{tg} x|] + C}$

153. Calcular: $I = \int (x^2 - 2x + 1) \, Lx \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) Lx - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C}$

154. Calcular: $I = \int (3x^2 - x + 5) \operatorname{sen} x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -(3x^2 - x + 5) \cos x + (6x - 1) \operatorname{sen} x + {} + 6 \cos x + C}$

155. Calcular: $I = \int x^3 (Lx)^2 \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^4}{4} (Lx)^2 - \frac{x^4}{8} Lx + \frac{x^4}{32} + C}$

156. Calcular: $I = \int L (x + 1) \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x \, L |x + 1| - x + L |x + 1| + C}$

157. Calcular: $I = \int \frac{x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -x \operatorname{ctg} x + L |\operatorname{sen} x| + C}$

158. Calcular: $I = \int \operatorname{sen} Lx \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2} (\operatorname{sen} Lx - \cos Lx) + C}$

159. Calcular: $I = \int \frac{Lx}{\sqrt{x}} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2 \sqrt{x} (Lx - 2) + C}$

160. Calcular: $I = \int e^{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}}{2} (x + \sqrt{1 - x^2}) + C}$

161. Calcular: $I = \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2 \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2 - \frac{1}{4} L |1 + x^4| + C}$

162. Calcular: $I = \int \frac{x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = - \sqrt{1 - x^2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + x + C}$

163. Calcular: $I = \int \frac{x \, e^x}{(1 + x)^2} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^x}{1 + x} + C}$

164. Calcular: $I = \int \text{arc cos } 2x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x \text{ arc cos } 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + C}$

165. Calcular: $I = \int \text{arc tg } \sqrt{x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = (x + 1) \text{ arc tg } \sqrt{x} - \sqrt{x} + C}$

166. Calcular: $I = \int \frac{L (x + 1)}{\sqrt{x + 1}} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x + 1}\,[L (x + 1) - 2] + C}$

167. Calcular: $I = \int x^2 \cdot \text{arc sen } x \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^3}{3} \text{ arc sen } x + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{3} - \frac{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}{9} + C}$

168. Calcular: $I = \int x\,[L (1 + x^2) + e^{-x}] \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 + 1}{2} L (1 + x^2) - e^{-x}(x + 1) + C}$

169. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x - 1)(x + 1)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} \right| + C}$

170. Calcular: $I = \int \frac{x}{x^2 - x - 2} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \sqrt[3]{(x - 2)^2 (x + 1)} \right| + C}$

171. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2 - 9}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \sqrt[6]{\frac{x - 3}{x + 3}} \right| + C}$

172. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x (x - 1)(x - 2)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{\sqrt{x (x - 2)}}{x - 1} \right| + C}$

173. Calcular: $I = \int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} L |x - 2| + \frac{1}{3} L |x - 1| + C}$

174. Calcular: $I = \int \frac{4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{x (x - 2)}{(x + 1)^2} \right| + C}$

175. Calcular: $I = \int \frac{5x^2 - 3}{x^3 - x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L |x^3 (x^2 - 1)| + C}$

176. Calcular: $I = \int \frac{(4x^3 + 2x^2 + 1)}{4x^3 - x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x + L \left| \frac{(2x - 1)\sqrt{2x + 1}}{x} \right| + C}$

177. Calcular: $I = \int \frac{(3x^2 + 5x)}{(x - 1)(x + 1)^2} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{x + 1} + L |(x - 1)^2 (x + 1)| + C}$

178. Calcular: $I = \int \frac{x^2}{(x + 1)^3} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2 (x + 1)^2} + \frac{2}{x + 1} + L |x + 1| + C}$

179. Calcular: $I = \int \frac{dx}{(1 + x)(1 - x^2)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2 (1 + x)} + L \left| \sqrt[4]{\frac{1 + x}{1 - x}} \right| + C}$

180. Calcular: $I = \int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{(x - 1)^{5/3}}{x^{3/2} (x + 2)^{1/6}} \right| + C}$

181. Calcular: $I = \int \frac{(x^3 + 1)}{x (x - 1)^3} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{(x - 1)^2}{x} \right| - \frac{x}{(x - 1)^2} + C}$

182. Calcular: $I = \int \frac{x^2}{(x - 1)^3} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2 (x - 1)^2} - \frac{2}{x - 1} + L |x - 1| + C}$

183. Calcular: $I = \int \frac{x^4 - 8}{x^3 + 2x^2} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{x} + L |x^2 (x + 2)^2| + C}$

184. Calcular: $I = \int \frac{8}{x^3 - 4x} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{x^2 - 4}{x^2} \right| + C}$

185. Calcular: $I = \int \frac{3x^2 + 11x + 2}{(x + 3)(x^2 - 1)} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L \left| \frac{(x - 1)^2 \cdot \sqrt{(x + 1)^3}}{\sqrt{x + 3}} \right| + C}$

186. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc tg } (x + 2) + C}$

187. Calcular: $I = \int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 20} \, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2L |(x - 2)^2 + 4^2| + \frac{3}{4} \text{ arc tg } \frac{x - 2}{4} + C}$

188. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C}$

189. Calcular: $I = \int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 9}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ arc tg } \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C}$

190. Calcular: $I = \int \frac{4\,dx}{x^3 + 4x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right| + C}$

191. Calcular: $I = \int \frac{4x^2 + 6}{x^3 + 3x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|x^2(x^2+3)\right| + C}$

192. Calcular: $I = \int \frac{x^2 + x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|x-1\right| + \text{arc tg } x + C}$

193. Calcular: $I = \int \frac{x - 18}{4x^3 + 9x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{4x^2+9}{x^2}\right| + \frac{1}{6} \text{ arc tg } \frac{2x}{3} + C}$

194. Calcular: $I = \int \frac{x^3 + 1}{(x-1)^4}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + L\left|x-1\right| + C}$

195. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^4 - 13x^2 + 36}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{30} L\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + \frac{1}{20} L\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C}$

196. Calcular: $I = \int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|(x-1)^2(x^2+x+1)\right| + C}$

197. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^3 + 1}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3} L\left|x+1\right| - \frac{1}{6} L\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ arc tg } \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C}$

198. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^3 + 8}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{12} L\left|x+2\right| - \frac{1}{24} L\left|x^2 - 2x + 4\right| + \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ arc tg } \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C}$

199. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\text{sen } x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\text{tg } \frac{x}{2}\right| + C}$

200. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\cos x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{1 + \text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg } \frac{x}{2}}\right| + C}$

201. Calcular: $I = \int \frac{dx}{1 + \text{sen } x + \cos x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|1 + \text{tg } \frac{x}{2}\right| + C}$

202. Calcular: $I = \int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2}{3} \text{ arc tg } \frac{\text{tg } \frac{x}{2}}{3} + C}$

203. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\text{sen}^3 x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{8\,\text{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} L\left|\text{tg } \frac{x}{2}\right| + \frac{\text{tg}^2 \frac{x}{2}}{8} + C}$

204. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\text{sen } x + \text{ctg } x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} L\left|\text{tg } \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4} \text{tg}^2 \frac{x}{2} + C}$

205. Calcular: $I = \int \text{sen}^3 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C}$

206. Calcular: $I = \int \cos^3 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{sen } x - \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C}$

207. Calcular: $I = \int \text{sen}^5 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C}$

208. Calcular: $I = \int \cos^5 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{sen } x - \frac{2\,\text{sen}^3 x}{3} + \frac{\text{sen}^5 x}{5} + C}$

209. Calcular: $I = \int \text{sen}^4 x \cdot \cos x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{sen}^5 x}{5} + C}$

210. Calcular: $I = \int \cos^2 x \cdot \text{sen}^3 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C}$

211. Calcular: $I = \int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^2 x} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C}$

212. Calcular: $I = \int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{\text{sen}\, x} - \text{sen}\, x + C}$

213. Calcular: $I = \int \sqrt{\text{sen}\, x} \cdot \cos^3 x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2\, \text{sen}^{3/2} x}{3} - \frac{2\, \text{sen}^{7/2} x}{7} + C}$

214. Calcular: $I = \int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos x} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -L\, |\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C}$

215. Calcular: $I = \int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2\, \text{sen}^2 x} + C}$

216. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{tg}\, x + \frac{\text{tg}^3 x}{3} + C}$

217. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\text{sen}^4 x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\text{ctg}\, x - \frac{\text{ctg}^3 x}{3} + C}$

218. Calcular: $I = \int \text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{sen}^4 x}{4} - \frac{\text{sen}^6 x}{6} + C}$

219. Calcular: $I = \int \cos^4 x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{4} + \frac{\text{sen}\, 2x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{\text{sen}\, 4x}{32} + C}$

220. Calcular: $I = \int \text{tg}^3 x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{tg}^2 x}{2} + L\, |\cos x| + C}$

221. Calcular: $I = \int \text{ctg}^3 \frac{x}{3} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{3\, \text{ctg}^2 \frac{x}{3}}{2} - 3\, L \left|\text{sen}\, \frac{x}{3}\right| + C}$

222. Calcular: $I = \int \sec^4 2x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{tg}\, 2x}{2} + \frac{\text{tg}^3 2x}{6} + C}$

223. Calcular: $I = \int \text{sen}\, 3x \cdot \text{sen}\, 2x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{sen}\, x}{2} - \frac{\text{sen}\, 5x}{10} + C}$

224. Calcular: $I = \int \text{sen}\, 4x \cdot \cos 2x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C}$

225. Calcular: $I = \int \cos 4x \cdot \cos 3x\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{sen}\, 7x}{14} + \frac{\text{sen}\, x}{2} + C}$

226. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6L\, |1 + \sqrt[6]{x}| + C}$

227. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 4\sqrt[4]{x} + 4L\, |\sqrt[4]{x} - 1| + C}$

228. Calcular: $I = \int \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 4\left[\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \sqrt[4]{x} + \text{arc tg}\, \sqrt[4]{x}\right] + C}$

229. Calcular: $I = \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt[6]{x^3}}{3} - 2\sqrt[6]{x} + 2\, \text{arc tg}\, \sqrt[6]{x}\right] + C}$

230. Calcular: $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{(x^3 - 1)^3}}{3} + \sqrt{x^3 - 1}\right] + C}$

231. Calcular: $I = \int \frac{2 + x}{\sqrt{x + 3}} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2x\, (x + 3)^{1/2}}{3} + C}$

232. Calcular: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\, \text{arc tg}\, \sqrt{x - 1} + C}$

233. Calcular: $I = \int \frac{x + 3}{(x + 5)\sqrt{x + 4}} dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\, [\sqrt{x + 4} - 2\, \text{arc tg}\, \sqrt{x + 4}] + C}$

234. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}{3}\, [4\sqrt{1 + x} - 8] + C}$

235. Calcular: $I = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\text{arc sen}\, x}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C}$

236. Calcular: $I = \int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2 \text{ arc sen } \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + C}$

237. Calcular: $I = \int \sqrt{25 - 9x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{25}{6} \text{ arc sen } \frac{3x}{5} + \frac{x}{2} \sqrt{25 - 9x^2} + C}$

238. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3} \text{ arc sen } \frac{3x}{5} + C}$

239. Calcular: $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{x^2 - 4} + C}$

240. Calcular: $I = \int \sqrt{1 + 9x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 9x^2} + \frac{1}{6} L \left|3x + \sqrt{1 + 9x^2}\right| + C}$

241. Calcular: $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{x^2 - 1} - \text{arc sec } x + C}$

242. Calcular: $I = \int \sqrt{8x - x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 8 \text{ arc sen } \frac{x - 4}{4} + \frac{x - 4}{2} \cdot \sqrt{8x - x^2} + C}$

243. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C}$

244. Calcular: $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \text{arc sen } x + C}$

245. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}\,(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x - \sqrt{x^2 + 1} + C}$

246. Calcular: $I = \int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2 \text{ arc sen } \frac{x + 1}{2} + \frac{x + 1}{2} \cdot \sqrt{4 - (x + 1)^2} + C}$

247. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4ax - x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen } \frac{x - 2a}{2a} + C}$

248. Calcular: $I = \int \frac{x}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}\, dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -L \left| \frac{\sqrt{4 - x^2} + 1}{2} \right| + C}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$$I = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^4}{4} + C}$

2. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2x^2} + C}$

3. RESOLUCIÓN

$$I = \int x\sqrt[3]{x}\, dx = \int x \cdot x^{1/3}\, dx = \int x^{4/3}\, dx = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{7} x^{7/3} + C = \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + C = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3}{7} x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + C}$

4. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/3}} \int x^{-1/3}\, dx = \frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C}$

5. RESOLUCIÓN

$$I = \int \left(\frac{2}{3} x^4 - \frac{2}{4} x^2 + 1\right) dx = \frac{2}{3} \int x^4\, dx - \frac{1}{2} \int x^2\, dx + \int dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = \frac{2x^5}{15} - \frac{x^3}{6} + x + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2x^5}{15} - \frac{x^3}{6} + x + C}$

6. RESOLUCIÓN

$$I = \int \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{3}{4} x^{1/2} - \frac{2}{3}\right) dx = \frac{2}{3} \int x^{3/2}\, dx -$$

$$- \frac{3}{4} \int x^{1/2}\, dx - \frac{2}{3} \int dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x +$$

$$+ C = \frac{4x^{5/2}}{15} - \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{2x}{3} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{4x^{5/2}}{15} - \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{2x}{3} + C}$

7. RESOLUCIÓN

$$I = \int \left(-\frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5}\right) dx = -3 \int x^{-4}\, dx - \int x^{-3}\, dx +$$

$$+ 2 \int x^{-5}\, dx = -3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-2}}{-2} + 2 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C =$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} + C}$

8. RESOLUCIÓN

$$I = \int (x^2 - 3x + 4)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 4\int dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C}}$

9. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{1 + x^2} = \int \left(2x + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx =$$
$$= 2\int x\,dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} = 2\,\frac{x^2}{2} + \text{arc tg } x + C =$$
$$= x^2 + \text{arc tg } x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{rl} 2x^3 + 2x + 1 & \underline{|\ x^2 + 1} \\ \underline{-2x^3 - 2x\quad} & \ \ 2x \\ +1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = x^2 + arc\ tg\ x + C}}$

10. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x - 1)\,dx}{x + 1} = \int \frac{x - 1 + 1 - 1}{x + 1}\,dx = \int \frac{x + 1 - 2}{x + 1}\,dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{2}{x + 1}\right)dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x + 1} = x - 2L\,(x + 1) + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = x - 2\,L\,|x + 1| + C}}$

11. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^4 - 5x^2 + 10}{x^2}\,dx = \int \left(x^2 - 5 + \frac{10}{x^2}\right)dx = \int x^2\,dx -$$
$$- 5\int dx + 10\int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^3}{3} - 5x + 10\int x^{-2}\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 5x - \frac{10}{x} + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \frac{x^3}{3} - 5x - \frac{10}{x} + C}}$

12. RESOLUCIÓN

$$I = \int (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx = \int (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)\,dx = a\int dx -$$
$$- 2\sqrt{a}\int x^{1/2}\,dx + \int x\,dx = ax - 2\sqrt{a} \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C =$$
$$= ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + C}}$

13. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{x}\,(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx = \int \sqrt{x}\,(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)\,dx =$$
$$= a\int \sqrt{x}\,dx - 2\sqrt{a}\int x\,dx + \int x\sqrt{x}\,dx = a\int x^{1/2}\,dx - 2\sqrt{a}\int x\,dx +$$
$$+ \int x^{3/2}\,dx = a \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{a} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C =$$
$$= \frac{2ax^{3/2}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2x^{5/2}}{5} + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \frac{2ax^{3/2}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2x^{5/2}}{5} + C}}$

14. RESOLUCIÓN

$$I = \int 10^x\,dx = \frac{10^x}{L\,10} + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \frac{10^x}{L\,10} + C}}$

15. RESOLUCIÓN

$$I = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx =$$
$$= \int x\,dx + 2\int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + 2x + L\,|x| + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \frac{x^2}{2} + 2x + L\,|x| + C}}$

16. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{\text{sen}^2 x\,dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x\,dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} +$$
$$+ \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = \text{tg } x - \text{ctg } x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = tg\ x - ctg\ x + C}}$

17. RESOLUCIÓN

$$I = \int \text{tg}^2 x\,dx = \int (\text{tg}^2 x + 1 - 1)\,dx = \int (\text{tg}^2 x + 1)\,dx - \int dx =$$
$$= \int \sec^2 x\,dx - \int dx = \text{tg } x - x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = tg\ x - x + C}}$

18. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{3\cos x + 2 - 2\,\text{sen}^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{3\cos x + 2\,(1 - \text{sen}^2 x)\,dx}{\cos x} =$$
$$= \int \frac{3\cos x + 2\cos^2 x}{\cos x}\,dx = 3\int dx + 2\int \cos x\,dx =$$
$$= 3x + 2\,\text{sen } x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 3x + 2\,sen\ x + C}}$

19. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(a + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} + x)\,dx}{\sqrt{x}} =$$
$$= a\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{a}\int dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = a \cdot 2\sqrt{x} + 2\sqrt{a} \cdot x +$$
$$+ \int x^{1/2}\,dx = 2a\sqrt{x} + 2x\sqrt{a} + \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2a\sqrt{x} + 2x\sqrt{a} + \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C}}$

20. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^3 - 6x + 5}{x - 2}\,dx = \int \left(x^2 + 2x - 2 + \frac{1}{x - 2}\right)dx =$$
$$= \int x^2\,dx + 2\int x\,dx - 2\int dx + \int \frac{dx}{x - 2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x + L\,|x - 2| + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + L\,|x - 2| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad - 6x + 5 & x - 2 \\ \hline -x^3 + 2x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \quad 2x^2 - 6x & \\ \quad -2x^2 + 4x & \\ \qquad -2x + 5 & \\ \qquad 2x - 4 & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + L\,|x - 2| + C}$

21. RESOLUCIÓN

$$I = \int\left(\frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x \cos x} + \cos x\right)dx = \int \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x \cos x}\,dx +$$

$$+ \int \cos x\,dx = \int \frac{2\,\text{sen } x \cos x}{\text{sen } x \cos x}\,dx + \int \cos x\,dx =$$

$$= 2\int dx + \int \cos x\,dx = 2x + \text{sen } x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\text{sen } 2x = 2\,\text{sen } x \cos x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2x + sen\,x + C}$

22. RESOLUCIÓN

$$I = \int (4x - 2)^5\,dx = \int t^5 \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^5\,dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^6}{6} + C =$$

$$= \frac{(4x - 2)^6}{24} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$4x - 2 = t$

$4\,dx = dt$

$dx = \frac{dt}{4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(4x - 2)^6}{24} + C}$

23. RESOLUCIÓN

$$I = \int x\,(3x^2 + 1)\,dx = \int t \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t\,dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \frac{(3x^2 + 1)^2}{12} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x^2 + 1 = t$

$6x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{dt}{6}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(3x^2 + 1)^2}{12} + C}$

24. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3}\,dx = \int \frac{dt}{t} = L\,|t| + C = L\,|x^2 + x - 3| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 + x - 3 = t$

$(2x + 1)\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|x^2 + x - 3| + C}$

25. RESOLUCIÓN

$$I = \int (x^3 - 5x^2 + 4x)\,(3x^2 - 10x + 4)\,dx =$$

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(x^3 - 5x^2 + 4x)^2}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^3 - 5x^2 + 4x = t$

$(3x^2 - 10x + 4)\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(x^3 - 5x^2 + 4x)^2}{2} + C}$

26. RESOLUCIÓN

$$I = \int 2x\sqrt{1 + 3x^2}\,dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{1/2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(1 + 3x^2)^3} + C =$$

$$= \frac{2}{9}\,(1 + 3x^2)\,\sqrt{1 + 3x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 + 3x^2 = t$

$3 \cdot 2x\,dx = dt$

$2x\,dx = \frac{dt}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2}{9}\,(1 + 3x^2)\,\sqrt{1 + 3x^2} + C}$

27. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{8 + x^2}} = \int \frac{2t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{8 + x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{8 + x^2} = t$

$8 + x^2 = t^2$

$2x\,dx = 2t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{8 + x^2} + C}$

28. RESOLUCIÓN

$$I = \int (x + 3)\,(x^2 + 6x - 4)\,dx = \int t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{(x^2 + 6x - 4)^2}{4} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 + 6x - 4 = t$

$(2x + 6)\,dx = dt$

$2\,(x + 3)\,dx = dt$

$(x + 3)\,dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(x^2 + 6x - 4)^2}{4} + C}$

29. RESOLUCIÓN

$$I = \int (x + 3)\,\text{sen}\,(x^2 + 6x - 4)\,dx = \int \text{sen } t \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{sen } t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos\,(x^2 + 6x - 4) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 + 6x - 4 = t$

$(2x + 6)\,dx = dt$

$(x + 3)\,dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2}\cos(x^2+6x-4)+C}$

30. RESOLUCIÓN

$$I=\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int (t^2+1)\,t\cdot 2t\,dt=2\int (t^4+t^2)\,dt=$$
$$=2\int t^4\,dt+2\int t^2\,dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+2\cdot\frac{t^3}{3}+C=$$
$$=\frac{2(x-1)^{5/2}}{5}+\frac{2(x-1)^{3/2}}{3}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x-1}=t$

$x-1=t^2 \Rightarrow x=t^2+1$

$dx=2t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{2(x-1)^{5/2}}{5}+\frac{2(x-1)^{3/2}}{3}+C}$

31. RESOLUCIÓN

$$I=\int x\,\text{sen}\,x^2\,dx=\frac{1}{2}\int \text{sen}\,t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=$$
$$=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$$

CÁLCULOS AUXILIRES

$x^2=t$

$2x\,dx=dt$

$x\,dx=\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=-\frac{\cos x^2}{2}+C}$

32. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}=\int\frac{2\,dt}{\cos^2 t}=2\,\text{tg}\,t+C=2\,\text{tg}\,\sqrt{x}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x}=t$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$

$\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=2\,tg\,\sqrt{x}+C}$

33. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x-1)}=\int\frac{x\,dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$
$$=\frac{1}{2}L\,|t|+C=\frac{1}{2}L\,|x^2-1|+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2-1=t$

$2x\,dx=dt$

$x\,dx=\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{L\,|x^2-1|}{2}+C}$

34. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{7x-2}}=\int\frac{\frac{2}{7}t\,dt}{t}=\frac{2}{7}\int dt=\frac{2}{7}t+C=$$
$$=\frac{2}{7}\sqrt{7x-2}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$7x-2=t^2$

$7\,dx=2t\,dt$

$dx=\frac{2}{7}t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{2\sqrt{7x-2}}{7}+C}$

35. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{\text{arc sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}(\text{arc sen}\,x)^2+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\text{arc sen}\,x=t$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{(arc\ sen\ x)^2}{2}+C}$

36. RESOLUCIÓN

$$I=\int x\sqrt{5x^2+1}\,dx=\frac{1}{10}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{10}\int t^{1/2}\,dt=$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{15}(5x^2+1)^{3/2}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5x^2+1=t$

$10x\,dx=dt$

$x\,dx=\frac{dt}{10}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{(5x^2+1)^{3/2}}{15}+C}$

37. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{L\,x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{(L\,x)^2}{2}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$Lx=t$

$\frac{dx}{x}=dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{(L\,x)^2}{2}+C}$

38. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$I=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}\,dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{(x-1)}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x-1=t$

$dx=dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=-\frac{1}{x-1}+C}$

39. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{(L\,x)^3}{x}dx=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(L\,x)^4}{4}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$Lx=t$

$\frac{dx}{x}=dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{(L\,x)^4}{4}+C}$

40. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\frac{2t\,dt}{(1+t^2)\,t}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=$$
$$=2\,\text{arc tg}\,t+C=2\,\text{arc tg}\,\sqrt{x}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x}$

$dx = 2t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + C}$

41. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{5x^3+7}} = \frac{2}{15}\int \frac{t\,dt}{t} = \frac{2}{15}\int dt =$$

$$= \frac{2}{15}\,t + C = \frac{2}{15}\sqrt{5x^3+7} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{5x^3+7} = t$

$5x^3 + 7 = t^2$

$15x^2\,dx = 2t\,dt$

$x^2\,dx = \dfrac{2t\,dt}{15}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2}{15}\sqrt{5x^3+7} + C}$

42. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(6x^3 - 11x^2 - 19x - 7)}{3x+2}\,dx = \int \left(2x^2 - 5x - 3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3x+2}\right)dx = 2\int x^2\,dx - 5\int x\,dx - 3\int dx - \int \frac{dx}{3x+2} =$$

$$= 2\cdot\frac{x^3}{3} - 5\cdot\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{3}\int\frac{3\,dx}{3x+2} =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 3x - \frac{1}{3}\,L\,|3x+2| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 11x^2 - 19x - 7 & 3x+2 \\ \hline -6x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x - 3 \\ \quad -15x^2 - 19x & \\ \quad 15x^2 + 10x & \\ \qquad -9x - 7 & \\ \qquad 9x + 6 & \\ \qquad\quad -1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} - 3x - \dfrac{1}{3}\,L\,|3x+2| + C}$

43. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\,dx = \int \frac{t}{t-2}\cdot 2t\,dt = 2\int\frac{t^2\,dt}{t-2} =$$

$$= 2\int\left(t + 2 + \frac{4}{t-2}\right)dt = 2\int t\,dt + 4\int dt + 8\int\frac{dt}{t-2} =$$

$$= t^2 + 4t + 8\,L\,|t-2| + C = x + 4\sqrt{x} + 8\,L\,|\sqrt{x}-2| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x} = t \quad ; \quad x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t-2 \\ \hline -t^2 + 2t & t+2 \\ \quad 2t & \\ \quad -2t + 4 & \\ \qquad 4 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x + 4\sqrt{x} + 8\,L\,|\sqrt{x}-2| + C}$

44. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int\frac{t}{1+t}\cdot 3t^2\,dt = 3\int\frac{t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= 3\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 3\cdot\frac{t^3}{3} - 3\cdot\frac{t^2}{2} + 3t - 3\,L\,|t+1| + C =$$

$$= x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 3\,L\,|\sqrt[3]{x}+1| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt[3]{x} = t \quad ; \quad x = t^3$

$dx = 3t^2\,dt$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t+1 \\ \hline -t^3 - t^2 & t^2 - t + 1 \\ \quad -t^2 & \\ \quad t^2 + t & \\ \qquad t & \\ \qquad -t - 1 & \\ \qquad\quad -1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x - \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 3\,L\,|\sqrt[3]{x}+1| + C}$

45. RESOLUCIÓN

$$I = \int (e^x - 3e^{2x} + 4e^{3x})\,dx = \int e^x\,dx - 3\int e^{2x}\,dx +$$

$$+ 4\int e^{3x}\,dx = e^x - 3\cdot\frac{e^{2x}}{2} + 4\cdot\frac{e^{3x}}{3} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = e^x - \dfrac{3}{2}\,e^{2x} + \dfrac{4}{3}\,e^{3x} + C}$

46. RESOLUCIÓN

$$I = \int sen^3\,3x\cdot cos\,3x\,dx = \int t^3\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^3\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{sen^4\,3x}{12} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\,3x = t$

$3\,cos\,3x\,dx = dt$

$cos\,3x\,dx = \dfrac{dt}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{sen^4\,3x}{12} + C}$

47. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{e^x\,dx}{e^x+2} = \int\frac{dt}{t} = L\,|t| + C = L\,|e^x+2| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$e^x + 2 = t$

$e^x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|e^x+2| + C}$

48. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{2x\,dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int\frac{t^2\,2t\,dt}{1+t} = 4\int\frac{t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= 4\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 4\cdot\frac{t^3}{3} - 4\cdot\frac{t^2}{2} + 4t -$$

$$- 4\,L\,|t+1| + C = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 2x + 4\sqrt{x} - 4\,L\,|\sqrt{x}+1| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\,x\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} - 4\,L\,|\sqrt{x}+1| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x} = t \quad ; \quad x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t+1 \\ \hline -t^3 - t^2 & t^2 - t + 1 \\ \quad -t^2 & \\ \quad t^2 + t & \\ \qquad t & \\ \quad -t - 1 & \\ \qquad -1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{4}{3} x \sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} - 4\,L\,|\sqrt{x} + 1| + C}$

49. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{ctg\,x}{\sqrt{sen\,x}}\,dx = \int \frac{\frac{cos\,x}{sen\,x}\,dx}{\sqrt{sen\,x}} = \int \frac{cos\,x\,dx}{sen\,x\,\sqrt{sen\,x}} =$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{t^2 \cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2} = 2 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{t} + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{sen\,x}} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{sen\,x} = t \quad ; \quad sen\,x = t^2$

$cos\,x\,dx = 2t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2}{\sqrt{sen\,x}} + C}$

50. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x} = t \quad ; \quad x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x} + C}$

51. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2\,dt}{t} = 3\int t\,dt = 3 \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt[3]{x} = t \quad ; \quad x = t^3$

$dx = 3t^2\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C}$

52. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{ax}\,dx = \frac{2}{a}\int t^2\,dt = \frac{2}{a} \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{ax\sqrt{ax}}{3} + C = \frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{ax} = t \quad ; \quad ax = t^2$

$a\,dx = 2t\,dt$

$dx = \frac{2t\,dt}{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2x\sqrt{a\,x}}{3} + C}$

53. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a - bx}} = -\frac{2}{b}\int \frac{t\,dt}{t} = -\frac{2}{b}\int dt = -\frac{2}{b}t + C =$$

$$= -\frac{2}{b}\sqrt{a - bx} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{a - bx} = t \quad ; \quad a - bx = t^2$

$-b\,dx = 2t\,dt$

$dx = -\frac{2t\,dt}{b}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2\sqrt{a - bx}}{b} + C}$

54. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}} = \int \frac{\frac{3}{4}\,dt}{\sqrt{9 - 16 \cdot \frac{9}{16}t^2}} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9 - 9t^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\,arc\,sen\,t + C = \frac{1}{4}\,arc\,sen\,\frac{4x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = \frac{3}{4}t \quad ; \quad t = \frac{4x}{3}$

$dx = \frac{3}{4}\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{4}\,arc\,sen\,\frac{4x}{3} + C}$

55. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2}{b}\int t^2\,dt = \frac{2}{b} \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{b} \cdot \frac{(\sqrt{a + bx})^3}{3} + C = \frac{2\,(a + bx)^{3/2}}{3b} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{a + bx} = t$

$a + bx = t^2$

$b\,dx = 2t\,dt$

$dx = \frac{2t\,dt}{b}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2(a + bx)^{3/2}}{3b} + C}$

56. RESOLUCIÓN

$$I = \int x\,(2 + x^2)^2\,dx = \int t^2 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{(2 + x^2)^3}{6} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$2 + x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{(2 + x^2)^3}{6} + C}$

57. RESOLUCIÓN

$$I = \int x\,\sqrt{2x^2 + 3} \cdot dx = \int t \cdot \frac{t\,dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{(2x^2 + 3)^{3/2}}{6} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{2x^2+3} = t \quad ; \quad 2x^2+3 = t^2$

$4x\,dx = 2t\,dt$

$x\,dx = \dfrac{t\,dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{(2x^2+3)^{3/2}}{6} + C}}$

58. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{4x^2\,dx}{\sqrt{x^3+8}} = 4\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+8}} = 4\int \frac{\frac{2t\,dt}{3}}{t} = \frac{8}{3}\int dt =$$

$$= \frac{8}{3}t + C = \frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x^3+8} = t \quad ; \quad x^3+8 = t^2$

$3x^2\,dx = 2t\,dt$

$x^2\,dx = \dfrac{2t\,dt}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C}}$

59. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int t^2 \cdot 2\,dt = 2\int t^2\,dt = 2\cdot\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{x})^3}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{a} + \sqrt{x} = t$

$\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{2(\sqrt{a}+\sqrt{x})^3}{3} + C}}$

60. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \int \frac{-\frac{t\,dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{1}{2}t + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{a^4-x^4}}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{a^4-x^4} = t \quad ; \quad a^4-x^4 = t^2$

$-4x^3\,dx = 2t\,dt$

$x^3\,dx = -\dfrac{t\,dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\dfrac{\sqrt{a^4-x^4}}{2} + C}}$

61. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^3} = \int \frac{\frac{dt}{2b}}{t^3} = \frac{1}{2b}\int t^{-3}\,dt = \frac{1}{2b}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4b\,t^2} + C = -\frac{1}{4b\,(a+bx^2)^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a + bx^2 = t$

$2bx\,dx = dt$

$x\,dx = \dfrac{dt}{2b}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\dfrac{1}{4b\,(a+bx^2)^2} + C}}$

62. RESOLUCIÓN

$$I = \int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{bn} = \frac{2}{bn}\int t^2\,dt =$$

$$= \frac{2}{bn}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{2(a+bx^n)^{3/2}}{3bn} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{a+bx^n} = t$

$a + bx^n = t^2$

$bn\,x^{n-1}\,dx = 2t\,dt$

$x^{n-1}\,dx = \dfrac{2t\,dt}{bn}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{2(a+bx^n)^{3/2}}{3bn} + C}}$

63. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+3x-1}} = \int \frac{2t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t + C =$$

$$= 2\sqrt{x^2+3x-1} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x^2+3x-1} = t$

$x^2+3x-1 = t^2$

$(2x+3)\,dx = 2t\,dt$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = 2\sqrt{x^2+3x-1} + C}}$

64. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^3+3x}} = \int \frac{\frac{2t\,dt}{3}}{t} = \frac{2}{3}\int dt = \frac{2}{3}t + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3+3x}}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x^3+3x} = t$

$x^3+3x = t^2$

$(3x^2+3)\,dx = 2t\,dt$

$3(x^2+1)\,dx = 2t\,dt$

$(x^2+1)\,dx = \dfrac{2t\,dt}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \dfrac{2\sqrt{x^3+3x}}{3} + C}}$

65. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{x^2+10x-4}} = \int \frac{t\,dt}{t} = \int dt = t + C =$$

$$= \sqrt{x^2+10x-4} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x^2+10x-4} = t$

$x^2+10x-4 = t^2$

$(2x+10)\,dx = 2t\,dt$

$2(x+5)\,dx = 2t\,dt$

$(x+5)\,dx = t\,dt$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = \sqrt{x^2+10x-4} + C}}$

66. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{2 + Lx}{x}\,dx = \int (2 + Lx)\,\frac{dx}{x} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C =$$
$$= \frac{(2 + Lx)^2}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$2 + Lx = t$

$\frac{dx}{x} = dt$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \frac{(2 + Lx)^2}{2} + C}$$

67. RESOLUCIÓN

$$I = \int sen\ 3x \cdot cos\ 3x\,dx = \int t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t\,dt =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{sen^2\,3x}{6} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\ 3x = t$

$3\cos 3x\,dx = dt$

$\cos 3x\,dx = \frac{dt}{3}$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \frac{sen^2\,3x}{6} + C}$$

68. RESOLUCIÓN

$$I = \int (sen\ 2x \cdot cos^2\,2x)\,dx = \int t^2 \cdot \frac{-dt}{2} = -\frac{1}{2}\int t^2\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C = -\frac{cos^3\,2x}{6} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\cos 2x = t$

$-2\,sen\ 2x\,dx = dt$

$sen\ 2x\,dx = -\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = -\frac{cos^3\,2x}{6} + C}$$

69. RESOLUCIÓN

$$I = \int tg\,\frac{x}{2} \cdot sec^2\,\frac{x}{2}\,dx = \int t \cdot 2\,dt = 2\int t\,dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} + C =$$
$$= tg^2\,\frac{x}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$tg\,\frac{x}{2} = t$

$\frac{1}{2}\,sec^2\,\frac{x}{2}\,dx = dt$

$sec^2\,\frac{x}{2}\,dx = 2\,dt$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = tg^2\,\frac{x}{2} + C}$$

70. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{cos\ 4x\,dx}{\sqrt{3 + sen\ 4x}} = \int \frac{\frac{t\,dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2} \cdot t + C =$$
$$= \frac{\sqrt{3 + sen\ 4x}}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{3 + sen\ 4x} = t$

$3 + sen\ 4x = t^2$

$4\cos 4x\,dx = 2t\,dt$

$\cos 4x\,dx = \frac{t\,dt}{2}$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \frac{\sqrt{3 + sen\ 4x}}{2} + C}$$

71. RESOLUCIÓN

$$I = \int \left(\frac{sec\ 2x}{1 + tg\ 2x}\right)^2 dx = \int \frac{sec^2\,2x\,dx}{(1 + tg\ 2x)^2} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2t} + C =$$
$$= -\frac{1}{2\,(1 + tg\ 2x)} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 + tg\ 2x = t$

$2\,sec^2\,2x\,dx = dt$

$sec^2\,2x\,dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \frac{-1}{2\,(1 + tg\ 2x)} + C}$$

72. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{e^{2x}\,dx}{3 + 5e^{2x}} = \int \frac{\frac{dt}{10}}{t} = \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10} \cdot L\,|t| + C =$$
$$= \frac{L\,|3 + 5e^{2x}|}{10} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3 + 5e^{2x} = t$

$5 \cdot 2e^{2x}\,dx = dt$

$e^{2x}\,dx = \frac{dt}{10}$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \frac{L\,|3 + 5e^{2x}|}{10} + C}$$

73. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - 2x^2}} = \int \frac{\frac{-t\,dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{1}{2}\,t + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{1 - 2x^2}}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{1 - 2x^2} = t$

$1 - 2x^2 = t^2$

$-4x\,dx = 2t\,dt$

$x\,dx = -\frac{t\,dt}{2}$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = -\frac{\sqrt{1 - 2x^2}}{2} + C}$$

74. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{sen\ ax\,dx}{cos\ ax + b} = \int \frac{-\frac{dt}{a}}{t} = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} =$$
$$= -\frac{1}{a}\,L\,|t| + C = -\frac{L\,|cos\ ax + b|}{a} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\cos ax + b = t$

$-a \operatorname{sen} ax\, dx = dt$

$\operatorname{sen} ax\, dx = -\dfrac{dt}{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\dfrac{L\,|\cos ax + b|}{a} + C}$

75. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x\, dx}{\sqrt{2 \operatorname{ctg} x + 3}} = \int \frac{-t\, dt}{t} = -\int dt = -t + C =$$
$$= -\sqrt{2 \operatorname{ctg} x + 3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{2 \operatorname{ctg} x + 3} = t$

$2 \operatorname{ctg} x + 3 = t^2$

$2\,(-\operatorname{cosec}^2 x)\, dx = 2t\, dt$

$\operatorname{cosec}^2 x\, dx = -t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\sqrt{2 \operatorname{ctg} x + 3} + C}$

76. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{e^x + 2}{\sqrt{e^x + 2x}}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{t} = 2\int dt = 2t + C =$$
$$= 2\sqrt{e^x + 2x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{e^x + 2x} = t$

$e^x + 2x = t^2$

$(e^x + 2)\, dx = 2t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{e^x + 2x} + C}$

77. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{e^x - \cos x}}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{t} = 2\int dt = 2t + C =$$
$$= 2\sqrt{e^x - \cos x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{e^x - \cos x} = t$

$e^x - \cos x = t^2$

$(e^x + \operatorname{sen} x)\, dx = 2t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{e^x - \cos x} + C}$

78. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\sec 2x \operatorname{tg} 2x}{\sec 2x - 3}\, dx = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} L\,|t| + C =$$
$$= \frac{L\,|\sec 2x - 3|}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sec 2x - 3 = t$

$2 \sec 2x \cdot \operatorname{tg} 2x\, dx = dt$

$\sec 2x \cdot \operatorname{tg} 2x\, dx = \dfrac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{L\,|\sec 2x - 3|}{2} + C}$

79. RESOLUCIÓN

$$I = \int (e^{x/a} - e^{-x/a})\, dx = \int e^{x/a}\, dx - \int e^{-x/a}\, dx =$$
$$= \int e^t \cdot a\, dt - \int e^z\,(-a)\, dz = a \cdot e^t + a \cdot e^z + C =$$
$$= a \cdot e^{x/a} + a \cdot e^{-x/a} + C = a\,(e^{x/a} + e^{-x/a}) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\dfrac{x}{a} = t \quad ; \quad x = at$

$dx = a\, dt$

$-\dfrac{x}{a} = z \quad ; \quad x = -az$

$dx = -a\, dz$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = a\,(e^{x/a} + e^{-x/a}) + C}$

80. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{e^t}{t} \cdot 2t\, dt = 2\int e^t\, dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x} = t \quad ; \quad x = t^2$

$dx = 2t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2e^{\sqrt{x}} + C}$

81. RESOLUCIÓN

$$I = \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x\, dx = \int e^t\, dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{tg} x = t$

$\sec^2 x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = e^{\operatorname{tg} x} + C}$

82. RESOLUCIÓN

$$I = \int a^{2x}\, dx = \int a^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int a^t\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^t}{L\,a} + C =$$
$$= \frac{a^{2x}}{2\,L\,a} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$2x = t$

$2\, dx = dt$

$dx = \dfrac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{a^{2x}}{2\,La} + C}$

83. RESOLUCIÓN

$$I = \int (e^{5x} + a^{5x})\, dx = \int e^{5x}\, dx + \int a^{5x}\, dx =$$
$$= \int e^t \cdot \frac{dt}{5} + \int a^t \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{5} \cdot \frac{a^t}{L\,a} + C =$$
$$= \frac{e^{5x}}{5} + \frac{a^{5x}}{5\,L\,a} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5x = t$

$5\, dx = dt$

$dx = \dfrac{dt}{5}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{e^{5x}}{5} + \dfrac{a^{5x}}{5\,La} + C}$

84. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{3\, dx}{e^{3x}} = \int \frac{dt}{e^t} = \int e^{-t}\, dt = -e^{-t} + C = -e^{-3x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x = t$

$3\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -e^{-3x} + C}$

85. RESOLUCIÓN

$I = \int 6x\, e^{-x^2} dx = 6 \int e^t \frac{-dt}{2} = -3 \int e^t\, dt = -3\, e^t + C =$

$= -3\, e^{-x^2} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$-x^2 = t$

$-2x\, dx = dt$

$x\, dx = -\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -3e^{-x^2} + C}$

86. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$= \int \frac{e^t}{t} \cdot 2t\, dt - 3 \cdot 2\sqrt{x} = 2 \int e^t\, dt - 6\sqrt{x} = 2\, e^t - 6\sqrt{x} + C =$

$= 2\, e^{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2 \quad ; \quad dx = 2t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\, e^{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x} + C}$

87. RESOLUCIÓN

$I = \int sen\, \frac{2x}{3} dx = \int sen\, t \cdot \frac{3\, dt}{2} = \frac{3}{2} \int sen\, t\, dt =$

$= -\frac{3}{2} \cos t + C = -\frac{3}{2} \cos \frac{2x}{3} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\frac{2x}{3} = t$

$\frac{2}{3} dx = dt$

$dx = \frac{3\, dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{3}{2} \cos \frac{2x}{3} + C}$

88. RESOLUCIÓN

$I = \int \cos 5x\, dx = \int \cos t \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \cos t\, dt$

$= \frac{1}{5}\, sen\, t + C = \frac{sen\, 5x}{5} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5x = t$

$5\, dx = dt$

$dx = \frac{dt}{5}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{sen\, 5x}{5} + C}$

89. RESOLUCIÓN

$I = \int tg\, \frac{x}{5} dx = \int tg\, t \cdot 5\, dt = 5 \int tg\, t\, dt = -5\, L\, |\cos t| + C =$

$= -5\, L\, \left|\cos \frac{x}{5}\right| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\frac{x}{5} = t \;;\; x = 5t \;;\; dx = 5\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -5\, L \left|\cos \frac{x}{5}\right| + C}$

90. RESOLUCIÓN

$I = \int ctg\, 10x\, dx = \int ctg\, t \cdot \frac{dt}{10} = \frac{1}{10} \int ctg\, t\, dt =$

$= \frac{1}{10} \cdot L\, |sen\, t| + C = \frac{1}{10}\, L\, |sen\, 10x| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$10x = t$

$10\, dx = dt$

$dx = \frac{dt}{10}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{10}\, L\, |sen\, 10x| + C}$

91. RESOLUCIÓN

$I = \int cosec\, x\, dx = \int cosec\, x \cdot \frac{cosec\, x + ctg\, x}{cosec\, x + ctg\, x} dx = -\int \frac{dt}{t} =$

$= -L\, |t| + C = -L\, |cosec\, x + ctg\, x| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$cosec\, x + ctg\, x = t$

$(-cosec\, x \cdot ctg\, x - cosec^2\, x)\, dx = dt$

$-cosec\, x\, (cosec\, x + ctg\, x)\, dx = dt$

$cosec\, x\, (cosec\, x + ctg\, x)\, dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -L\, |cosec\, x + ctg\, x| + C}$

92. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{dx}{(1 + x^2)\, arc\, tg\, x} = \int \frac{dt}{t} = L\, t + C = L\, |arc\, tg\, x| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$arc\, tg\, x = t$

$\frac{dx}{1 + x^2} = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\, |arc\, tg\, x| + C}$

93. RESOLUCIÓN

$I = \int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} dx = \int \frac{\sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 + x}} dx = \int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arc\, sen\, x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} =$

$= arc\, sen\, x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = arc\, sen\, x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C =$

$= arc\, sen\, x - \sqrt{1 - x^2} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 - x^2 = t$

$-2x\, dx = dt$

$x\, dx = -\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\, sen\, x - \sqrt{1 - x^2} + C}$

94. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{dx}{x^2 + 9} = 3 \int \frac{dt}{9t^2 + 9} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$

$= \frac{1}{3}\, arc\, tg\, t + C = \frac{1}{3}\, arc\, tg\, \frac{x}{3} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 3t \quad ; \quad t = \frac{x}{3}$

$dx = 3\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}\, arc\, tg\, \frac{x}{3} + C}$

95. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 9} = 3\int \frac{dt}{9t^2 + 9} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{3}\, arc\, tg\, t + C = \frac{1}{3}\, arc\, tg\, \frac{x-2}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x - 2 = 3t \quad ; \quad t = \frac{x-2}{3}$

$dx = 3\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}\, arc\, tg\, \frac{x-2}{3} + C}$

96. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{ax\, dx}{x^4 + b^4} = a\int \frac{x\, dx}{(x^2)^2 + b^4} = a\int \frac{\frac{b^2\, dt}{2}}{b^4 t^2 + b^4} =$$

$$= \frac{a\, b^2}{2\, b^4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{a}{2\, b^2}\, arc\, tg\, t + C =$$

$$= \frac{a}{2\, b^2}\, arc\, tg\, \frac{x^2}{b^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 = b^2 t \Rightarrow t = \frac{x^2}{b^2}$

$2x\, dx = b^2\, dt$

$x\, dx = \frac{b^2\, dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{a}{2b^2}\, arc\, tg\, \frac{x^2}{b^2} + C}$

97. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x\, Lx} = \int \frac{1}{Lx} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t}\, dt = L\, |t| + C = L\, |Lx| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$Lx = t$

$\frac{dx}{x} = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\, |Lx| + C}$

98. RESOLUCIÓN

$$I = \int \cos^2 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 10x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\, 10x}{10} + C =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{sen\, 10x}{20} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen^2 5x + \cos^2 5x = 1$

$\cos^2 5x - sen^2 5x = \cos 10x$

$2\cos^2 5x = 1 + \cos 10x$

$\cos^2 5x = \frac{1 + \cos 10x}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 10x}{20} + C}$

99. RESOLUCIÓN

$$I = \int \cos x \cdot sen\, 2x\, dx = \int \cos x \cdot 2\, sen\, x \cos x\, dx =$$

$$= 2\int \cos^2 x \cdot sen\, x\, dx = -2\int t^2\, dt = -2 \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{2\cos^3 x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\cos x = t$

$-sen\, x\, dx = dt$

$sen\, x\, dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{2\cos^3 x}{3} + C}$

100. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}\, dx =$$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)\, dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{(1 - \cos x)\, dx}{sen^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{sen^2 x} - \int \frac{\cos x}{sen^2 x}\, dx = -ctg\, x - \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -ctg\, x - \frac{t^{-1}}{-1} + C = -ctg\, x + \frac{1}{sen\, x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\, x = t$

$\cos x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -ctg\, x + \frac{1}{sen\, x} + C}$

101. RESOLUCIÓN

$$I = \int sen^2 3x\, dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos 6x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\, sen\, 6x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\, sen\, 6x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen^2 3x + \cos^2 3x = 1$

$-\cos^2 3x + sen^2 3x = -\cos 6x$

$2\, sen^2 3x = 1 - \cos 6x$

$sen^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\, sen\, 6x + C}$

102. RESOLUCIÓN

$$I = \int tg^2 2x\, dx = \int (sec^2 2x - 1)\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} - \int dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, tg\, 2x - x + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}\, tg\, 2x - x + C}$

103. RESOLUCIÓN

$$I = \int sec^2 10x\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 10x} = \frac{1}{10}\, tg\, 10x + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{10}\, tg\, 10x + C}$

104. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \int \frac{5\, dt}{\sqrt{25 - (5t)^2}} = \int \frac{5\, dt}{\sqrt{25 - 25t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = arc\, sen\, t + C = arc\, sen\, \frac{x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 5t \Rightarrow t = \frac{x}{5}$

$dx = 5\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = arc\, sen\, \frac{x}{5} + C}$

105. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 5\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = 5\int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{5}{2} \text{arc sen } t + C = \frac{5}{2} \text{arc sen } x^2 + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{5}{2} \text{arc sen } x^2 + C}$

106. RESOLUCIÓN

$$I = \int sec^2\left(\frac{8x^2-2x-15}{4x+5}\right)dx = \int sec^2(2x-3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int sec^2 t\,dt = \frac{1}{2} tg\, t + C = \frac{1}{2} tg\,(2x-3) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 - 2x - 15 & 4x+5 \\ \hline -8x^2 - 10x & 2x-3 \\ -12x - 15 & \\ 12x + 15 & \\ 0 & \end{array}$$

$2x - 3 = t$

$2\,dx = dt$

$dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} tg\,(2x-3) + C}$

107. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{1}{4} x\, a^{x^2} dx = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{dt}{2\,La} = \frac{1}{8\,La}\int dt =$$

$$= \frac{1}{8\,La}\cdot t + C = \frac{a^{x^2}}{8\,La} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a^{x^2} = t$

$a^{x^2}\cdot La \cdot 2x\,dx = dt$

$x\,a^{x^2} dx = \frac{dt}{2\,La}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{a^{x^2}}{8\,La} + C}$

108. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{3\,dx}{5^{2x-1}} = 3\int 5^{1-2x} dx = -\frac{3}{2}\int 5^t\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{5^t}{L5} + C = -\frac{3\cdot 5^{1-2x}}{2\,L5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 - 2x = t$

$-2\,dx = dt$

$dx = -\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{3\cdot 5^{1-2x}}{2\,L5} + C}$

109. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^6\,dx}{\cos^2(x^7+2)} = \frac{1}{7}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{7} tg\, t + C =$$

$$= \frac{1}{7} tg\,(x^7+2) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^7 + 2 = t$

$7x^6\,dx = dt$

$x^6\,dx = \frac{dt}{7}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{7} tg\,(x^7+2) + C}$

110. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{t\,dt}{t} - \text{arc sec } x =$$

$$= t - \text{arc sec } x + C = \sqrt{x^2-1} - \text{arc sec } x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x^2-1} = t$

$x^2 - 1 = t^2$

$2x\,dx = 2t\,dt$

$x\,dx = t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{x^2-1} - \text{arc sec } x + C}$

111. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\cdot a^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{dt}{La} = \frac{1}{La}\int dt = \frac{1}{La}\cdot t + C =$$

$$= \frac{a^{\sqrt{x^2-1}}}{La} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a^{\sqrt{x^2-1}} = t$

$a^{\sqrt{x^2-1}}\cdot La\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\,dx = dt$

$\frac{x\cdot a^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{dt}{La}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{a^{\sqrt{x^2-1}}}{La} + C}$

112. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+3)^2}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{4-(2t)^2}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{4-4t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sen } t + C = \text{arc sen } \frac{x+3}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x + 3 = 2t \Rightarrow t = \frac{x+3}{2}$

$dx = 2\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen } \frac{x+3}{2} + C}$

113. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \text{arc tg } \frac{x+1}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$x_1 = -1 + 2i$

$x_2 = -1 - 2i$

$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{x+1}{2} + C}$

114. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 64} = \int \frac{8\,dt}{(8t)^2 + 64} = \frac{8}{64}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{8}\,\text{arc tg}\, t + C = \frac{1}{8}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{8} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 8t \Rightarrow t = \frac{x}{8}$

$dx = 8\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{8} \text{arc tg} \frac{x}{8} + C}$

115. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{16 - 9\left(\frac{4}{3}t\right)^2}} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{16 - 16t^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sen}\, t + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{arc sen}\,\frac{3x}{4} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = \frac{4}{3}t \Rightarrow t = \frac{3x}{4}$

$dx = \frac{4}{3}\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3} \text{arc sen} \frac{3x}{4} + C}$

116. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{e^x\,dx}{1 + (e^x)^2} = \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \text{arc tg}\, t + C = \text{arc tg}\, e^x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$e^x = t$

$e^x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc tg}\, e^x + C}$

117. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}} = \int \frac{\frac{1}{a}\,dt}{\sqrt{1 - a^2 \cdot \frac{t^2}{a^2}}} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\,\text{arc sen}\, t + C = \frac{1}{a}\,\text{arc sen}\, ax + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = \frac{1}{a}t \Rightarrow t = ax$

$dx = \frac{1}{a}\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{a} \text{arc sen}\, ax + C}$

118. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (Lx)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{arc sen}\, t + C =$$

$$= \text{arc sen}\,(Lx) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$Lx = t$

$\frac{dx}{x} = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen}\,(Lx) + C}$

119. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \text{arc sen}\, t + C = \text{arc sen}\,(x - 1) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x - 1 = t$

$dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen}\,(x - 1) + C}$

120. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \text{arc sen}\, t + C = \text{arc sen}\,\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x - 2 = \sqrt{5}\,t \Rightarrow t = \frac{x-2}{\sqrt{5}}$

$dx = \sqrt{5}\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C}$

121. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\frac{4x^2}{25} + 1} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\frac{5}{2}\,dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{10}\,\text{arc tg}\, t + C = \frac{1}{10}\,\text{arc tg}\,\frac{2x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\frac{2}{5}x = t\ ;\ x = \frac{5}{2}t$

$dx = \frac{5}{2}\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{10} \text{arc tg} \frac{2x}{5} + C}$

122. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{3 + 7x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + \frac{7}{3}x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\,dt}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}\,\text{arc tg}\, t + C =$$

$$= \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{21}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\,x + C = \frac{\sqrt{21}}{21}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{21}}{3}\,x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}x = t\ ;\ x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}t$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{21}}{21} \text{ arc tg } \frac{\sqrt{21}}{3} x + C}$

123. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{3\,dx}{x^2 - 8x + 25} = 3\int \frac{dx}{9 + (x-4)^2} = 3\int \frac{3\,dt}{9 + 9t^2} =$$
$$= \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tg } t + C = \text{arc tg } \frac{x-4}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x - 4 = 3t \;;\; t = \dfrac{x-4}{3}$

$dx = 3\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc tg } \frac{x-4}{3} + C}$

124. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(2x+5)}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$$
$$= L\,|x^2+2x+5| + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = L\,|x^2+2x+5| +$$
$$+ 3\int \frac{2\,dt}{4t^2+4} = L\,|x^2+2x+5| + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= L\,|x^2+2x+5| + \frac{3}{2}\text{ arc tg } t + C =$$
$$= L\,|x^2+2x+5| + \frac{3}{2}\text{ arc tg } \frac{x+1}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x + 1 = 2t \;;\; t = \dfrac{x+1}{2}$

$dx = 2\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|x^2 + 2x + 5| + \frac{3}{2} \text{ arc tg } \frac{x+1}{2} + C}$

125. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \int \frac{(8x-3+12-12)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} =$$
$$= \int \frac{(8x-12)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} + \int \frac{9\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} =$$
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 9\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x-3)^2}} =$$
$$= -2\sqrt{t} + 9\int \frac{dz}{\sqrt{4-4z^2}} = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \int \frac{9}{2}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$= -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2}\text{ arc sen } z + C =$$
$$= -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2}\text{ arc sen } \frac{2x-3}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$12x - 4x^2 - 5 = t$

$(12 - 8x)\,dx = dt$

$-(8x - 12)\,dx = dt$

$(8x - 12)\,dx = -dt$

$12x - 4x^2 - 5 = 4 - (2x-3)^2$

$2x - 3 = 2z \;;\; z = \dfrac{2x-3}{2}$

$2\,dx = 2\,dz$

$dx = dz$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -2\sqrt{12x - 4x^2 - 5} + \frac{9}{2} \text{ arc sen } \frac{2x-3}{2} + C}$

126. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sec x\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \text{tg } x}{\sec x + \text{tg } x}\,dx =$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \text{tg } x}{\sec x + \text{tg } x}\,dx = \int \frac{dt}{t} =$$
$$= L\,|t| + C = L\,|\sec x + \text{tg } x| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sec x + \text{tg } x = t$

$(\sec x \cdot \text{tg } x + \sec^2 x)\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|\sec x + \text{tg } x| + C}$

127. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\text{cosec } 2x \cdot \text{ctg } 2x}{5 - 4\,\text{cosec } 2x}\,dx = \int \frac{\frac{dt}{8}}{t} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{8} L\,|t| + C = \frac{1}{8} L\,|5 - 4\,\text{cosec } 2x| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$5 - 4\,\text{cosec } 2x = t$

$-4\,(-\text{cosec } 2x \cdot \text{ctg } 2x \cdot 2)\,dx = dt$

$(\text{cosec } 2x \cdot \text{ctg } 2x)\,dx = \dfrac{dt}{8}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{8} L\,|5 - 4\,\text{cosec } 2x| + C}$

128. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\text{cosec}^2 \frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{3 - \text{ctg } \frac{x}{2}}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \cdot 2\sqrt{t} + C =$$
$$= 4\sqrt{3 - \text{ctg } \frac{x}{2}} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3 - \text{ctg } \dfrac{x}{2} = t$

$\text{cosec}^2 \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\,dx = dt$

$\text{cosec}^2 \dfrac{x}{2}\,dx = 2\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 4\sqrt{3 - \text{ctg } \frac{x}{2}} + C}$

129. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\text{sen } x \cdot \cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\text{sen } x \cdot \cos^2 x} = \int \text{ctg } x \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\text{tg } x} = \int \frac{dt}{t} = L\,|t| + C = L\,|\text{tg } x| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\text{tg } x = t$

$\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|\text{tg } x| + C}$

130. RESOLUCIÓN

$I = \int x\, e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} - e^{-x} + C =$

$= -e^{-x}(x + 1) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x \;;\; du = dx$

$dv = e^{-x}\, dx \;;\; v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -e^{-x}(x + 1) + C}$

131. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{Lx}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \cdot Lx + \int \frac{dx}{x^2} =$

$= -\frac{Lx}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(1 + Lx) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = Lx \;;\; du = \frac{dx}{x}$

$dv = \frac{dx}{x^2} \;;\; v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{x}(1 + L\,x) + C}$

132. RESOLUCIÓN

$I = \int x \cos x\, dx = x \,\text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx = x\,\text{sen}\, x + \cos x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x \;;\; du = dx$

$dv = \cos x\, dx \;;\; v = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\,sen\,x + cos\,x + C}$

133. RESOLUCIÓN

$I = \int x\, e^{ax}\, dx = x\, \frac{e^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, dx =$

$= \frac{x\, e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{ax}}{a} + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x \;;\; du = dx$

$dv = e^{ax}\, dx \;;\; v = \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C}$

134. RESOLUCIÓN

$I = \int x^2 e^{ax}\, dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int x\, e^{ax}\, dx =$

$= \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\left(\frac{x\, e^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, dx\right) =$

$= \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\left(\frac{x\, e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\right) + C =$

$= \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x^2 \;;\; du = 2x\, dx$

$dv = e^{ax}\, dx \;;\; v = \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}$

$u = x \;;\; du = dx$

$dv = e^{ax}\, dx \;;\; v = \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C}$

135. RESOLUCIÓN

$I = \int L\, 4x\, dx = x\, L\, 4x - \int x\, \frac{dx}{x} =$

$= x\, L\, 4x - \int dx = x\, L\, 4x - x + C = x\,(L\, 4x - 1) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = L\, 4x \;;\; du = \frac{4}{4x}\, dx = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \;;\; v = x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\,(L\,4x - 1) + C}$

136. RESOLUCIÓN

$I = \int x \cos 4x\, dx = x \cdot \frac{\text{sen}\, 4x}{4} - \frac{1}{4}\int \text{sen}\, 4x\, dx =$

$= \frac{x}{4} \cdot \text{sen}\, 4x + \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 4x}{4} + C =$

$= \frac{x}{4}\,\text{sen}\, 4x + \frac{1}{4^2}\cos 4x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x \;;\; du = dx$

$dv = \cos 4x\, dx \;;\; v = \int \cos 4x\, dx = \frac{\text{sen}\, 4x}{4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{4}\,sen\,4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C}$

137. RESOLUCIÓN

$I = \int x \sec^2 3x\, dx = x \cdot \frac{\text{tg}\, 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \text{tg}\, 3x\, dx =$

$= x \cdot \frac{\text{tg}\, 3x}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\, L\,|\cos 3x| + C =$

$= \frac{x\, \text{tg}\, 3x}{3} + \frac{1}{9}\, L\,|\cos 3x| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x \;;\; du = dx$

$dv = \sec^2 3x\, dx \;;\; v = \int \sec^2 3x\, dx = \frac{\text{tg}\, 3x}{3}$

$\int \text{tg}\, 3x\, dx = \int \frac{\text{sen}\, 3x}{\cos 3x}\, dx = -\frac{1}{3}\, L\,|\cos 3x|$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x\,tg\,3x}{3} + \frac{1}{9}\, L\,|cos\,3x| + C}$

138. RESOLUCIÓN

$I = \int \text{arc}\cos x\, dx = x\, \text{arc}\cos x - \int \frac{-x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$

$= x\, \text{arc}\cos x + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x\, \text{arc}\cos x + (-\sqrt{1 - x^2}) + C =$

$= x\, \text{arc}\cos x - \sqrt{1 - x^2} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \text{arc}\cos x \;;\; du = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$dv = dx \;;\; v = x$

$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int \frac{-2x\, dx}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\,arc\cos x - \sqrt{1 - x^2} + C}$

139. RESOLUCIÓN

$I = \int \text{arc}\,\text{tg}\, x\, dx = x\, \text{arc}\,\text{tg}\, x - \int \frac{x\, dx}{1 + x^2} =$

$= x\, \text{arc}\,\text{tg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{1 + x^2} = x\, \text{arc}\,\text{tg}\, x - \frac{1}{2}\, L\,|1 + x^2| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = arc\ tg\ x\ ;\ du = \frac{dx}{1+x^2}$

$dv = dx\ ;\ v = x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2} L\,|1+x^2| + C}$

140. RESOLUCIÓN

$I = \int arc\ ctg\ 3x\ dx = x\ arc\ ctg\ 3x - \int \frac{-3x\ dx}{1+(3x)^2} =$

$= x\ arc\ ctg\ 3x + \frac{1}{6} L\,|1+(3x)^2| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = arc\ ctg\ 3x\ ;\ du = -\frac{3\ dx}{1+(3x)^2}$

$dv = dx\ ;\ v = x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\ arc\ ctg\ 3x + \frac{1}{6} L\,|1+(3x)^2| + C}$

141. RESOLUCIÓN

$I = \int x^2 Lx\ dx = \frac{x^3}{3} Lx - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} Lx - \frac{1}{3}\int x^2\ dx =$

$= \frac{x^3}{3} Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\left(Lx - \frac{1}{3}\right) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = Lx\ ;\ du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^2\ dx\ ;\ v = \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^3}{3}\left(Lx - \frac{1}{3}\right) + C}$

142. RESOLUCIÓN

$I = \int sen^2 x\ dx = \int sen\ x \cdot sen\ x\ dx = -sen\ x\ cos\ x +$

$+ \int cos^2 x\ dx = -sen\ x\ cos\ x + \int (1 - sen^2 x)\ dx =$

$= -sen\ x\ cos\ x + \int dx - \int sen^2 x\ dx = -sen\ x\ cos\ x + x - I$

$2I = -sen\ x\ cos\ x + x \Rightarrow I = \frac{1}{2}(x - sen\ x\ cos\ x) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = sen\ x\ ;\ du = cos\ x\ dx$

$dv = sen\ x\ dx\ ;\ v = \int sen\ x\ dx = -cos\ x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}(x - sen\ x\ cos\ x) + C}$

143. RESOLUCIÓN

$I = \int x^2 cos\ x\ dx = x^2 sen\ x - 2\int x\ sen\ x\ dx =$

$= x^2 sen\ x - 2\left[-x\ cos\ x + \int cos\ x\ dx\right] =$

$= x^2 sen\ x + 2x\ cos\ x - 2\int cos\ x\ dx =$

$= x^2 sen\ x + 2x\ cos\ x - 2\ sen\ x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x^2\ ;\ du = 2x\ dx$

$dv = cos\ x\ dx\ ;\ v = \int cos\ x\ dx = sen\ x$

$u = x\ ;\ du = dx$

$dv = sen\ x\ dx\ ;\ v = \int sen\ x\ dx = -cos\ x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x^2 sen\ x + 2x\ cos\ x - 2\ sen\ x + C}$

144. RESOLUCIÓN

$I = \int x\ arc\ tg\ x\ dx = \frac{x^2}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\ dx}{1+x^2} =$

$= \frac{x^2}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx =$

$= \frac{x^2}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$

$= \frac{x^2}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arc\ tg\ x + C =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) arc\ tg\ x - \frac{x}{2} + C =$

$= \frac{x^2+1}{2} \cdot arc\ tg\ x - \frac{x}{2} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = arc\ tg\ x\ ;\ du = \frac{dx}{1+x^2}$

$dv = x\ dx\ ;\ v = \int x\ dx = \frac{x^2}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2+1}{2} arc\ tg\ x - \frac{x}{2} + C}$

145. RESOLUCIÓN

$I = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x\ e^{-x} dx =$

$= -x^2 e^{-x} + 2\left[-x\ e^{-x} + \int e^{-x} dx\right] =$

$= -x^2 e^{-x} - 2x\ e^{-x} - 2\ e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x^2\ ;\ du = 2x\ dx$

$dv = e^{-x} dx\ ;\ v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

$u = x\ ;\ du = dx$

$dv = e^{-x} dx\ ;\ v = -e^{-x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C}$

146. RESOLUCIÓN

$I = \int (Lx)^2 dx = x\,(Lx)^2 - 2\int Lx\ dx = x\,(Lx)^2 - 2\left[x\ Lx - \int dx\right] =$

$= x\,(Lx)^2 - 2x\ Lx + 2x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = (Lx)^2\ ;\ du = \frac{2}{x} Lx\ dx$ $\qquad u = Lx\ ;\ du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx\ ;\ v = x$ $\qquad dv = dx\ ;\ v = x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\,(Lx)^2 - 2x\ Lx + 2x + C}$

147. RESOLUCIÓN

$I = \int x\ sen\ x\ cos\ x\ dx = \frac{1}{2}\int x \cdot 2\ sen\ x\ cos\ x\ dx =$

$= \frac{1}{2}\int x \cdot sen\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{1}{2}\int cos\ 2x\ dx\right] =$

$= -\frac{x \cdot cos\ 2x}{4} + \frac{1}{4}\int cos\ 2x\ dx = -\frac{x \cdot cos\ 2x}{4} + \frac{sen\ 2x}{8} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x\ ;\ du = dx$

$dv = sen\ 2x\ dx\ ;\ v = -\frac{cos\ 2x}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{x\ cos\ 2x}{4} + \frac{sen\ 2x}{8} + C}$

148. RESOLUCIÓN

$I = \int cos\ x \cdot L\ sen\ x\ dx = sen\ x \cdot L\ sen\ x - \int sen\ x \cdot \frac{cos\ x}{sen\ x} dx =$

$= sen\ x\ L\ sen\ x - \int cos\ x\ dx = sen\ x \cdot L\ sen\ x - sen\ x + C =$

$= sen\ x\,(L\ sen\ x - 1) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = L\ sen\ x\ ;\ du = \frac{cos\ x\ dx}{sen\ x}$

$dv = cos\ x\ dx\ ;\ v = sen\ x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = sen\ x\,(L\ sen\ x - 1) + C}$

149. RESOLUCIÓN

$I = \int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \text{sen}\, x\, dx =$

$= e^x \cos x + e^x \text{sen}\, x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \text{sen}\, x - I$

$2I = e^x (\cos x + \text{sen}\, x)$

$I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \text{sen}\, x) + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \cos x \; ; \; du = -\text{sen}\, x\, dx$

$dv = e^x\, dx \; ; \; v = \int e^x\, dx = e^x$

$u = \text{sen}\, x \; ; \; du = \cos x\, dx$

$dv = e^x\, dx \; ; \; v = e^x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \text{sen}\, x) + C}$

150. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{Lx}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} \cdot Lx - \int -\frac{dx}{x^2 + x} =$

$= -\frac{Lx}{x+1} + L \frac{x}{x+1} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = Lx \; ; \; du = \frac{dx}{x}$

$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \; ;$

$v = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int (x+1)^{-2} dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+1}$

$\int \frac{dx}{x^2 + x} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 - a^2} =$

$= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a} \right) dt = \frac{1}{2a} L \frac{t-a}{t+a} = L \frac{x}{x+1}$

$x + \frac{1}{2} = t \Rightarrow dx = dt$

$\frac{1}{2} = a$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{Lx}{x+1} + L \left| \frac{x}{x+1} \right| + C}$

151. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1 + x^2}{(x^2+1)^2} dx -$

$- \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^2} =$

$= \text{arc tg}\, x - \left[\frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \right] =$

$= \text{arc tg}\, x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x + C =$

$= \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x \; ; \; du = dx$

$dv = \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2} \; ;$

$v = \int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{t} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$

$1 + x^2 = t$

$2x\, dx = dt \; ; \; x\, dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C}$

152. RESOLUCIÓN

$I = \int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\, dx = \sec x\, \text{tg}\, x -$

$- \int \sec x \cdot \text{tg}^2 x\, dx = \sec x \cdot \text{tg}\, x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx =$

$= \sec x \cdot \text{tg}\, x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx = \sec x \cdot \text{tg}\, x - I +$

$+ L\, |\sec x + \text{tg}\, x|$

$2I = \sec x \cdot \text{tg}\, x + L\, |\sec x + \text{tg}\, x|$

$I = \frac{1}{2} [\sec x\, \text{tg}\, x + L\, |\sec x + \text{tg}\, x|] + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \sec x \; ; \; du = \sec x\, \text{tg}\, x\, dx$

$dv = \sec^2 x\, dx \; ; \; v = \int \sec^2 x\, dx = \text{tg}\, x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \text{tg}\, x + L\, |\sec x + \text{tg}\, x|] + C}$

153. RESOLUCIÓN

$I = \int (x^2 - 2x + 1)\, Lx\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) Lx -$

$- \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) Lx -$

$- \frac{1}{3} \int x^2\, dx + \int x\, dx - \int dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) Lx - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = Lx \; ; \; du = \frac{dx}{x}$

$dv = (x^2 - 2x + 1)\, dx \; ; \; v = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) Lx - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C}$

154. RESOLUCIÓN

$I = \int (3x^2 - x + 5)\, \text{sen}\, x\, dx = -(3x^2 - x + 5) \cos x +$

$+ \int (6x - 1) \cos x\, dx = -(3x^2 - x + 5) \cos x +$

$+ (6x - 1)\, \text{sen}\, x - 6 \int \text{sen}\, x\, dx =$

$= -(3x^2 - x + 5) \cos x + (6x - 1)\, \text{sen}\, x + 6 \cos x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = 3x^2 - x + 5 \; ; \; du = (6x - 1)\, dx$

$dv = \text{sen}\, x\, dx \; ; \; v = -\cos x$

$u = 6x - 1 \; ; \; du = 6\, dx$

$dv = \cos x\, dx \; ; \; v = \text{sen}\, x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -(3x^2 - x + 5) \cos x + (6x - 1)\, \text{sen}\, x + 6 \cos x + C}$

155. RESOLUCIÓN

$I = \int x^3 (Lx)^2\, dx = \frac{x^4}{4} (Lx)^2 - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{2\, Lx}{x} dx =$

$= \frac{x^4}{4} (Lx)^2 - \frac{1}{2} \int x^3 \cdot Lx\, dx = \frac{x^4}{4} (Lx)^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \cdot Lx - \right.$

$\left. - \frac{1}{4} \int x^3\, dx \right] = \frac{x^4}{4} (Lx)^2 - \frac{x^4}{8} Lx + \frac{x^4}{32} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = (Lx)^2 \; ; \; du = \frac{2\, Lx}{x} dx$

$dv = x^3\, dx \; ; \; v = \frac{x^4}{4}$

$u = Lx \; ; \; du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3\, dx \; ; \; v = \frac{x^4}{4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^4}{4}(Lx)^2 - \frac{x^4}{8}Lx + \frac{x^4}{32} + C}$

156. RESOLUCIÓN

$$I = \int L(x+1)\,dx = x\,L(x+1) - \int \frac{x\,dx}{x+1} =$$
$$= x\,L(x+1) - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$
$$= x\,L|x+1| - \int dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= x\,L|x+1| - x + L|x+1| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = L(x+1)\ ;\ du = \dfrac{dx}{x+1}$

$dv = dx\ ;\ v = \int dx = x$

$$\begin{array}{l|l} x & x+1 \\ \hline -x-1 & 1 \\ \quad -1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x\,L|x+1| - x + L|x+1| + C}$

157. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\,dx}{\mathrm{sen}^2 x} = -x\,\mathrm{ctg}\,x + \int \mathrm{ctg}\,x\,dx =$$
$$= -x\,\mathrm{ctg}\,x + \int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}dx = -x\,\mathrm{ctg}\,x + \int \frac{dt}{t} =$$
$$= -x\,\mathrm{ctg}\,x + L|t| + C = -x\,\mathrm{ctg}\,x + L|\mathrm{sen}\,x| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x\ ;\ du = dx$

$dv = \dfrac{dx}{\mathrm{sen}^2 x}\ ;\ v = \int \dfrac{dx}{\mathrm{sen}^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x$

$\mathrm{sen}\,x = t$

$\cos x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -x\,ctg\,x + L|sen\,x| + C}$

158. RESOLUCIÓN

$$I = \int \mathrm{sen}\,Lx\,dx = x\cdot\mathrm{sen}\,Lx - \int x\cdot\frac{1}{x}\cos Lx\,dx =$$
$$= x\,\mathrm{sen}\,Lx - \int \cos Lx\,dx = x\,\mathrm{sen}\,Lx -$$
$$- \left[x\cos Lx + \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{sen}\,Lx\,dx\right] =$$
$$= x\,\mathrm{sen}\,Lx - x\cos Lx - \int \mathrm{sen}\,Lx\,dx = x\,\mathrm{sen}\,Lx - x\cos Lx - I$$
$$2I = x(\mathrm{sen}\,Lx - \cos Lx)$$
$$I = \frac{x}{2}(\mathrm{sen}\,Lx - \cos Lx) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \mathrm{sen}\,Lx\ ;\ du = \dfrac{1}{x}\cos Lx\cdot dx$

$dv = dx\ ;\ v = x$

$u = \cos Lx\ ;\ du = -\dfrac{1}{x}\mathrm{sen}\,Lx\,dx$

$dv = dx\ ;\ v = x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2}(sen\,Lx - cos\,Lx) + C}$

159. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{Lx}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\cdot Lx - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx =$$
$$= 2\sqrt{x}\cdot Lx - 2\int \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\cdot Lx - 2\int \frac{x\,dx}{x\sqrt{x}} =$$
$$= 2\sqrt{x}\cdot Lx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\cdot Lx - 2\cdot 2\sqrt{x} + C =$$
$$= 2\sqrt{x}(Lx - 2) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = Lx\ ;\ du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\ ;\ v = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x}(Lx - 2) + C}$

160. RESOLUCIÓN

$$I = \int e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}dx = x\,e^{\mathrm{arc\,sen}\,x} - \int \frac{x\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= x\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}\,x} - [-\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}\,x} + \int e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}dx] =$$
$$= x\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}\,x} + \sqrt{1-x^2}\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}\,x} - \int e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}dx =$$
$$= x\,e^{\mathrm{arc\,sen}\,x} + \sqrt{1-x^2}\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}x} - I$$
$$2I = e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}(x + \sqrt{1-x^2})$$
$$I = \frac{e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}}{2}(x + \sqrt{1-x^2}) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}\ ;\ du = \dfrac{e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$dv = dx\ ;\ v = x$

$u = e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}\ ;\ du = \dfrac{e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ v = -\sqrt{1-x^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{arc\,sen\,x}}{2}(x + \sqrt{1-x^2}) + C}$

161. RESOLUCIÓN

$$I = \int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x^2 - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^4}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x^2 - \int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x^2 -$$
$$- \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{1+x^4} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x^2 - \frac{1}{4}L|1+x^4| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \mathrm{arc\,tg}\,x^2\ ;\ du = \dfrac{2x}{1+x^4}dx$

$dv = x\,dx\ ;\ v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2}{2}arc\,tg\,x^2 - \frac{1}{4}L|1 + x^4| + C}$

162. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{arc\,sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{arc\,sen}\,x + \int dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{arc\,sen}\,x + x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \mathrm{arc\,sen}\,x\ ;\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ v = -\sqrt{1-x^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\sqrt{1-x^2}\cdot arc\,sen\,x + x + C}$

163. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\,e^x\,dx}{(1+x)^2} = e^x\left[L|1+x| + \frac{1}{1+x}\right] - \int e^x\left[L|1+x| + \frac{1}{1+x}\right]dx =$$
$$= e^x\left[L|1+x| + \frac{1}{1+x}\right] - \int e^x L|1+x|\,dx - \int \frac{e^x\,dx}{1+x} =$$

$$= e^x\left[L\,|1+x| + \frac{1}{1+x}\right] - \left[e^x\,L\,|1+x|\right] + \int \frac{e^x\,dx}{1+x} - \int \frac{e^x\,dx}{1+x} =$$

$$= \frac{e^x}{1+x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = e^x$; $du = e^x\,dx$

$dv = \dfrac{x\,dx}{(1+x)^2}$;

$$v = \int \frac{x\,dx}{(1+x)^2} = \int \frac{(t-1)\,dt}{t^2} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= L\,|t| + \frac{1}{t} = L\,|1+x| + \frac{1}{1+x}$$

$1 + x = t \Rightarrow x = t - 1$

$dx = dt$

$u = L\,|1+x|$; $du = \dfrac{dx}{1+x}$

$dv = e^x\,dx$; $v = e^x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{e^x}{1+x} + C}$

164. RESOLUCIÓN

$$I = \int \text{arc cos } 2x\,dx = x \text{ arc cos } 2x - \int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= x \text{ arc cos } 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \text{arc cos } 2x$; $du = \dfrac{-2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

$dv = dx$; $v = x$

$$\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{t} = \frac{1}{2}\sqrt{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

$1 - 4x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = \dfrac{dt}{4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x \text{ arc cos } 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C}$

165. RESOLUCIÓN

$$I = \int \text{arc tg } \sqrt{x}\,dx = \int \text{arc tg } t \cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int t \text{ arc tg } t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\text{arc tg } t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{1+t^2}\right] =$$

$$= t^2 \text{ arc tg } t - \int \frac{t^2\,dt}{1+t^2} = t^2 \text{ arc tg } t - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= t^2 \text{ arc tg } t - \int \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt + \int \frac{dt}{1+t^2} = t^2 \text{ arc tg } t - \int dt +$$

$$+ \int \frac{dt}{1+t^2} = t^2 \text{ arc tg } t - t + \text{arc tg } t + C =$$

$$= (t^2+1) \text{ arc tg } t - t + C = (x+1) \text{ arc tg } \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = t^2$; $dx = 2t\,dt$

$u = \text{arc tg } t$; $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$dv = t\,dt$; $v = \displaystyle\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = (x+1) \text{ arc tg } \sqrt{x} - \sqrt{x} + C}$

166. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{L\,(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\cdot L\,(x+1) - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\cdot L\,(x+1) - 2\int \frac{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\cdot L\,(x+1) - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\cdot L\,(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = L\,(x+1)$; $du = \dfrac{dx}{x+1}$

$dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}$; $v = \displaystyle\int \frac{2\,dx}{2\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x+1}\,[L\,(x+1) - 2] + C}$

167. RESOLUCIÓN

$$I = \int x^2 \cdot \text{arc sen } x\,dx = \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x - \frac{1}{3}\int \frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x - \frac{1}{3}\int \frac{(1-t^2)\,(-t)\,dt}{t} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \frac{1}{3}\int (1-t^2)\,dt =$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \frac{1}{3}\int dt - \frac{1}{3}\int t^2\,dt =$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{9} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = \text{arc sen } x$; $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv = x^2\,dx$; $v = \displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

$1 - x^2 = t^2 \Rightarrow x^2 = 1 - t^2$

$2x\,dx = -2t\,dt$

$x\,dx = -t\,dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{x^3}{3} \text{ arc sen } x + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \dfrac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{9} + C}$

168. RESOLUCIÓN

$$I = \int x\,[L\,(1+x^2) + e^{-x}]\,dx = \int x\,L\,(1+x^2)\,dx + \int x\,e^{-x}\,dx =$$

$$= I_1 + I_2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2+1}{2}L\,(1+x^2) - e^{-x}(x+1) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = L\,(1+x^2)$; $du = \dfrac{2x\,dx}{1+x^2}$

$dv = x\,dx$; $v = \displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$u = x$; $du = dx$

$dv = e^{-x}\,dx$; $v = -e^{-x}$

$$I_1 = \int x\,L\,(1+x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}L\,(1+x^2) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}L\,(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}L\,(1+x^2) -$$

$$- \int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}L\,(1+x^2) - \int x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}L\,(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}L\,(1+x^2) + C_1$$

$$I_2 = \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C_2 =$$

$$= -e^{-x}(x+1) + C_2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2+1}{2} L(1+x^2) - e^{-x}(x+1) + C}$

169. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2} L|x-1| - \frac{1}{2} L|x+1| + C = L\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right| + C$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + A - B$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = A - B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \; ; \; B = -\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right| + C}$

170. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^2-x-2} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{2}{3} L|x-2| + \frac{1}{3} L|x+1| + C =$$

$$= L\left|\sqrt[3]{(x-2)^2}\right| + L\left|\sqrt[3]{x+1}\right| + C =$$

$$= L\left|\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -1$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$$\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$x = A(x+1) + B(x-2)$

para $x = 2 \Rightarrow 2 = 3A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

para $x = -1 \Rightarrow -1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}\right| + C}$

171. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{6} L|x-3| - \frac{1}{6} L|x+3| + C = L\left|\sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}}\right| + C$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$1 = A(x+3) + B(x-3)$

para $x = 3 \Rightarrow 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

para $x = -3 \Rightarrow 1 = -6B \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}}\right| + C}$

172. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{2} L|x| - L|x-1| + \frac{1}{2} L|x-2| + C = L\left|\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1}\right| + C$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$

para $x = 0 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

para $x = 1 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$

para $x = 2 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1}\right| + C}$

173. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{x^2-x-2} = \int \left(x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx + \int dx + \int \frac{3x+2}{x^2-x-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x +$$

$$+ \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} L|x-2| +$$

$$+ \frac{1}{3} L|x-1| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2 - x - 2 \\ \hline -x^3 + x^2 + 2x & x + 1 \\ \quad x^2 + 2x & \\ \quad -x^2 + x + 2 & \\ \hline \qquad 3x + 2 & \end{array}$$

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$3x + 2 = A(x+1) + B(x-2)$

$3x + 2 = (A+B)x + A - 2B$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = A + B \\ 2 = A - 2B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{8}{3} \; ; \; B = \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} L|x-2| + \frac{1}{3} L|x-1| + C}$

174. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= L|x| + L|x-2| - 2L|x+1| + C = L\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x = 0$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \; ; \; x = -1$

$x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$4x - 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$

para $x = 0 \Rightarrow -2 = -2A \Rightarrow A = 1$

para $x = -1 \Rightarrow -6 = 3C \Rightarrow C = -2$

para $x = 2 \Rightarrow 6 = 6B \Rightarrow B = 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + C}$

175. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(5x^2-3)\,dx}{x^3-x} = 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= 3L|x| + L|x+1| + L|x-1| + C = L|x^3(x^2-1)| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \;;\; x = 1$

$x^3 - x = x(x+1)(x-1)$

$$\frac{5x^2 - 3}{x^3 - x} = \frac{5x^2 - 3}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$5x^2 - 3 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$

para $x = 0 \Rightarrow -3 = -A \Rightarrow A = 3$

para $x = -1 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1$

para $x = 1 \Rightarrow 2 = 2C \Rightarrow C = 1$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = L\,|x^3(x^2 - 1)| + C}}$

176. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(4x^3 + 2x^2 + 1)}{4x^3 - x}\,dx = \int \left(1 + \frac{2x^2 + x + 1}{4x^3 - x}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{2x^2 + x + 1}{4x^3 - x}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{2x+1} +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{2x-1} = x - L\,|x| + \frac{1}{2}L\,|2x+1| + L\,|2x-1| + C =$$

$$= x + L\left|\frac{(2x-1)\sqrt{2x+1}}{x}\right| + C$$

$$\frac{2x^2 + x + 1}{4x^3 - x} = \frac{2x^2 + x + 1}{x(4x^2 - 1)} = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)(2x-1)} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}$$

$2x^2 + x + 1 = A(2x+1)(2x-1) + Bx(2x-1) + Cx(2x+1)$

$2x^2 + x + 1 = (4A + 2B + 2C)x^2 + (-B + C)x - A$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = 4A + 2B + 2C \\ 1 = -B + C \\ 1 = -A \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1 \;;\; B = 1 \;;\; C = 2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{ll} \;\;\,4x^3 + 2x^2 \quad\; + 1 & \underline{|4x^3 - x} \\ \underline{-4x^3 \qquad\quad + x} & \;1 \\ \qquad\;\; 2x^2 + x + 1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = x + L\left|\frac{(2x-1)\sqrt{2x+1}}{x}\right| + C}}$

177. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(3x^2 + 5x)}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= 2\,L\,|x-1| - \frac{1}{x+1} + L\,|x+1| + C = -\frac{1}{x+1} +$$

$$+ L\,|(x-1)^2(x+1)| + C$$

$$\frac{3x^2 + 5x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$3x^2 + 5x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)$

$3x^2 + 5x = (A + C)x^2 + (2A + B)x + (A - B - C)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = A + C \\ 5 = 2A + B \\ 0 = A - B - C \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2 \;;\; B = 1 \;;\; C = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\frac{1}{x+1} + L\,|(x-1)^2(x+1)| + C}}$

178. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^3} = \int \frac{dx}{(x+1)^3} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + L\,|x+1| + C$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$x^2 = A + B(x+1) + C(x+1)^2$

$x^2 = Cx^2 + (B + 2C)x + A + B + C$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = C \\ 0 = B + 2C \\ 0 = A + B + C \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \;;\; B = -2 \;;\; C = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + L\,|x+1| + C}}$

179. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+x} +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1-x} = -\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{4}L\,|1+x| -$$

$$- \frac{1}{4}L\,|1-x| + C = -\frac{1}{2(1+x)} + L\left|\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{1}{(1+x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1+x)(1+x)(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x}$$

$1 = A(1-x) + B(1+x)(1-x) + C(1+x)^2$

$1 = (-B + C)x^2 + (-A + 2C)x + A + B + C$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -B + C \\ 0 = -A + 2C \\ 1 = A + B + C \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \;;\; B = \frac{1}{4} \;;\; C = \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = -\frac{1}{2(1+x)} + L\left|\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}\right| + C}}$

180. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(2x+3)}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} -$$

$$- \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{3}{2}L\,|x| + \frac{5}{3}L\,|x-1| - \frac{1}{6}L\,|x+2| + C =$$

$$= L\left|\frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}\cdot(x+2)^{1/6}}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$2x + 3 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$

para $x = 0 \Rightarrow 3 = -2A \;;\; A = -\frac{3}{2}$

para $x = 1 \Rightarrow 5 = 3B \;;\; B = \frac{5}{3}$

para $x = -2 \Rightarrow -1 = 6C \;;\; C = -\frac{1}{6}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{I = L\left|\frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}\right| + C}}$

181. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x^3 + 1)\,dx}{x(x-1)^3} = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{x-1} = -L|x| + \frac{2(x-1)^{-2}}{-2} + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} +$$

$$+ 2\,L\,|x-1| + C = -L|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} +$$

$$+ L\,|(x-1)^2| + C = L\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$$

para $x = 0 \Rightarrow A = -1$

para $x = 1 \Rightarrow B = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{para } x = 2 \Rightarrow 9 = 3 + 2C + 2D \\ \text{para } x = -1 \Rightarrow 0 = 6 + 2C - 4D\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = 1 \\ D = 2\end{array}$$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = L\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| - \frac{x}{(x-1)^2} + C}$$

182. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{x^2\,dx}{(x-1)^3} = \int\frac{dx}{(x-1)^3} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \int\frac{dx}{x-1} =$$

$$= \int(x-1)^{-3}\,dx + 2\int(x-1)^{-2}\,dx + \int\frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + L|x-1| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$x^2 = A + B(x-1) + C(x-1)^2$$

$$x^2 = Cx^2 + (B-2C)x + A - B + C$$

$$\left.\begin{array}{l}1 = C\\ 0 = B - 2C\\ 0 = A - B + C\end{array}\right\} \Rightarrow A = 1\ ;\ B = 2\ ;\ C = 1$$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + L|x-1| + C}$$

183. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{(x^4-8)\,dx}{x^3+2x^2} = \int\left(x - 2 + \frac{4x^2-8}{x^3+2x^2}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx - 2\int dx - 4\int\frac{dx}{x^2} + 2\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{x} + 2L|x| + 2L|x+2| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{x} + L|x^2(x+2)^2| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{array}{l|l} x^4 \qquad\qquad -8 & x^3+2x^2 \\ \cline{2-2} -x^4-2x^3 & x-2 \\ \hline -2x^3 & \\ \;\;2x^3+4x^2 & \\ \hline \;\;4x^2-8 & \end{array}$$

$$\frac{4x^2-8}{x^3+2x^2} = \frac{4x^2-8}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}$$

$$4x^2 - 8 = A(x+2) + Bx(x+2) + Cx^2$$

$$4x^2 - 8 = (B+C)x^2 + (A+2B)x + 2A$$

$$\left.\begin{array}{l}4 = B + C\\ 0 = A + 2B\\ -8 = 2A\end{array}\right\} \Rightarrow A = -4\ ;\ B = 2\ ;\ C = 2$$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{x} + L|x^2(x+2)^2| + C}$$

184. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{8\,dx}{x^3-4x} = -2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x+2} + \int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= -2L|x| + L|x+2| + L|x-2| + C =$$

$$= L\left|\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}\right| + C = L\left|\frac{x^2-4}{x^2}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{8}{x^3-4x} = \frac{8}{x(x^2-4)} = \frac{8}{x(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$8 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)$$

para $x = 0 \Rightarrow 8 = -4A \Rightarrow A = -2$

para $x = -2 \Rightarrow 8 = 8B \Rightarrow B = 1$

para $x = 2 \Rightarrow 8 = 8C \Rightarrow C = 1$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = L\left|\frac{x^2-4}{x^2}\right| + C}$$

185. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{(3x^2+11x+2)}{(x+3)(x^2-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} +$$

$$+ 2\int\frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}L|x+3| + \frac{3}{2}L|x+1| + 2L|x-1| + C =$$

$$= L\left|\frac{\sqrt{(x+1)^3}\cdot(x-1)^2}{\sqrt{x+3}}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{3x^2+11x+2}{(x+3)(x^2-1)} = \frac{3x^2+11x+2}{(x+3)(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$3x^2 + 11x + 2 = A(x+1)(x-1) + B(x+3)(x-1) +$$

$$+ C(x+3)(x+1)$$

para $x = -3 \Rightarrow -4 = 8A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

para $x = -1 \Rightarrow -6 = -4B \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

para $x = 1 \Rightarrow 16 = 8C \Rightarrow C = 2$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = L\left|\frac{(x-1)^2\cdot\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{x+3}}\right| + C}$$

186. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{dx}{x^2+4x+5} = \int\frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x+2) + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$x^2 + 4x + 5 = 0\ ;\ x_1 = -2 + i\ ;\ x_2 = -2 - i$$

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2 - i)(x + 2 + i) =$$

$$= [(x+2) - i][(x+2) + i] = (x+2)^2 - i^2 = (x+2)^2 + 1$$

SOLUCIÓN: $$\mathbf{I = \operatorname{arc\,tg}(x+2) + C}$$

187. RESOLUCIÓN

$$I = \int\frac{4x-5}{x^2-4x+20}\,dx = \int\frac{4x-5+8-8}{(x-2)^2+4^2}\,dx =$$

$$= \int\frac{4(x-2)\,dx}{(x-2)^2+4} + 3\int\frac{dx}{(x-2)^2+4^2} =$$

$$= 2\int\frac{2(x-2)\,dx}{(x-2)^2+4^2} + 3\int\frac{dx}{(x-2)^2+4^2} =$$

$$= 2\int\frac{dt}{t} + 3\int\frac{4\,dz}{4^2z^2+4^2} = 2L|t| + \frac{3}{4}\int\frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= 2L|t| + \frac{3}{4}\operatorname{arc\,tg} z + C =$$

$$= 2L|(x-2)^2+4^2| + \frac{3}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{4} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$x^2 - 4x + 20 = (x-2)^2 + 4^2$$

$(x-2)^2 + 4^2 = t \qquad x - 2 = 4z\ ;\ z = \frac{x-2}{4}$

$2(x-2)\,dx = dt \qquad dx = 4\,dz$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2L\,|(x-2)^2 + 4^2| + \frac{3}{4}\,arc\,tg\,\frac{x-2}{4} + C}$

188. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x\,(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = L\,|x| - \frac{1}{2} L\,|1+x^2| + C =$$

$$= L\,\left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{1}{x\,(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} =$$

$$= \frac{A\,(1+x^2) + (Bx+C)\,x}{x\,(1+x^2)}$$

$$1 = A\,(1+x^2) + (Bx+C)\,x = (A+B)\,x^2 + Cx + A$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A+B \\ 0 = C \\ 1 = A \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \;;\; B = -1 \;;\; C = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C}$

189. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\frac{(x-1)^2}{2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\,arc\,tg\,t + C = \frac{\sqrt{2}}{6}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2}} = dt \;;\; dx = \sqrt{2}\,dt$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{2}}{6}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C}$

190. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{4\,dx}{x^3 + 4x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+4} =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+4} = L\,|x| - \frac{1}{2} L\,|x^2+4| + C =$$

$$= L\,\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{4}{x^3+4x} = \frac{4}{x\,(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$4 = A\,(x^2+4) + (Bx+C)\,x$$

$$4 = (A+B)\,x^2 + Cx + 4A$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A+B \\ 0 = C \\ 4 = 4A \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \;;\; B = -1 \;;\; C = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right| + C}$

191. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(4x^2+6)\,dx}{x^3+3x} = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{x^2+3} =$$

$$= 2\,Lx + L\,|x^2+3| + C = L\,|x^2\,(x^2+3)| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{4x^2+6}{x\,(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$4x^2 + 6 = A\,(x^2+3) + (Bx+C)\,x$$

$$4x^2 + 6 = (A+B)\,x^2 + Cx + 3A$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = A+B \\ 0 = C \\ 6 = 3A \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2 \;;\; B = 2 \;;\; C = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|x^2\,(x^2+3)| + C}$

192. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x^2+x)\,dx}{(x-1)\,(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= L\,|x-1| + arc\,tg\,x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{x^2+x}{(x-1)\,(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A\,(x^2+1) + (Bx+C)\,(x-1)}{(x-1)\,(x^2+1)}$$

$$x^2 + x = A\,(x^2+1) + (Bx+C)\,(x-1)$$

$$x^2 + x = (A+B)\,x^2 + (C-B)\,x + A - C$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = A+B \\ 1 = C-B \\ 0 = A-C \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \;;\; B = 0 \;;\; C = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,|x-1| + arc\,tg\,x + C}$

193. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x-18)\,dx}{4x^3+9x} = -2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(8x+1)\,dx}{4x^2+9} =$$

$$= -2\,L\,|x| + \int \frac{8x\,dx}{4x^2+9} + \int \frac{dx}{4x^2+9} =$$

$$= -2\,L\,|x| + L\,|4x^2+9| + \int \frac{\frac{dx}{9}}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 1} = -2\,L\,|x| +$$

$$+ L\,|4x^2+9| + \frac{1}{6}\,arc\,tg\,\frac{2x}{3} + C =$$

$$= L\,\left|\frac{4x^2+9}{x^2}\right| + \frac{1}{6}\,arc\,tg\,\frac{2x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{x-18}{4x^3+9x} = \frac{x-18}{x\,(4x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{4x^2+9}$$

$$x - 18 = A\,(4x^2+9) + (Bx+C)\,x$$

$$x - 18 = (4A+B)\,x^2 + Cx + 9A$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 4A+B \\ 1 = C \\ -18 = 9A \end{array}\right\} \Rightarrow A = -2 \;;\; C = 1 \;;\; B = 8$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,\left|\frac{4x^2+9}{x^2}\right| + \frac{1}{6}\,arc\,tg\,\frac{2x}{3} + C}$

194. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}\,dx = 2\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^3} +$$

$$+ 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{-2}{3\,(x-1)^3} - \frac{3}{2\,(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + L\,|x-1| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4}=\frac{A}{(x-1)^4}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

$$x^3+1=A+B(x-1)+C(x-1)^2+D(x-1)^3$$

$$x^3+1=Dx^3+(C-3D)x^2+(B-2C+3D)x+A-B+C-D$$

$$\left.\begin{matrix}1=D\\0=C-3D\\0=B-2C+3D\\1=A-B+C-D\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}A=2\\B=3\\C=3\\D=1\end{matrix}\right.$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+L|x-1|+C}$

195. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{x^4-13x^2+36}=-\frac{1}{30}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{30}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{30}L|x+3|+\frac{1}{30}L|x-3|+\frac{1}{20}L|x+2|-\frac{1}{20}L|x-2|+C=\frac{1}{30}L\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+\frac{1}{20}L\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{1}{x^4-13x^2+36}=\frac{1}{(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2}$$

$$1=A(x-3)(x+2)(x-2)+B(x+3)(x+2)(x-2)+C(x+3)(x-3)(x-2)+D(x+3)(x-3)(x+2)$$

para $x=-3\Rightarrow 1=-30A\Rightarrow A=-\frac{1}{30}$

para $x=3\Rightarrow 1=30B\Rightarrow B=\frac{1}{30}$

para $x=-2\Rightarrow 1=20C\Rightarrow C=\frac{1}{20}$

para $x=2\Rightarrow 1=-20D\Rightarrow D=-\frac{1}{20}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{1}{30}L\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+\frac{1}{20}L\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C}$

196. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=2L|x-1|+L|x^2+x+1|+C=L|(x-1)^2(x^2+x+1)|+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{4x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$4x^2+x+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$4x^2+x+1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C$$

$$\left.\begin{matrix}4=A+B\\1=A-B+C\\1=A-C\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\B=2\\C=1\end{matrix}$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=L|(x-1)^2(x^2+x+1)|+C}$

197. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}L|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}L|x+1|-$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}L|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}L|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-4+3-3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}L|x+1|-$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{-3\,dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}L|x+1|-$$

$$-\frac{1}{6}L|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}L|x+1|-$$

$$-\frac{1}{6}L|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}L|x+1|-\frac{1}{6}L|x^2-x+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{arc tg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{1}{3}L|x+1|-$$

$$-\frac{1}{6}L|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arc tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\\C=\frac{2}{3}\end{matrix}\right.$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I=\frac{1}{3}L|x+1|-\frac{1}{6}L|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arc tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C}$

198. RESOLUCIÓN

$$I=\int\frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{\left(-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}\right)dx}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|+\int\frac{\left(\frac{4-x}{12}\right)dx}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|+\frac{1}{12}\int\frac{4-x}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{12}\int\frac{(x-4)\,dx}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-8}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}\left[\int\frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+4}-6\int\frac{dx}{x^2-2x+4}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}\left[L|x^2-2x+4|-6\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}L|x^2-2x+4|+\frac{6}{24}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}L|x^2-2x+4|+\frac{1}{4}\int\frac{\frac{dx}{3}}{\frac{(x-1)^2}{3}+1}=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}L|x^2-2x+4|+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{12}L|x+2|-\frac{1}{24}L|x^2-2x+4|+\frac{\sqrt{3}}{12}\text{arc tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$1=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$$

$$1=(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+4A+2C$$

$$\left.\begin{array}{l}0 = A + B \\ 0 = -2A + 2B + C \\ 1 = 4A + 2C\end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{12} \;;\; B = -\frac{1}{12} \;;\; C = \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN:
$$\mathbf{I = \frac{1}{12} L\,|x+2| - \frac{1}{24} L\,|x^2 - 2x + 4| + \frac{\sqrt{3}}{12} arc\,tg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C}$$

199. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{sen\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= L\,|t| + C = L\,\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$tg\,\frac{x}{2} = t \;;\; sen\,x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = arc\,tg\,t$$

$$x = 2\,arc\,tg\,t$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

SOLUCIÓN:
$$\mathbf{I = L\,\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C}$$

200. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{cos\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} =$$

$$= L\,|1+t| - L\,|1-t| + C = L\,\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= L\,\left|\frac{1 + tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg\,\frac{x}{2}}\right| + C$$

CALCULOS AUXILIARES

$$\int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = L\,|1+t| - L\,|1-t| =$$

$$= L\,\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A\,(1-t) + B\,(1+t)}{1-t^2}$$

$$2 = A\,(1-t) + B\,(1+t) = (-A+B)\,t + A + B$$

$$\left.\begin{array}{l}0 = -A + B \\ 2 = A + B\end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \;;\; B = 1$$

$$tg\,\frac{x}{2} = t \;;\; dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \;;\; cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

SOLUCIÓN:
$$\mathbf{I = L\,\left|\frac{1 + tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg\,\frac{x}{2}}\right| + C}$$

201. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{1 + sen\,x + cos\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1 + t^2 + 2t + 1 - t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= L\,|1+t| + C = L\,\left|1 + tg\,\frac{x}{2}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$tg\,\frac{x}{2} = t \;;\; sen\,x = \frac{2t}{1+t^2} \;;\; cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = arc\,tg\,t \;;\; x = 2\,arc\,tg\,t$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

SOLUCIÓN:
$$\mathbf{I = L\,\left|1 + tg\,\frac{x}{2}\right| + C}$$

202. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{5 + 4\,cos\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5 + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{5 + 5t^2 + 4 - 4t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{t^2+9} = 2\int \frac{3\,dz}{(3z)^2 + 9} =$$

$$= \frac{6}{9}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{3}\,arc\,tg\,z + C = \frac{2}{3}\,arc\,tg\,\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\,arc\,tg\,\frac{tg\,\frac{x}{2}}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$tg\,\frac{x}{2} = t \;;\; \frac{x}{2} = arc\,tg\,t$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = 3z \;;\; z = \frac{t}{3}$$

$$dt = 3\,dz$$

SOLUCIÓN:
$$\mathbf{I = \frac{2}{3}\,arc\,tg\,\frac{tg\,\frac{x}{2}}{3} + C}$$

203. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{sen^3\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2\,t}{1+t^2}\right)^3} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{8\,t^3}{(1+t^2)^3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1 + 2t^2 + t^4}{t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2t^2} + 2\,L|t| + \frac{t^2}{2}\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{8\,tg^2\,\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\,L\,\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + \frac{tg^2\,\frac{x}{2}}{8} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$tg\,\frac{x}{2} = t \;;\; sen\,x = \frac{2\,t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\dfrac{1}{8\,tg^2 \dfrac{x}{2}} + \dfrac{1}{2} L \left|tg \dfrac{x}{2}\right| + \dfrac{tg^2 \dfrac{x}{2}}{8} + C}$

204. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{sen\,x + tg\,x} = \int \frac{dx}{sen\,x + \dfrac{sen\,x}{cos\,x}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\dfrac{sen\,x\,cos\,x + sen\,x}{cos\,x}} = \int \frac{cos\,x\,dx}{sen\,x\,(1 + cos\,x)} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{2t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{1}{2} L\,|t| - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} L \left|tg \frac{x}{2}\right| - \frac{tg^2 \dfrac{x}{2}}{4} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$tg \dfrac{x}{2} = t$

$x = 2\,arc\,tg\,t$

$dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

$sen\,x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$cos\,x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{1}{2} L \left|tg \dfrac{x}{2}\right| - \dfrac{1}{4} tg^2 \dfrac{x}{2} + C}$

205. RESOLUCIÓN

$$I = \int sen^3 x\,dx = \int sen^2 x \cdot sen\,x\,dx = \int (1 - cos^2 x)\,sen\,x\,dx =$$

$$= -\int (1 - t^2)\,dt = -\int dt + \int t^2\,dt = -t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$cos\,x = t$

$-sen\,x\,dx = dt$

$sen\,x\,dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -cos\,x + \dfrac{cos^3 x}{3} + C}$

206. RESOLUCIÓN

$$I = \int cos^3 x\,dx = \int cos^2 x \cdot cos\,x\,dx = \int (1 - sen^2 x)\,cos\,x\,dx =$$

$$= \int (1 - t^2)\,dt = \int dt - \int t^2\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\,x = t$

$cos\,x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = sen\,x - \dfrac{sen^3 x}{3} + C}$

207. RESOLUCIÓN

$$I = \int sen^5 x\,dx = \int sen^4 x \cdot sen\,x\,dx = \int (1 - cos^2 x)^2\,sen\,x\,dx =$$

$$= -\int (1 - t^2)^2\,dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = -\int dt + 2\int t^2\,dt -$$

$$- \int t^4\,dt = -t + 2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -cos\,x + \frac{2\,cos^3 x}{3} - \frac{cos^5 x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$cos\,x = t$

$-sen\,x\,dx = dt$

$sen\,x\,dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -cos\,x + \dfrac{2\,cos^3 x}{3} - \dfrac{cos^5 x}{5} + C}$

208. RESOLUCIÓN

$$I = \int cos^5 x\,dx = \int cos^4 x \cdot cos\,x\,dx = \int (1 - sen^2 x)^2\,cos\,x\,dx =$$

$$= \int (1 - t^2)^2\,dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt =$$

$$= \int dt - 2\int t^2\,dt + \int t^4\,dt =$$

$$= t - 2 \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = sen\,x - \frac{2\,sen^3 x}{3} + \frac{sen^5 x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\,x = t$

$cos\,x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = sen\,x - \dfrac{2\,sen^3 x}{3} + \dfrac{sen^5 x}{5} + C}$

209. RESOLUCIÓN

$$I = \int sen^4 x \cdot cos\,x\,dx = \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{sen^5 x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\,x = t$

$cos\,x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{sen^5 x}{5} + C}$

210. RESOLUCIÓN

$$I = \int cos^2 x \cdot sen^3 x\,dx = \int cos^2 x \cdot sen^2 x \cdot sen\,x\,dx =$$

$$= \int cos^2 x\,(1 - cos^2 x)\,sen\,x\,dx = -\int t^2\,(1 - t^2)\,dt =$$

$$= -\int t^2\,dt + \int t^4\,dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$cos\,x = t$

$-sen\,x\,dx = dt$

$sen\,x\,dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\dfrac{cos^3 x}{3} + \dfrac{cos^5 x}{5} + C}$

211. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{sen^3 x}{cos^2 x}\,dx = \int \frac{sen^2 x \cdot sen\,x}{cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{(1 - cos^2 x)\,sen\,x}{cos^2 x}\,dx = -\int \frac{(1 - t^2)\,dt}{t^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{cos\,x} + cos\,x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\cos x = t$

$-\operatorname{sen} x\, dx = dt$

$\operatorname{sen} x\, dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C}$

212. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{(1 - t^2)\, dt}{t^2} = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt =$$

$$= -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{sen} x = t$

$\cos x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x + C}$

213. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^3 x\, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx = \int \sqrt{t}\,(1 - t^2)\, dt =$$

$$= \int \sqrt{t}\, dt - \int \sqrt{t} \cdot t^2\, dt = \int t^{1/2}\, dt - \int t^{5/2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{7} t^{7/2} + C = \frac{2 \operatorname{sen}^{3/2} x}{3} - \frac{2 \operatorname{sen}^{7/2} x}{7} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{sen} x = t$

$\cos x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2 \operatorname{sen}^{3/2} x}{3} - \frac{2 \operatorname{sen}^{7/2} x}{7} + C}$

214. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} dx =$$

$$= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{(1 - t^2)}{t} dt = -\int \frac{dt}{t} +$$

$$+ \int t\, dt = -L\,|t| + \frac{t^2}{2} + C = -L\,|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\cos x = t$

$-\operatorname{sen} x\, dx = dt$

$\operatorname{sen} x\, dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -L\,|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C}$

215. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}\, dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{sen} x = t$

$\cos x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} + C}$

216. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx =$$

$$= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x\, dx = \int (1 + t^2)\, dt = \int dt + \int t^2\, dt =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$\operatorname{tg} x = t$

$\sec^2 x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C}$

217. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \operatorname{cosec}^4 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\, dx =$$

$$= \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\int (1 + t^2)\, dt = -\int dt - \int t^2 dt =$$

$$= -t - \frac{t^3}{3} + C = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{ctg} x = t$

$-\operatorname{cosec}^2 x\, dx = dt$

$\operatorname{cosec}^2 x\, dx = -dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C}$

218. RESOLUCIÓN

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen}^3 x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx = \int t^3 (1 - t^2)\, dt = \int t^3 dt - \int t^5 dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{sen} x = t$

$\cos x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C}$

219. RESOLUCIÓN

$$I = \int \cos^4 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C}$

220. RESOLUCIÓN

$$I = \int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \operatorname{tg} x\,(\sec^2 x - 1)\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx = \int t\, dt - \int \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \frac{t^2}{2} + L\,|\cos x| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + L\,|\cos x| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\operatorname{tg} x = t$

$\sec^2 x\, dx = dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + L\,|\cos x| + C}$

221. RESOLUCIÓN

$I = \int ctg^3 \frac{x}{3}\, dx = \int ctg \frac{x}{3} \cdot ctg^2 \frac{x}{3}\, dx =$

$= \int ctg \frac{x}{3}\left(cosec^2 \frac{x}{3} - 1\right)dx = \int ctg \frac{x}{3} \cdot cosec^2 \frac{x}{3}\, dx -$

$- \int ctg \frac{x}{3}\, dx = -3\int t\, dt - \int ctg \frac{x}{3}\, dx = -3 \cdot \frac{t^2}{2} -$

$- 3\,L\left|sen \frac{x}{3}\right| + C = -\frac{3\,ctg^2 \frac{x}{3}}{2} - 3\,L\left|sen \frac{x}{3}\right| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$ctg \frac{x}{3} = t$

$-\frac{1}{3}\, cosec^2 \frac{x}{3}\, dx = dt$

$cosec^2 \frac{x}{3}\, dx = -3\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{3\,ctg^2 \frac{x}{3}}{2} - 3\,L\left|sen \frac{x}{3}\right| + C}$

222. RESOLUCIÓN

$I = \int sec^4 2x\, dx = \int sec^2 2x \cdot sec^2 2x\, dx =$

$= \int (1 + tg^2 2x)\, sec^2 2x\, dx = \int sec^2 2x\, dx + \int tg^2 2x \cdot sec^2 2x\, dx =$

$= \frac{1}{2} tg\, 2x + \int t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} tg\, 2x + \frac{t^3}{6} + C$

$= \frac{tg\, 2x}{2} + \frac{tg^3\, 2x}{6} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$tg\, 2x = t$

$2\, sec^2 2x\, dx = dt$

$sec^2 2x\, dx = \frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{tg\, 2x}{2} + \frac{tg^3\, 2x}{6} + C}$

223. RESOLUCIÓN

$I = \int sen\, 3x \cdot sen\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (cos\, x - cos\, 5x)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\int cos\, x\, dx - \frac{1}{2}\int cos\, 5x\, dx = \frac{1}{2} sen\, x -$

$- \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\, 5x}{5} + C = \frac{sen\, x}{2} - \frac{sen\, 5x}{10} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\, a \cdot sen\, b = \frac{1}{2}\, [cos\,(a - b) - cos\,(a + b)]$

$a = 3x \;;\; b = 2x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{sen\, x}{2} - \frac{sen\, 5x}{10} + C}$

224. RESOLUCIÓN

$I = \int sen\, 4x \cdot cos\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (sen\, 6x + sen\, 2x)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\int sen\, 6x\, dx + \frac{1}{2}\int sen\, 2x\, dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-cos\, 6x}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-cos\, 2x}{2} + C$

$= -\frac{cos\, 6x}{12} - \frac{cos\, 2x}{4} + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\, a \cdot cos\, b = \frac{1}{2}\, [sen\,(a + b) + sen\,(a - b)]$

$a = 4x \;;\; b = 2x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -\frac{cos\, 6x}{12} - \frac{cos\, 2x}{4} + C}$

225. RESOLUCIÓN

$I = \int cos\, 4x \cdot cos\, 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (cos\, 7x + cos\, x)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\int cos\, 7x\, dx + \frac{1}{2}\int cos\, x\, dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\, 7x}{7} + \frac{1}{2} \cdot sen\, x + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

$cos\, a \cdot cos\, b = \frac{1}{2}\, [cos\,(a + b) + cos\,(a - b)]$

$a = 4x \;;\; b = 3x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{sen\, 7x}{14} + \frac{sen\, x}{2} + C}$

226. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5\, dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t + 1}\, dt =$

$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1 + t}\right)dt = 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - L\,|1 + t|\right] + C =$

$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\,L\,|1 + t| + C =$

$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,L\,|1 + \sqrt[6]{x}| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

m.c.m. $(2, 3) = 6$

$x = t^6 \;;\; dx = 6t^5\, dt$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t + 1 \\ \cline{2-2} -t^3 - t^2 & t^2 - t + 1 \\ \hline \quad -t^2 & \\ \quad t^2 + t & \\ \hline \qquad t & \\ \qquad -t - 1 & \\ \hline \qquad\; -1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6L\,|1 + \sqrt[6]{x}| + C}$

227. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}} = \int \frac{4t^3\, dt}{t^3 - t^2} = 4\int \frac{t}{t - 1}\, dt =$

$= 4\int \left(1 + \frac{1}{t - 1}\right)dt = 4\,[t + L\,|t - 1|] + C =$

$= 4t + 4\,L\,|t - 1| + C = 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} - 1| + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

m.c.m. $(4, 2) = 4$

$x = t^4 \;;\; dx = 4t^3\, dt$

$$\begin{array}{l|l} t & t - 1 \\ \cline{2-2} -t + 1 & 1 \\ \hline \quad 1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 4\sqrt[4]{x} + 4L\,|\sqrt[4]{x} - 1| + C}$

228. RESOLUCIÓN

$I = \int \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}}\, dx = \int \frac{t}{1 + t^2} \cdot 4t^3\, dt = 4\int \frac{t^4}{1 + t^2}\, dt =$

$= 4\int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}\right)dt = 4\left[\frac{t^3}{3} - t + arc\, tg\, t\right] + C =$

$= 4\left[\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \sqrt[4]{x} + arc\, tg\, \sqrt[4]{x}\right] + C$

CÁLCULOS AUXILIARES

m.c.m. $(4, 2) = 4$

$x = t^4 \;;\; dx = 4t^3\, dt$

$$\begin{array}{l|l} t^4 & t^2 + 1 \\ \cline{2-2} -t^4 - t^2 & t^2 - 1 \\ \hline \quad -t^2 & \\ \quad t^2 + 1 & \\ \hline \qquad 1 & \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 4\left[\ \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3}\ \ \sqrt[4]{x} + arc\ tg\ \sqrt[4]{x}\right] + C}$

229. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1}\, dx = \int \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \cdot 6t^5\, dt = 6\int \frac{t^8 - t^6}{t^2 + 1}\, dt =$$

$$= 6\int \left(t^6 - 2t^4 + 2t^2 - 2 + \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} - 2t + 2\ arc\ tg\ t\right] + C =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt[6]{x^3}}{3} - 2\sqrt[6]{x} + 2\ arc\ tg\ \sqrt[6]{x}\right] + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$m.c.m.\ (2, 6, 3) = 6$

$x = t^6\ ;\ dx = 6t^5\, dt$

$t^8 - t^6 \quad | \ t^2 + 1$

$-t^8 - t^6 \quad \ t^6 - 2t^4 + 2t^2 - 2$

$-2t^6$

$2t^6 + 2t^4$

$2t^4$

$-2t^4 - 2t^2$

$-2t^2$

$2t^2 + 2$

2

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt[6]{x^3}}{3} - 2\sqrt[6]{x} + 2\ arc\ tg\ \sqrt[6]{x}\right] + C}$

230. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^5\, dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^3 - 1}} \cdot x^2\, dx = \int \frac{t^2 + 1}{t} \cdot \frac{2}{3} t\, dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int (t^2 + 1)\, dt = \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3} + t\right] + C =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{(x^3 - 1)^3}}{3} + \sqrt{x^3 - 1}\right] + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x^3 - 1} = t\ ;\ x^3 - 1 = t^2$

$3x^2\, dx = 2t\, dt$

$x^2\, dx = \frac{2}{3} t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{(x^3 - 1)^3}}{3} + \sqrt{x^3 - 1}\right] + C}$

231. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(2 + x)\, dx}{\sqrt{x + 3}} = \int \frac{(2 + t^2 - 3)}{t} \cdot 2t\, dt = 2\int (t^2 - 1)\, dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right] + C = 2\frac{t^3}{3} - 2t + C = \frac{2x\, (x + 3)^{1/2}}{3} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x + 3} = t\ ;\ x + 3 = t^2$

$x = t^2 - 3\ ;\ dx = 2t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{2x\, (x + 3)^{1/2}}{3} + C}$

232. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}} = \int \frac{2t\, dt}{(t^2 + 1)\, t} = 2\int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= 2\ arc\ tg\ t + C = 2\ arc\ tg\ \sqrt{x - 1} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x - 1} = t$

$x - 1 = t^2\ ;\ x = t^2 + 1\ ;\ dx = 2t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\ arc\ tg\ \sqrt{x - 1} + C}$

233. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{(x + 3)\, dx}{(x + 5)\sqrt{x + 4}} = \int \frac{(t^2 - 4 + 3)\, 2t\, dt}{(t^2 - 4 + 5)\, t} =$$

$$= \int \frac{(t^2 - 1)\, 2t\, dt}{(t^2 + 1)\, t} = 2\int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\, dt = 2\int \left(1 - \frac{2}{1 + t^2}\right) dt =$$

$$= 2\,[t - 2\ arc\ tg\ t] + C = 2\,[\sqrt{x + 4} - 2\ arc\ tg\ \sqrt{x + 4}] + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{x + 4} = t$

$x + 4 = t^2\ ;\ x = t^2 - 4$

$dx = 2t\, dt$

$t^2 - 1 \quad | \ t^2 + 1$

$-t^2 - 1 \quad \ 1$

-2

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\,[\sqrt{x + 4} - 2\ arc\ tg\ \sqrt{x + 4}] + C}$

234. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = \int \frac{2t\, dt}{\sqrt{1 + t}} = \int \frac{2\,(z^2 - 1)\, 2z\, dz}{z} =$$

$$= 4\int (z^2 - 1)\, dz = 4\left[\frac{z^3}{3} - z\right] + C =$$

$$= \frac{4z^3 - 12z}{3} + C = \frac{z\,(4z^2 - 12)}{3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + t}\,[4\,(1 + t) - 12]}{3} + C = \frac{\sqrt{1 + t}\,(4t - 8)}{3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}{3} \cdot [4\sqrt{1 + x} - 8] + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\sqrt{1 + x} = t$

$1 + x = t^2$

$dx = 2t\, dt$

$\sqrt{1 + t} = z$

$1 + t = z^2\ ;\ t = z^2 - 1$

$dt = 2z\, dz$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}{3}\,[4\sqrt{1 + x} - 8] + C}$

235. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - sen^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4}\, sen\ 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\, 2\, sen\ t \cos t + C =$$

$$= \frac{arc\ sen\ x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = sen\ t\ ;\ t = arc\ sen\ x$

$dx = \cos t\, dt$

$\cos^2 t + sen^2 t = 1$

$\cos^2 t - sen^2 t = \cos 2t$

$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$

$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{arc\ sen\ x}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C}$

236. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - 4\, sen^2 t} \cdot 2 \cos t\, dt =$$
$$= 4\int \sqrt{1 - sen^2 t} \cdot \cos t\, dt = 4\int \cos^2 t\, dt =$$
$$= 4\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t\, dt =$$
$$= 2t + 2 \cdot \frac{1}{2}\, sen\, 2t + C = 2t + sen\, 2t + C =$$
$$= 2\, arc\, sen \frac{x}{2} + 2\, sen\, t \cdot \cos t + C =$$
$$= 2\, arc\, sen \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 2\, sen\, t$; $dx = 2 \cos t\, dt$

$sen\, t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = arc\, sen \frac{x}{2}$

$sen\, 2t = 2\, sen\, t \cos t = x\sqrt{1 - sen^2 t} = \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2\, arc\, sen \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C}$

237. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{25 - 9x^2}\, dx = \int \sqrt{25 - (3x)^2}\, dx =$$
$$= \int \sqrt{25 - 25\, sen^2 t} \cdot \frac{5}{3} \cos t\, dt = \frac{25}{3}\int \sqrt{1 - sen^2 t} \cdot \cos t\, dt =$$
$$= \frac{25}{3}\int \cos^2 t\, dt = \frac{25}{3}\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$
$$= \frac{25}{6}\int dt + \frac{25}{6}\int \cos 2t\, dt = \frac{25}{6} t + \frac{25}{12} sen\, 2t + C =$$
$$= \frac{25}{6}\, arc\, sen \frac{3x}{5} + \frac{25}{12} \cdot \frac{6x}{25}\sqrt{25 - 9x^2} + C =$$
$$= \frac{25}{6}\, arc\, sen \frac{3x}{5} + \frac{x}{2}\sqrt{25 - 9x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x = 5\, sen\, t$

$3\, dx = 5 \cos t\, dt$

$dx = \frac{5}{3} \cos t\, dt$

$sen\, t = \frac{3x}{5}$

$t = arc\, sen \frac{3x}{5}$

$sen\, 2t = 2\, sen\, t \cos t = 2 \cdot \frac{3x}{5}\sqrt{1 - \frac{9x^2}{25}} = \frac{6x}{25}\sqrt{25 - 9x^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{25}{6}\, arc\, sen \frac{3x}{5} + \frac{x}{2}\sqrt{25 - 9x^2} + C}$

238. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}} = \int \frac{\frac{5}{3} \cos t\, dt}{\sqrt{25 - 25\, sen^2 t}} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{1 - sen^2 t}} = \frac{1}{3}\int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \frac{1}{3}\int dt =$$
$$= \frac{1}{3} t + C = \frac{1}{3}\, arc\, sen \frac{3x}{5} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x = 5\, sen\, t$

$3\, dx = 5 \cos t\, dt$

$dx = \frac{5}{3} \cos t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}\, arc\, sen \frac{3x}{5} + C}$

239. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2 \sec t \cdot 2 \sec t \cdot tg\, t\, dt}{\sqrt{4 \sec^2 t - 4}} =$$
$$= \frac{4}{2}\int \frac{\sec^2 t \cdot tg\, t}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} dt = 2\int \frac{\sec^2 t \cdot tg\, t}{tg\, t} dt =$$
$$= 2\int \sec^2 t\, dt = 2\, tg\, t + C = 2\sqrt{\sec^2 t - 1} + C =$$
$$= 2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} + C = \sqrt{x^2 - 4} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 2 \sec t$; $\sec t = \frac{x}{2}$

$dx = 2 \sec t \cdot tg\, t\, dt$

$tg^2 t = \sec^2 t - 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{x^2 - 4} + C}$

240. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{1 + 9x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + (3x)^2}\, dx =$$
$$= \int \sqrt{1 + tg^2 t} \cdot \frac{\sec^2 t\, dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sec t \cdot \sec^2 t\, dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int \sec^3 t\, dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}[\sec x\, tg\, x + L\, |\sec x + tg\, x|] + C =$$
$$= \frac{1}{6}[\sqrt{1 + 9x^2} \cdot 3x + L\, |\sqrt{1 + 9x^2} + 3x|] + C =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{1 + 9x^2} + \frac{1}{6} L\, |3x + \sqrt{1 + 9x^2}| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$3x = tg\, t$

$3\, dx = \sec^2 t\, dt$

$dx = \frac{\sec^2 t\, dt}{3}$

$1 + tg^2 t = \sec^2 t$

NOTA: Véase el n.º 152

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{2}\sqrt{1 + 9x^2} + \frac{1}{6} L\, |3x + \sqrt{1 + 9x^2}| + C}$

241. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2 t - 1}}{\sec t} \cdot \sec t \cdot tg\, t\, dt =$$
$$= \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \cdot tg\, t\, dt = \int tg\, t \cdot tg\, t\, dt = \int tg^2 t\, dt =$$
$$= \int (tg^2 t + 1 - 1)\, dt = \int \sec^2 t\, dt - \int dt = tg\, t - t + C =$$
$$= \sqrt{\sec^2 t - 1} - t + C = \sqrt{x^2 - 1} - arc\, sec\, x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = \sec t$; $t = arc\, sec\, x$

$dx = \sec t \cdot tg\, t\, dt$

$1 + tg^2 t = \sec^2 t$

$tg^2 t = \sec^2 t - 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{x^2 - 1} - arc\, sec\, x + C}$

242. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{8x - x^2}\, dx = \int \sqrt{16 - (x - 4)^2}\, dx =$$
$$= \int \sqrt{16 - 16\, sen^2 t} \cdot 4 \cos t\, dt = 16\int \sqrt{1 - sen^2 t} \cdot \cos t\, dt =$$
$$= 16\int \cos^2 t\, dt = 16\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8\int (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= 8\int dt + 8\int \cos 2t\, dt = 8t + 8 \cdot \frac{\text{sen } 2t}{2} + C =$$
$$= 8 \text{ arc sen } \frac{x-4}{4} + \frac{x-4}{2}\sqrt{8x - x^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x - 4 = 4 \text{ sen } t \; ; \; dx = 4 \cos t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 8 \text{ arc sen } \frac{x-4}{4} + \frac{x-4}{2} \cdot \sqrt{8x - x^2} + C}$

243. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \int \frac{a \sec^2 t\, dt}{\sqrt{(a^2 tg^2 t + a^2)^3}} =$$
$$= a\int \frac{\sec^2 t\, dt}{\sqrt{[a^2 (tg^2 t + 1)]^3}} = a\int \frac{\sec^2 t\, dt}{\sqrt{(a^2 \cdot \sec^2 t)^3}} =$$
$$= \frac{a}{a^3}\int \frac{\sec^2 t\, dt}{\sec^3 t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\sec t} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\, dt =$$
$$= \frac{1}{a^2} \text{ sen } t + C = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = a\, tg\, t$

$dx = a \sec^2 t\, dt$

$\sqrt{x^2+a^2} = a \sec t$

$tg\, t = \frac{x}{a}$

$\text{sen } t = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C}$

244. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int \frac{\text{sen}^2 t \cdot \cos t\, dt}{\sqrt{(1-\text{sen}^2 t)^3}} = \int \frac{\text{sen}^2 t \cdot \cos t\, dt}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}} =$$
$$= \int \frac{\text{sen}^2 t \cdot \cos t\, dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\text{sen}^2 t}{\cos^2 t} dt = \int tg^2 t\, dt =$$
$$= \int (tg^2 t + 1 - 1)\, dt = \int (tg^2 t + 1)\, dt - \int dt =$$
$$= \int \sec^2 t\, dt - \int dt = tg\, t - t + C = \frac{\text{sen } t}{\cos t} - t + C =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc sen } x + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = \text{sen } t \; ; \; t = \text{arc sen } x$

$dx = \cos t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc sen } x + C}$

245. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\,(\sqrt{x^2+1}+x)} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1-x^2)} dx =$$
$$= \int \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx =$$
$$= \int dx - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$
$$= x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2+1} + C = x - \sqrt{x^2+1} + C$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = x - \sqrt{x^2+1} + C}$

246. RESOLUCIÓN

$$I = \int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2} \cdot dx =$$
$$= \int \sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2 t} \cdot 2\cos t\, dt = 4\int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cdot \cos t\, dt =$$
$$= 4\int \cos t \cdot \cos t\, dt = 4\int \cos^2 t\, dt = 4\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$
$$= 2\int dt + 2\int \cos 2t\, dt = 2t + \text{sen } 2t + C =$$
$$= 2t + 2 \text{ sen } t \cos t + C =$$
$$= 2 \text{ arc sen } \frac{x+1}{2} + 2 \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{4}} + C =$$
$$= 2 \text{ arc sen } \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{4 - (x+1)^2} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x + 1 = 2 \text{ sen } t \; ; \; dx = 2\cos t\, dt$

$\text{sen } t = \frac{x+1}{2}$

$t = \text{arc sen } \frac{x+1}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2 \text{ arc sen } \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} \cdot \sqrt{4 - (x+1)^2} + C}$

247. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4ax - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4a^2 - (x-2a)^2}} =$$
$$= \int \frac{2a \cos t\, dt}{\sqrt{4a^2 - 4a^2 \text{sen}^2 t}} = \frac{2a}{2a}\int \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}} dt =$$
$$= \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int dt = t + C = \text{arc sen } \frac{x-2a}{2a} + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x - 2a = 2a \text{ sen } t$

$dx = 2a \cos t\, dt$

$\text{sen } t = \frac{x-2a}{2a}$

$t = \text{arc sen } \frac{x-2a}{2a}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \text{arc sen } \frac{x-2a}{2a} + C}$

248. RESOLUCIÓN

$$I = \int \frac{x\, dx}{4 - x^2 + \sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2 \text{ sen } t \cdot 2\cos t\, dt}{4 - 4\,\text{sen}^2 t + \sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2 t}} =$$
$$= \int \frac{4 \text{ sen } t \cos t\, dt}{4(1 - \text{sen}^2 t) + \sqrt{4(1-\text{sen}^2 t)}} = \int \frac{4 \text{ sen } t \cos t\, dt}{4\cos^2 t + 2\cos t} =$$
$$= \int \frac{4 \text{ sen } t\, dt}{4\cos t + 2} = \int \frac{\text{sen } t}{\cos t + \frac{1}{2}} dt = \int \frac{-dz}{z} =$$
$$= -L\,|z| + C = -L\left|\cos t + \frac{1}{2}\right| + C = -L\left|\sqrt{1 - \text{sen}^2 t} + \frac{1}{2}\right| + C =$$
$$= -L\left|\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2}\right| + C = -L\left|\frac{\sqrt{4-x^2}+1}{2}\right| + C$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 2 \text{ sen } t \; ; \; \text{sen } t = \frac{x}{2}$

$dx = 2\cos t\, dt$

$\cos t + \frac{1}{2} = z$

$-\text{sen } t\, dt = dz$

$\text{sen } t\, dt = -dz$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = -L\left|\frac{\sqrt{4-x^2}+1}{2}\right| + C}$

Bloque 11

- ✔ Cálculo de integrales definidas. Aplicaciones
- ✔ Ejercicios propuestos
- ✔ Resolución de los ejercicios

CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

Regla de Barrow

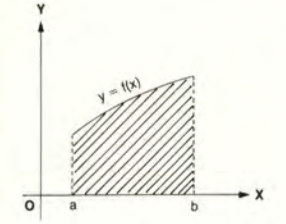
Si f(x) *es una función continua en* [a, b] *y* F(x) *es una primitiva de* f(x) *es:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Áreas de figuras planas

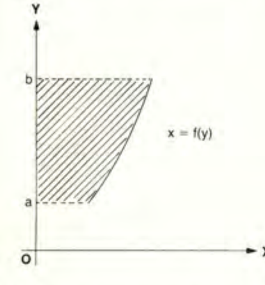
I. Área del recinto limitado por una función positiva en [a, b]

a) *El área limitada por la curva* y = f(x), *el eje de abscisas y las rectas* x = a ; x = b, (a < b), *viene dada por:*



$$A = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

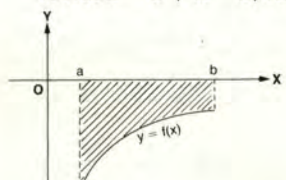
b) *El área limitada por la curva* x = f(y), *el eje de ordenadas y las rectas* x = a ; x = b, *viene dada por:*



$$A = \int_a^b x\,dy = \int_a^b f(y)\,dy$$

II. Área del recinto limitado por una función negativa en [a, b]

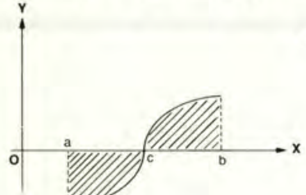
El área limitada por la curva y = f(x), *el eje de abscisas y las rectas* x = a ; x = b, *viene dada por:*



$$A = \left|\int_a^b y\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

III. Área del recinto limitado por una función positiva y negativa en [a, b]

El área limitada por la curva y = f(x), *el eje de abscisas y las rectas* x = a ; x = b, *viene dada por:*

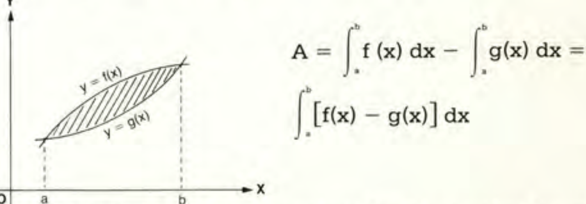


$$A = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \int_c^b f(x)\,dx$$

IV. Área del recinto limitado por dos funciones continuas

El área limitada por las curvas y = f(x), *e* y = g(x) *siendo* f(x) ⩾ g(x), *viene dada por:*



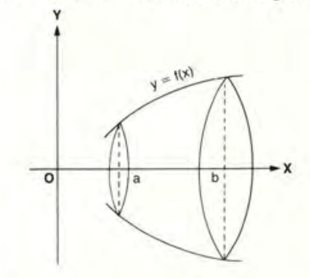
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx =$$

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

siendo los límites a *y* b *los puntos de intersección de ambas curvas.*

Volúmenes de los cuerpos de revolución

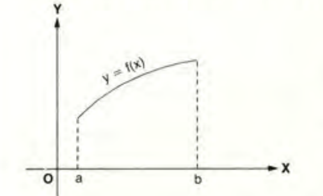
El volumen del cuerpo de revolución engendrado por la superficie limitada por y = f(x) *alrededor del eje de abscisas y las rectas* x = a ; x = b, *viene dado por:*



$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Longitud de un arco de curva

La longitud del arco de curva y = f(x) *comprendido entre los puntos de abscisas* x = a ; x = b (a < b) *es:*

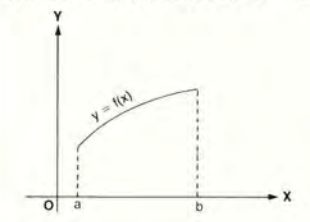


$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Área de una superficie de revolución

El área engendrada por la curva y = f(x) *al girar alrededor del eje de abscisas y las rectas* x = a ; x = b, *viene dada por:*



$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular: $I = \int_4^5 (x-2)^3\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{65}{4}}$

2. Calcular: $I = \int_{-1}^3 (3x^2 + 2x + 1)\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 40}$

3. Calcular: $I = \int_0^1 \left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{7}{2} + L2}$

4. Calcular: $I = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3}{8}}$

5. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

6. Calcular: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2}$

7. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

8. Calcular: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{4}{3}\sqrt{3}}$

9. Calcular: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{2}}$

10. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}}$

11. Calcular: $I = \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{116}{15}}$

12. Calcular: $I = \int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

13. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{3}}$

14. Calcular: $I = \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\pi}{4a}}$

15. Calcular: $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\pi}{2}}$

16. Calcular: $I = \int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{52}{9}}$

17. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3}{4}\pi}$

18. Calcular: $I = \int_0^1 x\,e^x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

19. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

20. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{\pi}{4} - \frac{L\,2}{2}}$

21. Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \pi - 2}$

22. Calcular: $I = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}}$

23. Calcular: $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\frac{3}{2}}$

24. Hallar el área limitada por la recta $y = 2x$, el eje de abscisas y la recta $x = 4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 16\ u^2}$

25. Hallar el área limitada por la recta $x + y = 5$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$; $x = 4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\ u^2}$

26. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$; $x = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 9\ u^2}$

27. Hallar el área limitada por la curva $y = \text{sen}\, x$ y las rectas $x = 0$; $x = \pi$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 2\ u^2}$

28. Hallar el área limitada por las rectas $y = \frac{x}{2} + 1$; $x = 2$; $x = 7$, y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{65}{4}\ u^2}$

29. Hallar el área del recinto comprendido entre el eje de abscisas, el eje de ordenadas, y la recta que pasa por el punto P(2, 3) y tiene de pendiente $m = -2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{49}{4}\ u^2}$

30. Hallar el área limitada por la curva $y = -x^2 + 9$, y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 36\ u^2}$

31. Hallar el área limitada por la curva $y = 8x - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$; $x = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{70}{3}\ u^2}$

32. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$; $x = 6$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{56}{3}\ u^2}$

33. Hallar el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 8\ u^2}$

34. Hallar el área del recinto limitado por la parábola $y^2 = 4x$, y las rectas $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{4}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right] u^2}$

35. Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = (x-1)(x+2)$, las ordenadas correspondientes a las abscisas $x = -3$; $x = 2$, y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{49}{6}\ u^2}$

36. Hallar el área limitada por la curva $xy = 36$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$; $x = 12$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 72\ L2\ u^2}$

37. Hallar el área limitada por las rectas $y = x$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{24}{5}\ u^2}$

38. Hallar el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 y 6 cm respectivamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 24\ \ u^2}$

39. Hallar el área limitada por las curvas $y = e^x$; $y = e^{-x}$, y la recta $x = 1$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}\ u^2}$

40. Hallar el área limitada por las curvas $y = e^x$; $y = e^{-x}$, y las rectas $x = 1$; $x = -1$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{2e^2 - 4e + 2}{e}\ u^2}$

41. Hallar el área limitada por las curvas $y = e^x$; $y = e^{-x}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$; $x = -1$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{2e - 2}{e}\ u^2}$

42. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, y la recta $y = x + 6$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{125}{6}\ u^2}$

43. Hallar el área limitada por la parábola $x = 4 - y^2$, y el eje de ordenadas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{32}{3}\ u^2}$

44. Hallar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x + 9$, y el eje de ordenadas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 9\ u^2}$

45. Hallar el área limitada por la curva $y = \text{tg}\, x$, el eje de abscisas y la recta $x = \frac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{1}{2}\ L2\ u^2}$

46. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje de ordenadas y la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{2}{3}\ u^2}$

47. Hallar el área limitada por la curva $y = 4 - x^2$, y la recta $y = x + 2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{9}{2}\ u^2}$

48. Hallar el área del recinto limitado por las parábolas:

$$y = 6x - x^2 \ ; \ y = x^2 - 2x$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{64}{3}\ u^2}$

49. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$, y la recta $y = 3x - 6$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{125}{6}\ u^2}$

50. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 9\ u^2}$

51. Hallar el área limitada por la curva $y^3 = x$, y las rectas $x = 8$; $y = 1$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{17}{4}\ u^2}$

52. Hallar el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$; $y^2 = x + 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 8\ u^2}$

53. Hallar el área limitada por las curvas $y = x^3$; $y = x^4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{1}{20}\ u^2}$

54. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2 - 6x + 8$ y la recta $y = -x + 4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{9}{2}\ u^2}$

55. Hallar el área limitada por la curva $y = e^x$, y la cuerda de la misma, que tiene de extremos los puntos P(1, e) y Q(0, 1).

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{3 - e}{2}\ u^2}$

56. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 2$ y la recta $y = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{14\sqrt{2}}{3}\ u^2}$

57. Hallar el área limitada por la curva $x^2 = 64y^3$, y la recta $x = 8y$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{4}{5}\ u^2}$

58. Hallar el área limitada por las parábolas:

$$x = y^2 \ ; \ x = 3 - 2y^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\ u^2}$

59. Hallar el área limitada por las curvas $y^3 = x^2$; $y = 2 - x^2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{32}{15}\ u^2}$

60. Hallar el área limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$; $y = \cos x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\sqrt{2}\ u^2}$

61. Hallar el área limitada por las curvas $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$; $y - x - 1 = 0$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{16}{3}\ u^2}$

62. Hallar el área limitada por el bucle de la curva $y^2 = x(x - 2)^2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \left|\frac{32\sqrt{2}}{15}\ u^2\right|}$

63. Hallar el área limitada por las curvas $4y = x^2$; $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 2\pi - \frac{4}{3}\ u^2}$

64. Hallar el área del bucle de la curva $y^2 = x^4(4 + x)$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{4\,096}{105}\ u^2}$

65. Hallar el área limitada por el bucle de la curva:

$$y^2 = x^2(9 - x^2)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 36\ u^2}$

66. Hallar el área limitada por las curvas:

$$y = x^2 - 5 \ ; \ y = 3 - x^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{64}{3}\ u^2}$

67. Hallar el área limitada por la curva $y = 3 - 2x - x^2$, y sus tangentes en la intersección de la curva con el eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{16}{3}\ u^2}$

68. Hallar el área del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\pi\ u^2}$

69. Hallar el área limitada por las curvas:

$$x^2 + y^2 = 4 \ ; \ x^2 + y^2 = 4x$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) u^2}$

70. Hallar el área limitada por las curvas $8x = 2y^3 + y^2 - 2y$; $8x = y^3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{37}{96}\ u^2}$

71. Hallar el volumen engendrado por las rectas $y = 3x$; $y = 0$; $x = 3$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 81\pi\ u^3}$

72. Hallar el volumen engendrado por las rectas $y = 4x$; $x = 0$; $y = 3$, al girar alrededor del eje Y.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{9\pi}{16}\ u^3}$

73. Hallar el volumen engendrado por el triángulo de lados $y = 0$; $y = \frac{2}{3}x$; $x = 9$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 108\pi\ u^3}$

74. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje X el recinto limitado por $y^2 = 2x$; $x = 1$; $x = 2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 3\pi\ u^3}$

75. Hallar el volumen engendrado por la curva $y^2 = 8x$, y la recta $x = 2$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 16\,\pi\,u^3}$

76. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{8}{3}\,\pi\,u^3}$

77. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 16\,\pi\,u^3}$

78. Hallar el volumen engendrado por el rectángulo limitado por $x = 0$; $x = 6$; $y = 0$; $y = 2$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 24\,\pi\,u^3}$

79. Hallar el volumen engendrado por el trapecio limitado por las rectas $x = 0$; $x = 5$; $y = 0$; $x - 5y + 10 = 0$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{95\,\pi}{3}\,u^3}$

80. Hallar el volumen engendrado por el triángulo limitado por los ejes y la recta $3x + 2y = 6$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 6\,\pi\,u^3}$

81. Hallar el volumen engendrado por un bucle (onda) de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{\pi^2}{2}\,u^3}$

82. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,u^3}$

83. Hallar el volumen engendrado por el triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3) y C(8, 0), al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 15\,\pi\,u^3}$

84. Hallar el volumen engendrado por el arco de curva $y^2x = ax^2 + by^2$; $x = 2b$; $x = 3b$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \pi\,ab^2\left(\frac{7}{2} + L2\right)u^3}$

85. Hallar el volumen engendrado por la curva $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 4\pi^2\,u^3}$

86. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por un segmento AB de longitud 5 cm al girar alrededor del eje X del que A y B distan 2 y 6 cm respectivamente.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{95\,\pi}{54}\,u^3}$

87. Hallar el volumen de un tronco, de radios $r = 2$ cm y $r' = 4$ cm, y cuya altura, $h = 3$ cm, está sobre OX al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 28\,\pi\,u^3}$

88. Hallar el volumen engendrado por la curva $y^2 = 8x$, y la recta $x = 2$, al girar alrededor del eje Y.

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{128\pi}{5}\,u^3}$

89. Hallar el volumen del sólido que engendra al girar alrededor del eje X la región comprendida entre dicho eje y la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{32\pi}{3}\,u^3}$

90. Hallar la longitud del arco de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, comprendido entre los puntos de abscisas $x = 0$; $x = 1$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \frac{3}{2}\,u}$

91. Hallar la longitud de un cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \frac{\pi r}{2}\,u}$

92. Hallar la longitud de la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en el intervalo [0, 1].

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \frac{e^2 - 1}{2e}\,u}$

93. Hallar la longitud del arco de parábola $x^2 = 8y$, comprendido entre las abscisas $x = 0$; $x = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \frac{1}{8}\,(15 + 16\,L2)\,u}$

94. Hallar la longitud de la recta $y = \frac{x}{2}$ en el intervalo [0, 2].

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \sqrt{5}\,u}$

95. Hallar la longitud del arco de curva $y^2 = x^3$, comprendido entre $x = 0$; $x = 4$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \frac{8}{27}\,[10\sqrt{10} - 1]\,u}$

96. Hallar el área engendrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 4\,\pi\,r^2\,u^2}$

97. Hallar el área engendrada por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, en el intervalo $[0, \pi]$ cuando gira alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = [2\,\pi\sqrt{2} + \pi\,L\,(3 + 2\sqrt{2})]\,u^2}$

98. Hallar el área engendrada por el arco de parábola $y^2 = 4x$, al girar alrededor del eje X entre $x = 0$; $x = 3$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{56}{3}\,\pi\,u^2}$

99. Hallar el área engendrada por la curva $y = x^3$, al girar alrededor del eje X en el intervalo [0, 1].

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{\pi}{27}\,[10\sqrt{10} - 1]\,u^2}$

100. Hallar el área engendrada por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 4\,\pi\,u^2}$

101. Hallar el área engendrada por un lazo de la curva $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$, al girar alrededor del eje X.

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{\pi}{4}\,a^2\,u^2}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

$$I = \int_4^5 (x-2)^3\,dx = \left[\frac{(x-2)^4}{4}\right]_4^5 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} =$$
$$= \frac{65}{4}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{65}{4}}$

2. RESOLUCIÓN

$$I = \int_{-1}^{3} (3x^2 + 2x + 1)\,dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3} =$$
$$= [x^3 + x^2 + x]_{-1}^{3} = (27 + 9 + 3) - (-1 + 1 - 1) = 39 + 1 = 40$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 40}$

3. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^1 \left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x + 1 + 2 + \frac{1}{x+1}\right) dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x + 3 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + L\,|x+1|\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} + 3 + L2 = \frac{7}{2} + L2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{7}{2} + L2}$

4. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_0^3 (x-1)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_0^3 =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{8}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{3}{8}}$

5. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx = [tg\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,0 = tg\,45^\circ = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

6. RESOLUCIÓN

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\,x\,dx = [sen\,x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = sen\,\frac{\pi}{2} - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= 1 - (-1) = 2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 2}$

7. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx = [-cos\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -cos\,\frac{\pi}{2} + cos\,0 = -0 + 1 = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = 1}$

8. RESOLUCIÓN

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sen^2 x \cdot cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen^2 x \cdot cos^2 x}\,dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sen^2 x} = [tg\,x - ctg\,x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$= \left(tg\,\frac{\pi}{3} - ctg\,\frac{\pi}{3}\right) - \left(tg\,\frac{\pi}{6} - ctg\,\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{4}{3}\sqrt{3}}$

9. RESOLUCIÓN

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(ctg\,\frac{x}{2} - tg\,\frac{x}{2}\right) sen\,x}{cosec\,2x + ctg\,2x}\,dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{cos\,x/2}{sen\,x/2} - \frac{sen\,x/2}{cos\,x/2}\right) sen\,x}{\frac{1}{sen\,2x} + \frac{cos\,2x}{sen\,2x}}\,dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{cos^2 x/2 - sen^2 x/2}{sen\,x/2 \cdot cos\,x/2} \cdot sen\,x}{\frac{1 + cos\,2x}{sen\,2x}}\,dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{cos\,x}{1/2\,sen\,x} \cdot sen\,x}{\frac{2\,cos^2 x}{sen\,2x}}\,dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,cos\,x \cdot sen\,2x}{2\,cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,2x}{cos\,x}\,dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,sen\,x\,cos\,x}{cos\,x}\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx = 2\,[-cos\,x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= -2\left(cos\,\frac{\pi}{2} - cos\,\frac{\pi}{4}\right) = -2\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \sqrt{2}}$

10. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,cos\,x\,dx = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\,x = t\ ;\ cos\,x\,dx = dt$

para $x = 0\ ;\ t = 0$

para $x = \frac{\pi}{2}\ ;\ t = 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{1}{2}}$

11. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \int_1^4 (z-1)\,z^{1/2}\,dz = \int_1^4 (z^{3/2} - z^{1/2})\,dz =$$
$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{z^5} - \frac{2}{3}\sqrt{z^3}\right]_1^4 = \left(\frac{64}{5} - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) =$$
$$= \frac{116}{15}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 + x = z\ ;\ x = z - 1$

$dx = dz$

para $x = 0\ ;\ z = 1$

para $x = 3\ ;\ z = 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \frac{116}{15}}$

12. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int_{25}^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot[2\sqrt{t}]_{25}^{16} = -[\sqrt{t}]_{25}^{16} = -(4-5) = -(-1) = 1$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$25 - x^2 = t$ | para $x = 0$; $t = 25$

$-2x\,dx = dt$ | para $x = 3$; $t = 16$

$x\,dx = -\frac{dt}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = 1}$

13. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x \cdot \cos x\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen\,x = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;;\; t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \;;\; t = 1 \end{cases}$

$\cos x\,dx = dt$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = \frac{1}{3}}$

14. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int_0^1 \frac{a\,dt}{a^2t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{a}[\text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0] = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{4a}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = at \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;;\; t = 0 \\ x = a \;;\; t = 1 \end{cases}$

$dx = a\,dt$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = \frac{\pi}{4a}}$

15. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t\,dt}{\sqrt{4 - 4\,sen^2 t}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1 - sen^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{\cos t} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 2\,sen\,t$ | para $x = 0$; $t = 0$

$dx = 2\cos t\,dt$ | para $x = 2$; $t = \frac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$

16. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^2 x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^9 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^9 t^{1/2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{t^{3/2}}{3/2}\right|_1^9 = \frac{2}{9}[t\sqrt{t}]_1^9 = \frac{2}{9}(27-1) = \frac{52}{9}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 + x^3 = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;;\; t = 1 \\ x = 2 \;;\; t = 9 \end{cases}$ | $3x^2\,dx = dt$

$x^2\,dx = \frac{dt}{3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = \frac{52}{9}}$

17. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left[x + \frac{sen\,2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{sen\,\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{3}{4}\pi$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = \frac{3}{4}\pi}$

18. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^1 x\,e^x\,dx = [x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$$

$$= [x\,e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = [x\,e^x - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x$; $du = dx$

$dv = e^x\,dx$; $v = e^x$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = 1}$

19. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,sen\,x\,dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [sen\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-x\cos x + sen\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2}\right) - (0\cdot\cos 0 + sen\,0) = 1$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x$; $du = dx$

$dv = sen\,x\,dx$; $v = -\cos x$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = 1}$

20. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx = [x\,tg\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\,x\,dx =$$

$$= [x\,tg\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [-L\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = [x\,tg\,x + L\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{4} + L\cos\frac{\pi}{4}\right) - (0\cdot tg\,0 + L\cos 0) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + L\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x$; $du = dx$

$dv = \sec^2 x\,dx$; $v = tg\,x$

SOLUCIÓN: $\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{L\ 2}{2}}$

21. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,sen\,x\,dx = [-x^2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx =$$

$$= [-x^2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[x\,sen\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx =$$

$$= [-x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = x^2$; $du = 2x\,dx$ | $u = x$; $du = dx$

$dv = \text{sen}\,x\,dx$; $v = -\cos x$ | $dv = \cos x\,dx$; $v = \text{sen}\,x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \pi - 2}$

22. RESOLUCIÓN

$$I = \int_0^\pi e^x \,\text{sen}\, x\, dx = [-e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x\, dx =$$

$$= [-e^x \cos x]_0^\pi + [e^x \,\text{sen}\, x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \,\text{sen}\, x\, dx =$$

$$= [e^x (\text{sen}\, x - \cos x)]_0^\pi - I$$

$$2I = [e^x (\text{sen}\, x - \cos x)]_0^\pi =$$

$$= [e^\pi (\text{sen}\, \pi - \cos \pi)] - [e^0 (\text{sen}\, 0 - \cos 0)] = e^\pi + 1$$

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$u = e^x$; $du = e^x dx$ | $u = e^x$; $du = e^x dx$

$dv = \text{sen}\,x\,dx$; $v = -\cos x$ | $dv = \cos x\,dx$; $v = \text{sen}\,x$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}}$

23. RESOLUCIÓN

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-3} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} =$$

$$= [L\,|x-3| - L\,|x-2|]_{-1}^{1} = \left[L \left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_{-1}^{1} = L\,2 - L\,\frac{4}{3} =$$

$$= L\,2 - L\,4 + L\,3 = L\,3 - L\,2 = L\,\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

$$1 = A(x-2) + B(x-3) \Rightarrow \begin{cases} \text{para } x = 3 \Rightarrow 1 = A \\ \text{para } x = 2 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{I = L\,\dfrac{3}{2}}$

24. RESOLUCIÓN

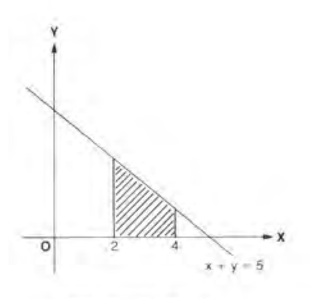
$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^4 2x\,dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = [x^2]_0^4 = 4^2 = 16\ \text{u}^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 16\ u^2}$

25. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_2^4 (5 - x)\,dx = \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= (20 - 8) - (10 - 2) = 12 - 8 = 4\ \text{u}^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\ u^2}$

26. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}[x^3]_0^3 = \frac{1}{3}(27 - 0) = 9\ \text{u}^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 9\ u^2}$

27. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^\pi \text{sen}\,x\,dx = [-\cos x]_0^\pi =$$

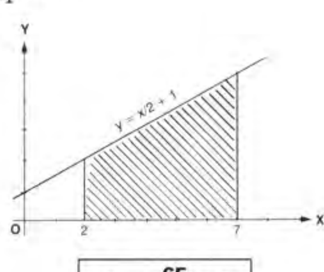
$$= -\cos \pi - (-\cos 0^\circ) = -(-1) - (-1) = 2\ \text{u}^2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 2\ u^2}$

28. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_2^7 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_2^7 =$$

$$= \frac{77}{4} - 3 = \frac{65}{4}\ \text{u}^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{65}{4}\ u^2}$

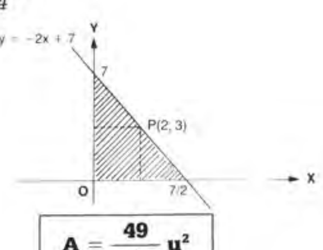
29. RESOLUCIÓN

La ecuación de la recta que pasa por P(2, 3) y tiene de pendiente $m = -2$ es:

$$y - 3 = -2(x - 2)\ ;\ y = -2x + 7$$

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^{7/2} (-2x + 7)\,dx = \left[-2\frac{x^2}{2} + 7x\right]_0^{7/2} =$$

$$= [-x^2 + 7x]_0^{7/2} = \frac{49}{4}\ \text{u}^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{49}{4}\ u^2}$

30. RESOLUCIÓN

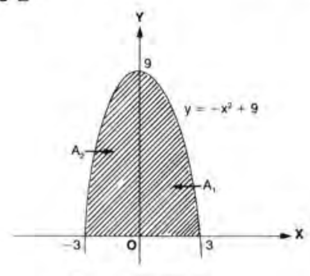
La curva corta a los ejes de coordenadas en los puntos:

$$(3, 0) \ ; \ (-3, 0) \ ; \ (0, 9)$$

$$A_1 = A_2$$

$$A = 2A_1 = 2\int_0^3 y\,dx = 2\int_0^3 (-x^2 + 9)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + 9x\right]_0^3 =$$

$$= 2\,(-9 + 27) = 36\ u^2$$

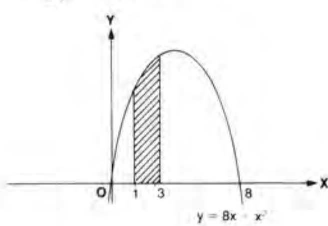


SOLUCIÓN: **$A = 36\ u^2$**

31. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_1^3 (8x - x^2)\,dx = \left[8\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[4x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 =$$

$$= (36 - 9) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{70}{3}\ u^2$$



SOLUCIÓN: **$A = \frac{70}{3}\ u^2$**

32. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_2^6 (x^2 - 7x + 6)\,dx = \int_6^2 (x^2 - 7x + 6)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 7\,\frac{x^2}{2} + 6x\right]_6^2 = \left(\frac{8}{3} - 14 + 12\right) -$$

$$- \left(\frac{216}{3} - 126 + 36\right) = \frac{2}{3} - (-18) = \frac{56}{3}\ u^2$$

SOLUCIÓN: **$A = \frac{56}{3}\ u^2$**

33. RESOLUCIÓN

La curva corta al eje de abscisas en los puntos:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \ ; \ x = 0 \ ; \ x = 2 \ ; \ x = 4$$

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_4^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^3}{3} + 8\,\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^3}{3} + 8\,\frac{x^2}{2}\right]_4^2 =$$

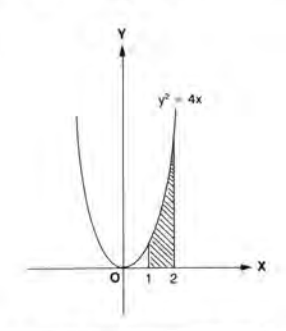
$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_4^2 = 4 + 4 = 8\ u^2$$

SOLUCIÓN: **$A = 8\ u^2$**

34. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_1^2 \sqrt{4x}\,dx = 2\int_1^2 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{4}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_1^2 = \frac{4}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right]u^2$$



SOLUCIÓN: **$A = \frac{4}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right]u^2$**

35. RESOLUCIÓN

La curva corta al eje de abscisas en:

$$(x - 1)\,(x + 2) = 0 \begin{cases} x - 1 = 0 \ ; \ x = 1 \\ x + 2 = 0 \ ; \ x = -2 \end{cases}$$

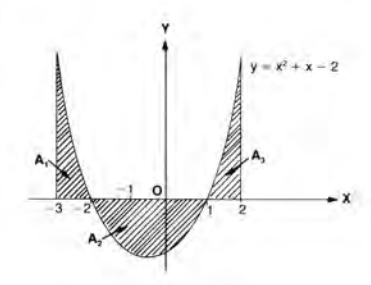
$$A_1 = \int_{-3}^{-2} (x - 1)\,(x + 2)\,dx = \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2} = \frac{11}{6}$$

$$A_2 = \int_1^{-2} (x^2 + x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^{-2} = \frac{27}{6}$$

$$A_3 = \int_1^2 (x^2 + x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{11}{6}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{11}{6} + \frac{27}{6} + \frac{11}{6} = \frac{49}{6}\ u^2$$

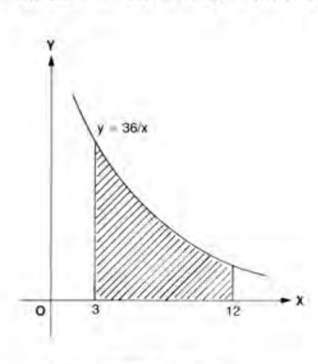


SOLUCIÓN: **$A = \frac{49}{6}\ u^2$**

36. RESOLUCIÓN

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_3^{12} \frac{36}{x}\,dx = 36\,[L\,x]_3^{12} =$$

$$= 36\,(L\,12 - L\,3) = 36\,(L\,4 + L\,3 - L\,3) = 36\,L\,4 = 72\,L\,2\ u^2$$



SOLUCIÓN: **$A = 72\ L2\ u^2$**

37. RESOLUCIÓN

Punto de intersección de ambas rectas:

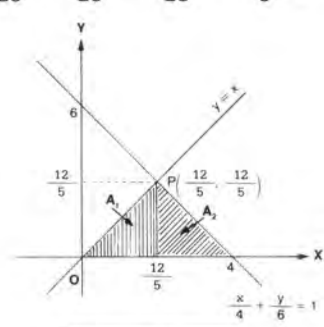
$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{12}{5}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{12}{5}} = \frac{72}{25}\ u^2$$

$$A_2 = \int_{\frac{12}{5}}^{4}\left(6 - \frac{3x}{2}\right)dx = \left[6x - \frac{3x^2}{4}\right]_{\frac{12}{5}}^{4} = \frac{48}{25}\ u^2$$

$$A = A_2 + A_1 = \frac{48}{25} + \frac{72}{25} = \frac{120}{25} = \frac{24}{5}\ u^2$$



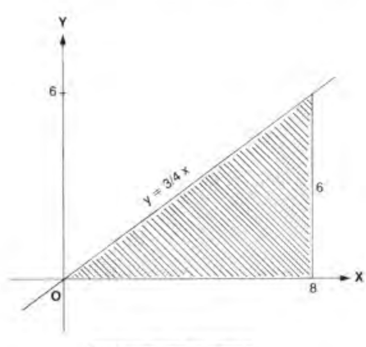
SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{24}{5}\ u^2}$

38. RESOLUCIÓN

La ecuación de la recta que pasa por el origen es:

$$y = m\,x = \frac{6}{8}\,x = \frac{3}{4}\,x\ ;\ siendo\ m = \frac{6}{8}$$

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^8 \frac{3}{4}x\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^8 = \frac{3}{4}\cdot 32 = 24\ u^2$$

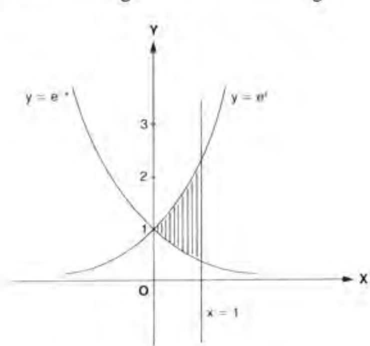


SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 24\ \ u^2}$

39. RESOLUCIÓN

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= \left(e + \frac{1}{e}\right) - (1 + 1) = \frac{e^2 + 1}{e} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}\ u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{e^2 - 2e + 1}{e}\ u^2}$

40. RESOLUCIÓN

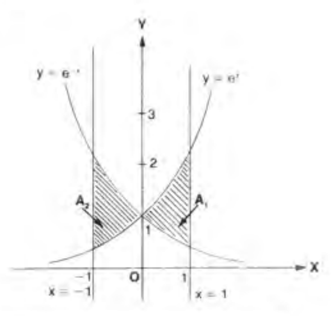
$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}\ u^2$$

$$A_2 = \int_{-1}^0 (e^{-x} - e^x)\,dx = \left[-e^{-x} - e^x\right]_{-1}^0 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}\ u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} + \frac{e^2 - 2e + 1}{e} =$$

$$= \frac{2e^2 - 4e + 2}{e}\ u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{2e^2 - 4e + 2}{e}\ u^2}$

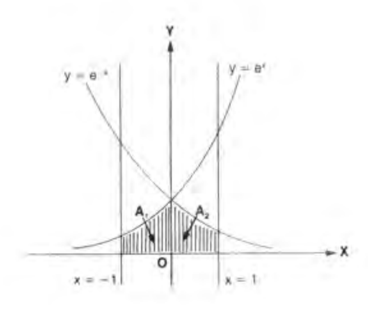
41. RESOLUCIÓN

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_2 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}\ u^2$$

$$A_1 = \int_{-1}^0 e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}\ u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 1 - \frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{2}{e} = \frac{2e - 2}{e}\ u^2$$



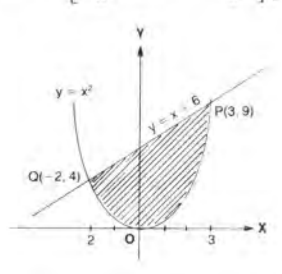
SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{2e - 2}{e}\ u^2}$

42. RESOLUCIÓN

Los puntos de intersección se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow P(3, 9)\ ;\ Q(-2, 4)$$

$$A = \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}\ u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{125}{6}\ u^2}$

43. RESOLUCIÓN

La parábola corta al eje de ordenadas en los puntos (0, 2) y (0, −2)

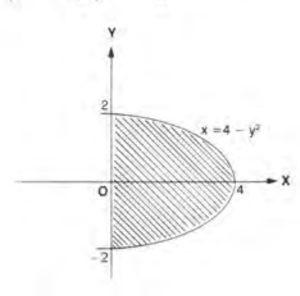
$x = 4 - y^2$; *para* $x = 0 \Rightarrow y^2 = 4$; $y = \pm 2$

y al eje de abscisas en el punto (4, 0)

para $y = 0$; $x = 4$

$$A = \int x\,dy = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\,dy = 2\int_0^2 (4 - y^2)\,dy =$$

$$= 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{32}{3}\,u^2}$

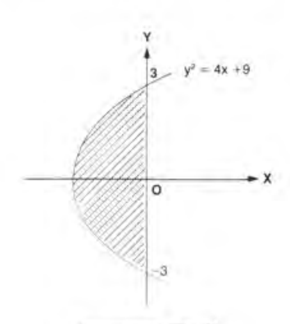
44. RESOLUCIÓN

La parábola corta al eje de ordenadas:

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x + 9 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

$$A = \int x\,dy = \int_{-3}^{3} \left(\frac{y^2 - 9}{4}\right) dy = \frac{1}{4}\int_{-3}^{3} (y^2 - 9)\,dy =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4}\int_0^3 (y^2 - 9)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - 9y\right]_0^3 = \frac{1}{2}(9 - 27) = 9\,u^2$$



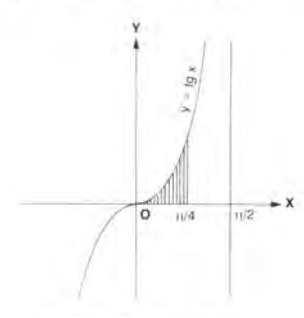
SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 9\,u^2}$

45. RESOLUCIÓN

$$A = \int y\,dx = \int_0^{\pi/4} tg\,x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{-sen\,x}{cos\,x}\,dx =$$

$$= -\left[L\,|cos\,x|\right]_0^{\pi/4} = -\left[L\left|cos\,\frac{\pi}{4}\right| - L\,|cos\,0|\right] =$$

$$= -\left(L\,\frac{\sqrt{2}}{2} - L\,1\right) = -L\,\frac{\sqrt{2}}{2} = L\,\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,L\,2\,u^2$$

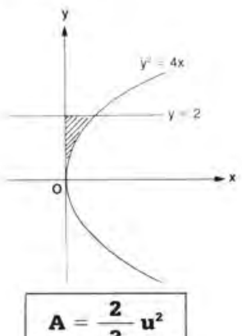


SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{1}{2}\,L2\,u^2}$

46. RESOLUCIÓN

$$A = \int_0^2 x\,dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 y^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{2}{3}\,u^2}$

47. RESOLUCIÓN

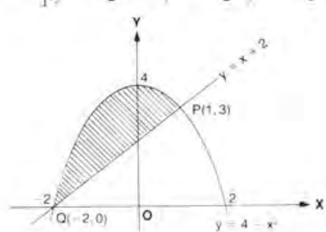
$\left.\begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = -2$

Los puntos de intersección son:

P(1, 3) ; Q(−2, 0)

$$A = \int_{-2}^{1} [(4 - x^2) - (x + 2)]\,dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{9}{2}\,u^2}$

48. RESOLUCIÓN

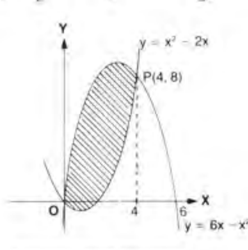
Los puntos de intersección de ambas curvas, se obtienen resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 6x - x^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 4x = 0 \\ x = 0 \ ; \ x = 4 \end{array}\right.$

Los puntos son: O(0, 0) ; P(4, 8)

$$A = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]\,dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx =$$

$$= \left[-2\,\frac{x^3}{3} + 8\,\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[-2\,\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \dfrac{64}{3}\,u^2}$

49. RESOLUCIÓN

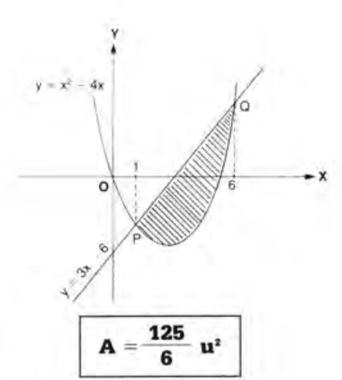
$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \ ; x = 1 \ ; x = 6$

Los puntos de intersección son:

P(1, −3) ; Q(6, 12)

$$A = \int_1^6 (3x - 6 - x^2 + 4x)\,dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 7\,\frac{x^2}{2} - 6x\right]_1^6 = \frac{125}{6}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{125}{6}\ u^2}$

50. RESOLUCIÓN

Los puntos de intersección:

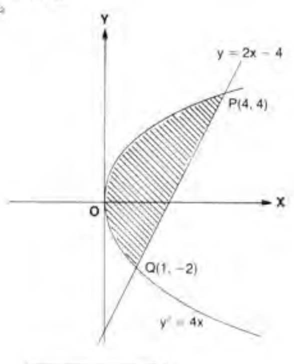
$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (2x-4)^2 = 4x$$

$$4x^2 - 20x + 16 = 0 \ ; \ x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$P(4, 4) \ ; \ Q(1, -2)$

$$A = \int_{-2}^{4}\left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \int_{-2}^{4}\left(2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2\right)dy =$$

$$= \left[2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4} = 9\ u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 9\ u^2}$

51. RESOLUCIÓN

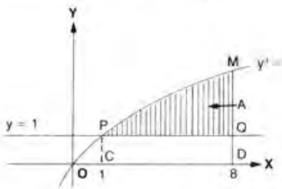
Área del rectángulo PQDC: A_1 = base · altura = 7 · 1 = 7

$A_2 = \int_1^8 y\,dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$, *siendo A_2 el área del trapecio mixtilíneo CPMD.*

El área pedida es:

$$A = A_2 - A_1 = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx - 7 = \left[\frac{x^{4/3}}{4/3}\right]_1^8 - 7 = \frac{3}{4}\left[x\sqrt[3]{x}\right]_1^8 - 7 =$$

$$= \frac{3}{4}(8 \cdot 2 - 1) - 7 = \frac{45}{4} - 7 = \frac{17}{4}\ u^2$$



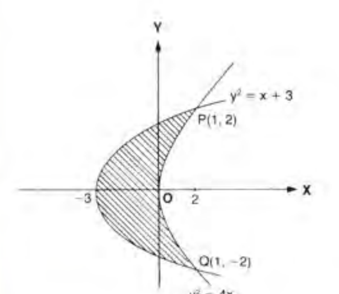
SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{17}{4}\ u^2}$

52. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ y^2 = x + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1, 2) \ ; \ Q(1, -2)$$

$$A = \int_{-2}^{2}\left[\frac{y^2}{4} - (y^2 - 3)\right]dy = \int_{-2}^{2}\left(3 - \frac{3y^2}{4}\right)dy =$$

$$= \left[3y - \frac{3y^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \left[3y - \frac{y^3}{4}\right]_{-2}^{2} = 8\ u^2$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$y^2 = 4x \ ; \ x = \frac{y^2}{4}$

$y^2 = x + 3 \ ; \ x = y^2 - 3$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 8\ u^2}$

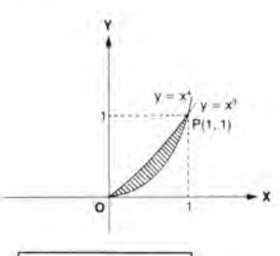
53. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4 - x^3 = 0 \ ; \ x^3(x-1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Las curvas se cortan en los puntos:

$O(0, 0) \ ; \ P(1, 1)$

$$A = \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{1}{20}\ u^2}$

54. RESOLUCIÓN

Puntos de intersección de la recta y la parábola:

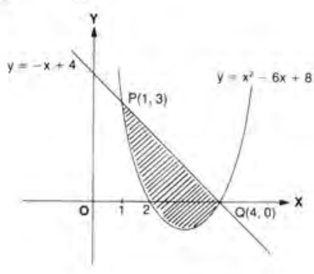
$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 4 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Los puntos de intersección son: P(1, 3) ; Q(4, 0)

$$A = \int_1^4 [-x + 4 - (x^2 - 6x + 8)]\,dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\,u^2$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{9}{2}\ u^2}$

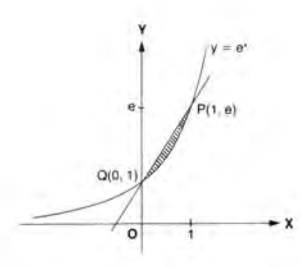
55. RESOLUCIÓN

La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-e}{1-e} \Rightarrow y = (e-1)x + 1$$

$$A = \int_0^1 [(e-1)x + 1 - e^x]\,dx =$$

$$= \left[(e-1)\frac{x^2}{2} + x - e^x\right]_0^1 = \frac{3-e}{2}\,u^2$$



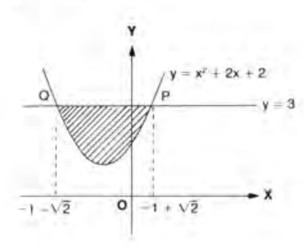
SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{3 - e}{2}\ u^2}$

56. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-1 + \sqrt{2}, 3) \ ; \ Q(-1 - \sqrt{2}, 3)$

$A = \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (3 - x^2 - 2x - 2)\, dx = \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (1 - x^2 - 2x)\, dx =$

$= \left[x - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{3}\ u^2$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{14\sqrt{2}}{3}\ u^2}$

57. RESOLUCIÓN

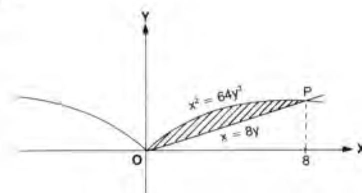
$\left.\begin{array}{l} x^2 = 64y^3 \\ x = 8y \end{array}\right\} \Rightarrow 64y^2 = 64y^3 \Rightarrow y^3 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 (y - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Los puntos de intersección son: O(0, 0) ; P(8, 1)

$A = \int_0^8 \left(\frac{x^{2/3}}{4} - \frac{x}{8}\right) dx = \left[\frac{3x^{5/3}}{20} - \frac{x^2}{16}\right]_0^8 =$

$= \frac{24}{5} - 4 = \frac{4}{5}\ u^2$



CÁLCULOS AUXILIARES

$y^3 = \frac{x^2}{64} \Rightarrow y = \frac{x^{2/3}}{4}$

$x = 8y \Rightarrow y = \frac{x}{8}$

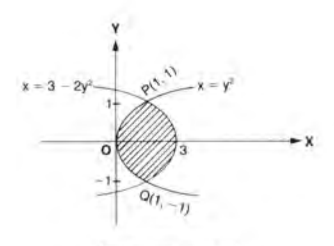
SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{4}{5}\ u^2}$

58. RESOLUCIÓN

Puntos de intersección:

$\left.\begin{array}{l} x = y^2 \\ x = 3 - 2y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1, 1) \ ; \ Q(1, -1)$

$A = \int_{-1}^{1} (3 - 2y^2 - y^2)\, dy = \int_{-1}^{1} (3 - 3y^2)\, dy = [3y - y^3]_{-1}^{1} = 4\ u^2$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\ u^2}$

59. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} y^3 = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y^3 + y - 2 = 0 \quad (1)$

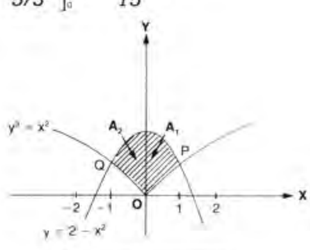
$(y - 1)(y^2 + 2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ y^2 + 2 = 0 \end{array}\right.$

La ecuación (1) solamente tiene una raíz real: y = 1.
Los puntos de intersección de ambas curvas son:
P(1, 1) ; Q(−1, 1)

$A_1 = A_2$; *luego:* $A = A_1 + A_2 = 2A_1$

$A = 2A_1 = 2\int_0^1 (2 - x^2 - x^{2/3})\, dx =$

$= 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^{5/3}}{5/3}\right]_0^1 = \frac{32}{15}\ u^2$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{32}{15}\ u^2}$

60. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} y = \cos x \\ y = \operatorname{sen} x \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + K\pi$

Los puntos de intersección de ambas curvas en el intervalo [0, 2π] son:

$x = \frac{\pi}{4} \ ; \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

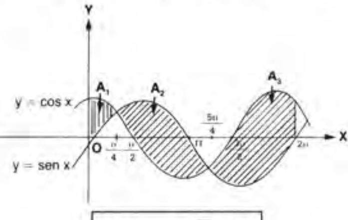
$A = A_1 + A_2 + A_3$

$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x) dx +$

$+ \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx =$

$= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$

$= (\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\ u^2$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\sqrt{2}\ u^2}$

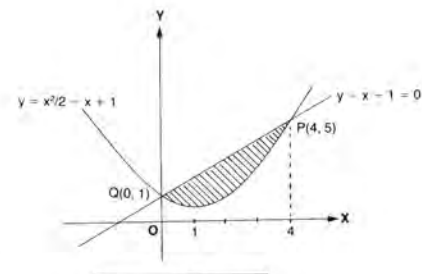
61. RESOLUCIÓN

Puntos de intersección:

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} - x + 1 \\ y - x - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(4, 5) \ ; \ Q(0, 1)$

$A = \int_0^4 \left[x + 1 - \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)\right] dx = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{6} + x^2\right]_0^4 = \frac{16}{3}\ u^2$



SOLUCIÓN: $A = \dfrac{16}{3}\,u^2$

62. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} y^2 = x(x-2)^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

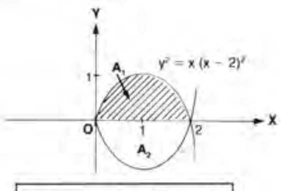
$A_1 = A_2$

$A = 2A_1 = 2\int_0^2 y\,dx = 2\int_0^2 \sqrt{x}\,(x-2)\,dx =$

$= 2\left[\int_0^2 x^{3/2}\,dx - 2\int_0^2 x^{1/2}\,dx\right] = 2\left[\dfrac{x^{5/2}}{5/2} - 2\,\dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 =$

$= 2\left[\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} - \dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^2 = 2\left[\dfrac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \dfrac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right] =$

$= 2\cdot 8\sqrt{2}\left[\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3}\right] = -\dfrac{32\sqrt{2}}{15}$



SOLUCIÓN: $A = \left|\dfrac{32\sqrt{2}}{15}\,u^2\right|$

63. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{array}{l} 4y = x^2 \\ y = \dfrac{8}{x^2+4} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{8}{x^2+4} = \dfrac{x^2}{4}$;

$x^4 + 4x^2 - 32 = 0$; $x^2 = z$ (1)

resulta:

$z^2 + 4z - 32 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 4 \\ z = -8 \end{array}\right.$

sustituyendo en (1):

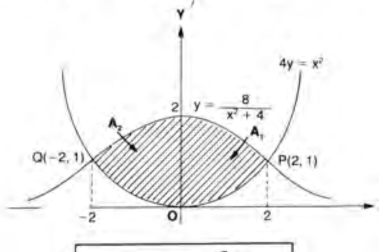
$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; $x^2 = -8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$ *no sirve*

$A_1 = A_2$

$A = 2A_1 = 2\int_0^2\left(\dfrac{8}{x^2+4} - \dfrac{x^2}{4}\right)dx = 2\int_0^2\left(\dfrac{8}{x^2+4} - \dfrac{x^2}{4}\right)dx =$

$= 16\int_0^2 \dfrac{dx}{x^2+4} - \dfrac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = 16\left[\dfrac{1}{2}\text{arc tg}\,\dfrac{x}{2}\right]_0^2 -$

$-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{8}{6} = 2\pi - \dfrac{4}{3}u^2$



SOLUCIÓN: $A = 2\pi - \dfrac{4}{3}\,u^2$

64. RESOLUCIÓN

La curva corta al eje de abscisas en:

$x^4(4+x) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$

$A_1 = A_2$

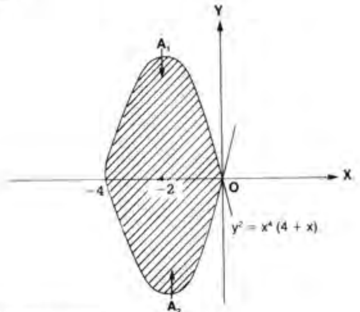
luego:

$A = 2A_1 = 2\int_{-4}^{0} y\,dx = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{4+x}\,dx =$

$= 2\int_0^2 (t^2-4)^2\cdot t\cdot 2t\,dt = 4\int_0^2 (t^4 - 8t^2 + 16)\,t^2\,dt =$

$= 4\int_0^2 (t^6 - 8t^4 + 16t^2)\,dt = 4\left[\dfrac{t^7}{7} - 8\,\dfrac{t^5}{5} + 16\,\dfrac{t^3}{3}\right]_0^2 =$

$= \dfrac{4\,096}{105}\,u^2$



CÁLCULOS AUXILIARES

$4 + x = t^2$	para $x = 0$; $t = 2$
$dx = 2t\,dt$	para $x = -4$; $t = 0$

SOLUCIÓN: $A = \dfrac{4096}{105}\,u^2$

65. RESOLUCIÓN

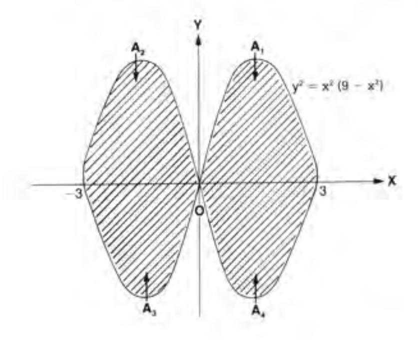
La curva corta al eje de abscisas en:

$x^2(9 - x^2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \end{array}\right.$

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$

$A = 4A_1 = 4\int_0^3 y\,dx = 4\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx =$

$= -\dfrac{4}{2}\int_9^0 \sqrt{t}\,dt = -\dfrac{4}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_9^0 = -\dfrac{4}{3}(-9\cdot\sqrt{9}) = 36\,u^2$



CÁLCULOS AUXILIARES

$9 - x^2 = t$	para $x = 0$; $t = 9$
$-2x\,dx = dt$	para $x = 3$; $t = 0$
$x\,dx = -\dfrac{dt}{2}$	

SOLUCIÓN: $A = 36\,u^2$

66. RESOLUCIÓN

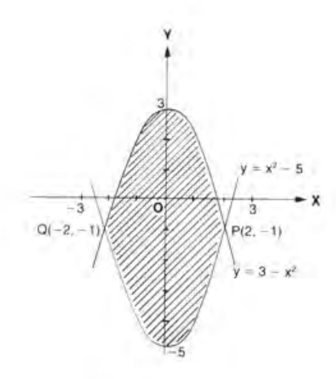
$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 5 \\ y = 3 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 5 = 3 - x^2$; $2x^2 = 8$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Los puntos de intersección son:

$P(2, -1)$; $Q(-2, -1)$

$A = \int_{-2}^{2}[3 - x^2 - (x^2 - 5)]\,dx = \int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)\,dx =$

$= \left|8x - 2\cdot\dfrac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \dfrac{64}{3}\,u^2$



SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{64}{3}\ u^2}$

67. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{matrix} y = 3 - 2x - x^2 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 1 \\ x = -3 \end{matrix}\right.$

La curva corta al eje X en los puntos:

$A(1, 0)$; $B(-3, 0)$

Ecuaciones de las tangentes en los puntos $A(1, 0)$ y $B(-3, 0)$:

$y - 0 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 4$

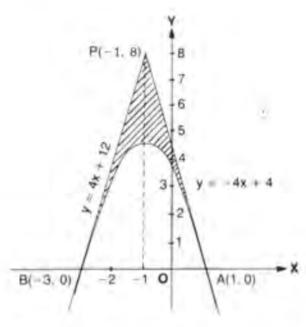
$y - 0 = 4(x + 3) \Rightarrow y = 4x + 12$

Punto de intersección de las tangentes:

$\left.\begin{matrix} y = -4x + 4 \\ y = 4x + 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(-1, 8)$

$A = \text{Área } A\widehat{P}B - \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\, dx = 16 - \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} =$

$= 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}\ u^2$



CÁLCULOS AUXILIARES

$y = 3 - 2x - x^2$ | para $x = 1 \Rightarrow y'_0 = -4$

$y' = -2 - 2x$ | para $x = -3 \Rightarrow y'_0 = 4$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \frac{16}{3}\ u^2}$

68. RESOLUCIÓN

El radio del círculo es:

$r = 2$

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$

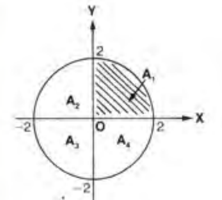
$A = 4A_1 = 4\int_0^2 y\, dx = 4\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2 t} \cdot 2\cos t\, dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cdot \cos t\, dt =$

$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt =$

$= 8\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt\right] = 8\left[t + \frac{\text{sen}\, 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= 8\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\text{sen}\,\pi}{4}\right) = \frac{8\pi}{2} = 4\pi\ u^2$



CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 2\,\text{sen}\, t \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{para } x = 0\ ;\ t = 0 \\ \text{para } x = 2\ ;\ t = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right.$

$dx = 2\cos t\, dt$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = 4\pi\ u^2}$

69. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

Los puntos de intersección son:

$P(1, \sqrt{3})$; $Q(1, -\sqrt{3})$

$A_1 = A_2$

$A = A_1 + A_2 = 2A_1$

$A = 2A_1 = 2\int_0^{\sqrt{3}} [\sqrt{4 - y^2} - (2 - \sqrt{4 - y^2})]\, dy =$

$= 2\int_0^{\sqrt{3}} (2\sqrt{4 - y^2} - 2)\, dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - y^2} - 1)\, dy =$

$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4 - y^2} + 2\,\text{arc sen}\,\frac{y}{2} - y\right]_0^{\sqrt{3}} =$

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) u^2$

CÁLCULOS AUXILIARES

$I = \int \sqrt{4 - y^2}\, dy \overset{(1)}{=} \int \sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2 t} \cdot 2\cos t\, dt =$

$= 4\int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cdot \cos t\, dt = 4I_1$

$I_1 = \int \cos t \overset{(2)}{\cdot} \cos t\, dt = \text{sen}\, t \cos t + \int \text{sen}^2 t\, dt =$

$= \text{sen}\, t\cos t + \int (1 - \cos^2 t)\, dt = \text{sen}\, t\cos t + t - I_1$

$2I_1 = \text{sen}\, t\cos t + t$; $I_1 = \frac{1}{2}[\text{sen}\, t\cos t + t]$

(1)			(2)
(1)	$y = 2\,\text{sen}\, t$ $dy = 2\cos t\, dt$	$u = \cos t$; $du = -\text{sen}\, t\, dt$ $dv = \cos t\, dt$; $v = \text{sen}\, t$	(2)

Luego:

$I = 4 \cdot I_1 = 2\,\text{sen}\, t\cos t + 2t = 2\frac{y}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} + 2\,\text{arc sen}\frac{y}{2} =$

$= \frac{y}{2}\sqrt{4 - y^2} + 2\,\text{arc sen}\,\frac{y}{2}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) u^2}$

70. RESOLUCIÓN

$\left.\begin{matrix} 8x = 2y^3 + y^2 - 2y \\ 8x = y^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^3 + y^2 - 2y = 0$

$y(y^2 + y - 2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y = 1 \\ y = -2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$

Las dos curvas se cortan en los puntos:

$P\left(\frac{1}{8}, 1\right)$; $O(0, 0)$; $Q(-1, -2)$

$A = A_1 + A_2$

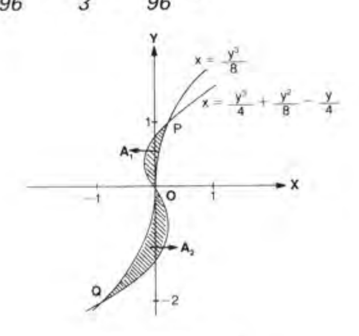
$A_1 = \int_0^1 \left|\frac{y^3}{8} - \left(\frac{y^3}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{y}{4}\right)\right| dy =$

$= \int_0^1 \left(-\frac{y^3}{8} - \frac{y^2}{8} + \frac{y}{4}\right) dy = \left|-\frac{y^4}{32} - \frac{y^3}{24} + \frac{y^2}{8}\right|_0^1 = \frac{5}{96}$

$$A_2 = \int_{-2}^{0}\left(\frac{y^3}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{y}{4} - \frac{y^3}{8}\right)dy =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{y^3}{8} + \frac{y^2}{8} - \frac{y}{4}\right)dy = \left[\frac{y^4}{32} + \frac{y^3}{24} - \frac{y^2}{8}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96}\ u^2$$

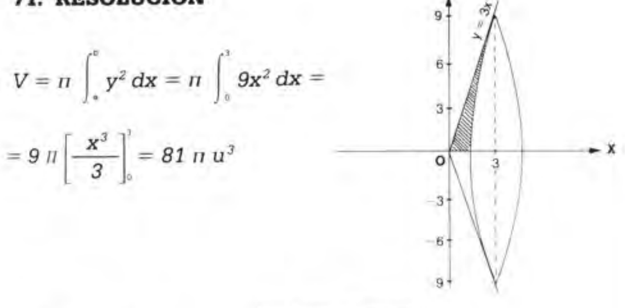


SOLUCIÓN: $\boxed{A = \dfrac{37}{96}\ u^2}$

71. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^3 9x^2\,dx =$$

$$= 9\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 81\,\pi\ u^3$$

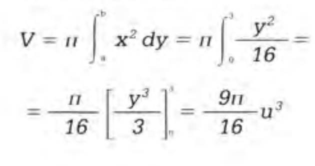


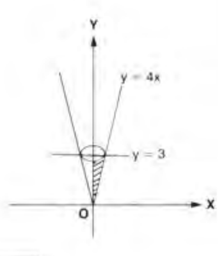
SOLUCIÓN: $\boxed{V = 81\,\pi\ u^3}$

72. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_0^3 \frac{y^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9\pi}{16}u^3$$



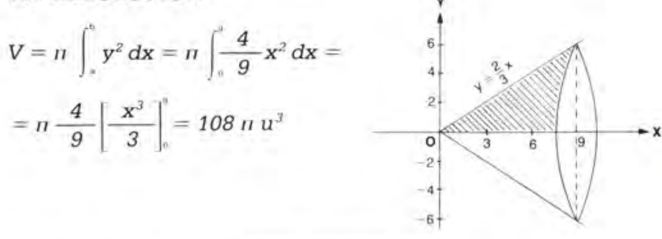


SOLUCIÓN: $\boxed{V = \dfrac{9\pi}{16}\ u^3}$

73. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^9 \frac{4}{9}x^2\,dx =$$

$$= \pi\,\frac{4}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^9 = 108\,\pi\ u^3$$

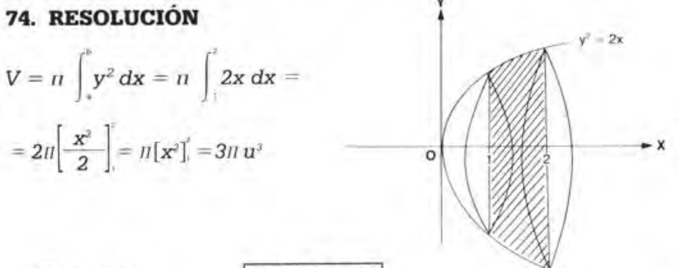


SOLUCIÓN: $\boxed{V = 108\,\pi\ u^3}$

74. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_1^2 2x\,dx =$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \pi[x^2]_1^2 = 3\pi\ u^3$$

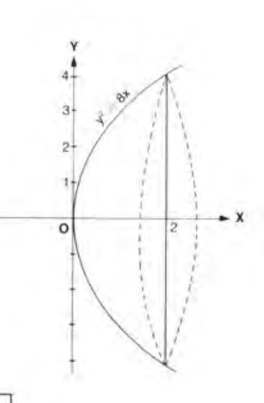


SOLUCIÓN: $\boxed{V = 3\,\pi\ u^3}$

75. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^2 8x\,dx =$$

$$= 8\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi\,[x^2]_0^2 = 16\,\pi\ u^3$$



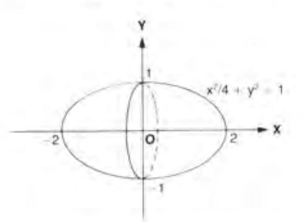
SOLUCIÓN: $\boxed{V = 16\,\pi\ u^3}$

76. RESOLUCIÓN

Los semiejes de la elipse son: a = 2 ; b = 1

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx = 2\pi\int_0^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx =$$

$$= 2\pi\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 2\pi\left(\frac{16}{12}\right) = \frac{8}{3}\pi\ u^3$$



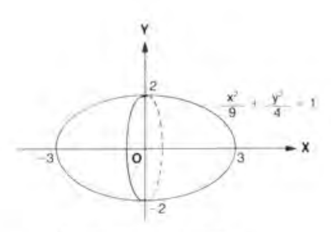
SOLUCIÓN: $\boxed{V = \dfrac{8}{3}\,\pi\ u^3}$

77. RESOLUCIÓN

Los semiejes de la elipse son: a = 3 ; b = 2

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_{-3}^{3} 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx = 2\pi\int_0^3 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx =$$

$$= 8\pi\left[x - \frac{x^3}{27}\right]_0^3 = 8\pi\,(3 - 1) = 16\,\pi\ u^3$$

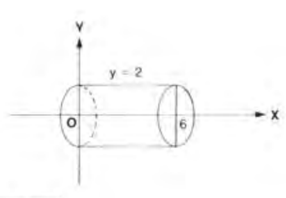


SOLUCIÓN: $\boxed{V = 16\,\pi\ u^3}$

78. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^6 2^2\,dx =$$

$$= 4\pi\int_0^6 dx = 4\pi\,[x]_0^6 = 24\,\pi\ u^3$$



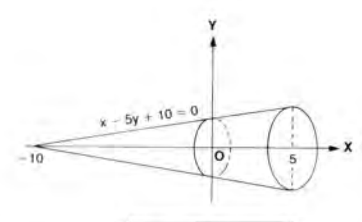
SOLUCIÓN: $\boxed{V = 24\,\pi\ u^3}$

79. RESOLUCIÓN

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^5\left(\frac{x + 10}{5}\right)^2 dx = \frac{\pi}{25}\int_0^5 (x + 10)^2\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{25}\left[\frac{(x + 10)^3}{3}\right]_0^5 = \frac{\pi}{75}[3\,375 - 1\,000] = \frac{2\,375}{75}\pi =$$

$$= \frac{95\,\pi}{3}\ u^3$$



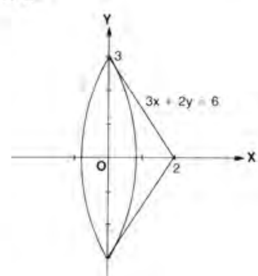
SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{95\,\pi}{3}\ u^3}$

80. RESOLUCIÓN

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{6-3x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^2 (6-3x)^2\,dx =$$

$$= -\frac{\pi}{12}\int_6^0 t^2\,dt = -\frac{\pi}{12}\left[\frac{t^3}{3}\right]_6^0 = -\frac{\pi}{36}\left[t^3\right]_6^0 =$$

$$= -\frac{\pi}{36}(-216) = 6\,\pi\,u^3$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$6 - 3x = t \Rightarrow \begin{cases} para\ \ x = 0\ ;\ t = 6 \\ para\ \ x = 2\ ;\ t = 0 \end{cases}$$

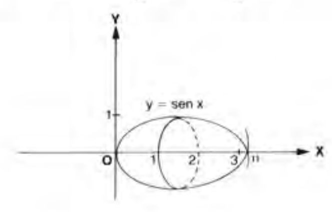
$$dx = -\frac{dt}{3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 6\,\pi\,u^3}$

81. RESOLUCIÓN

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^\pi sen^2\,x\,dx = \pi\left[\frac{x - sen\,x\cos x}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - sen\,x\cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}(\pi) = \frac{\pi^2}{2}\,u^3$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$I = \int sen^2\,x\,dx = \int sen\,x\,sen\,x\,dx = -sen\,x\cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= -sen\,x\cos x + \int (1 - sen^2\,x)\,dx = -sen\,x\cos x + x - I$$

$$2\,I = x - sen\,x\cos x$$

$$I = \frac{x - sen\,x\cos x}{2}$$

$u = sen\,x\ ;\ du = \cos x\,dx$
$dv = sen\,x\,dx\ ;\ v = -\cos x$

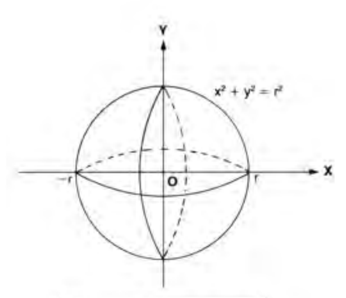
SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{\pi^2}{2}\ u^3}$

82. RESOLUCIÓN

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx =$$

$$= 2\,\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\,\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) =$$

$$= 2\,\pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,u^3$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,u^3}$

83. RESOLUCIÓN

Ecuación de AB:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \frac{x-3}{6-3} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow y = x - 3$$

Ecuación de BC:

$$\frac{x-6}{8-6} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 12$$

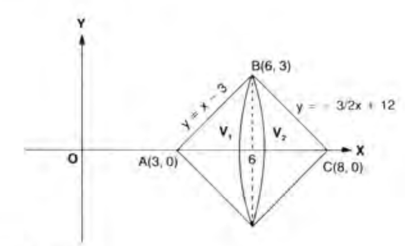
$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_3^6 (x-3)^2\,dx = \pi\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_3^6 = 9\,\pi\,u^3$$

$$V_2 = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_6^8 \left(-\frac{3}{2}x - 12\right)^2 dx = -\frac{2}{3}\pi \int_3^0 t^2\,dt =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^0 = 6\,\pi\,u^3$$

$$V = V_1 + V_2 = 9\,\pi + 6\,\pi = 15\,\pi\,u^3$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$-\frac{3}{2}x - 12 = t \Rightarrow \begin{cases} x = 6\ ;\ t = 3 \\ x = 8\ ;\ t = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}\,dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{2}{3}\,dt$$

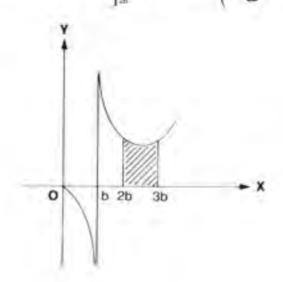
SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 15\,\pi\,u^3}$

84. RESOLUCIÓN

$$y^2x = ax^2 + by^2\ ;\ (x-b)\,y^2 = ax^2\ ;\ y^2 = \frac{ax^2}{x-b}$$

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_{2b}^{3b} \frac{ax^2}{x-b}\,dx = \pi\,a \int_{2b}^{3b}\left(x + b + \frac{b^2}{x-b}\right)dx =$$

$$= \pi\,a\left[\frac{x^2}{2} + bx + b^2\,L\,|x-b|\right]_{2b}^{3b} = \pi\,ab^2\left(\frac{7}{2} + L\,2\right)u^3$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \pi\, ab^2 \left(\frac{7}{2} + L2\right) u^3}$

85. RESOLUCIÓN

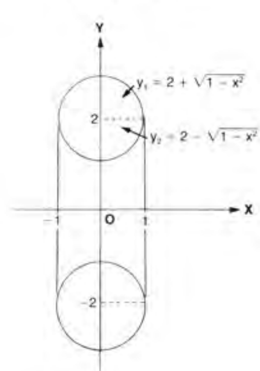
$$V = \pi \int_{-1}^{1} (y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} [(2 + \sqrt{1 - x^2})^2 -$$

$$- (2 - \sqrt{1 - x^2})^2]\, dx = 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx =$$

$$= 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2 t} \cdot \cos t\, dt = 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= 8\pi \left[t + \frac{sen\, 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi \left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi^2 u^3$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$x = sen\, t \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ ;\ t = 0 \\ x = 1\ ;\ t = \pi/2 \end{cases}$$

$dx = \cos t\, dt$

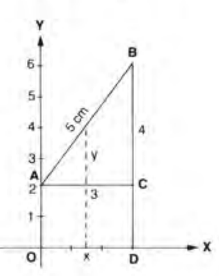
SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 4\pi^2\, u^3}$

86. RESOLUCIÓN

$$\overline{OD} = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{4x + 6}{3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{9} \left[\frac{(4x + 6)^3}{12}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{\pi}{108} [18^3 - 6^3] = \frac{95\pi}{54}\, u^3$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$A\ (0, 2)\quad B\ (3, 6)\qquad \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 6}{4}\qquad y = \frac{4x + 6}{3}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{95\pi}{54}\, u^3}$

87. RESOLUCIÓN

Ecuación de la recta AB:

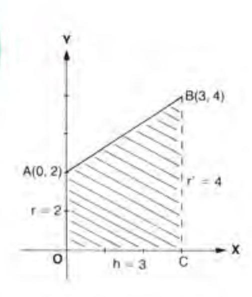
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y - 2}{4 - 2}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y - 2}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x + 2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 4\right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^3 = 28\pi\, u^3$$

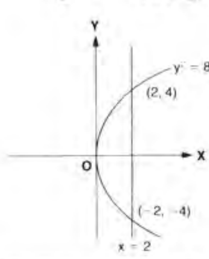


SOLUCIÓN: $\mathbf{V = 28\pi\, u^3}$

88. RESOLUCIÓN

$$V = \pi \int_a^b \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy = \pi \int_{-4}^{4} \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy = 2\pi \left[4y - \frac{y^5}{320}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}\, u^3$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{128\pi}{5}\, u^3}$

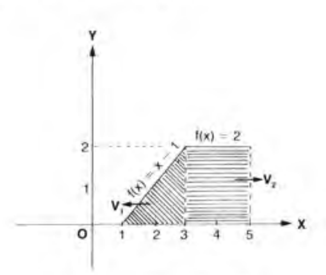
89. RESOLUCIÓN

$V = V_1 + V_2$

$$V_1 = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_1^3 (x - 1)^2\, dx = \pi \left[\frac{(x - 1)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{8}{3}\pi\, u^3$$

$$V_2 = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_3^5 2^2\, dx = 4\pi \int_3^5 dx = 4\pi\, [x]_3^5 = 8\pi\, u^3$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{8}{3}\pi + 8\pi = \frac{32\pi}{3}\, u^3$$



SOLUCIÓN: $\mathbf{V = \frac{32\pi}{3}\, u^3}$

90. RESOLUCIÓN

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} =$$

$$= \int_0^1 x^{-1/3}\, dx = \frac{3}{2}\, [x^{2/3}]_0^1 = \frac{3}{2}\, u$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} \cdot y' = 0$

$x^{-1/3} + y^{-1/3} \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{L = \frac{3}{2}\, u}$

91. RESOLUCIÓN

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \int_0^r \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = r\int_0^r \frac{\frac{1}{r}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} = \left[r \text{ arc sen } \frac{x}{r}\right]_0^r = r\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r}{2}\,u$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 + y^2 = r^2$

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$x + y \cdot y' = 0$

$y' = -\dfrac{x}{y}$

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{L = \frac{\pi r}{2}\,u}}$

92. RESOLUCIÓN

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x+e^{-x})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,[e^x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2-1}{2e}\,u$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$

$y' = \dfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$

$y'^2 = \dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{4}$

$1 + y'^2 = 1 + \dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \dfrac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} =$

$= \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{L = \frac{e^2-1}{2e}\,u}}$

93. RESOLUCIÓN

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+\frac{x^2}{16}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+16} + 8\,L\,|x+\sqrt{16+x^2}|\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{8}\left[x\sqrt{x^2+16} + 16\,L\,|x+\sqrt{16+x^2}|\right]_0^3 = \frac{1}{8}(15 + 16\,L2)\,u$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$I = \int \sqrt{x^2+16}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2+16}\ ;\ du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+16}} \\ dv = dx\ ;\ v = x \end{array}\right\} =$$

$$= x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}} = x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{x^2+16-16}{\sqrt{x^2+16}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{(x^2+16)\,dx}{\sqrt{x^2+16}} + 16\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+16} - \int \sqrt{x^2+16}\,dx + 16\int \frac{4\sec^2 t\,dt}{\sqrt{16+16\,tg^2\,t}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+16} - I + 16\int \frac{\sec^2 t\,dt}{\sec t} = x\sqrt{x^2+16} - I +$$

$$+ 16\int \sec t\,dt = x\sqrt{x^2+16} - I + 16\,L\,|\sec t + tg\,t|$$

$2I = x\sqrt{x^2+16} + 16\,L\,|x + \sqrt{x^2+16}|$

$I = \dfrac{1}{2}\,[x\sqrt{x^2+16} + 16\,L\,|x+\sqrt{x^2+16}|]$

$x = 4\,tg\,t$

$dx = 4\sec^2 t\,dt$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{L = \frac{1}{8}\,(15 + 16\,L2)\,u}}$

94. RESOLUCIÓN

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{1}{4}}\,dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{5}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2 dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\,[x]_0^2 = \sqrt{5}\,u$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$y = \dfrac{x}{2} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}$

$y'^2 = \dfrac{1}{4}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{L = \sqrt{5}\,u}}$

95. RESOLUCIÓN

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int_1^{10} \sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}\,dt =$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_1^{10} = \frac{8}{27}\,[t\sqrt{t}]_1^{10} = \frac{8}{27}\,[10\sqrt{10} - 1]$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$1 + \dfrac{9}{4}x = t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0\ ;\ t = 1 \\ x = 4\ ;\ t = 10 \end{array}\right.$

$\dfrac{9}{4}\,dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{4}{9}\,dt$

$y^2 = x^3 \Rightarrow y = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$

$y' = \dfrac{3}{2}\,x^{1/2}\ ;\ y'^2 = \dfrac{9}{4}\,x$

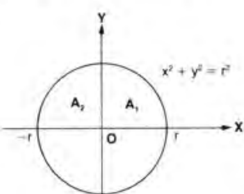
SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{L = \frac{8}{27}\,[10\sqrt{10} - 1]\,u}}$

96. RESOLUCIÓN

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$

$$= 4\pi\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi\int_0^r r\,dx =$$

$$= 4\pi r\int_0^r dx = 4\pi r\,[x]_0^r = 4\pi r\,(r) = 4\pi r^2$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

$1 + y'^2 = 1 + \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{y^2+x^2}{y^2} = \dfrac{r^2}{r^2-x^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{S = 4\pi r^2\,u^2}}$

97. RESOLUCIÓN

$$S = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$
$$= 2\pi \int_0^\pi sen\,x\sqrt{1+cos^2 x} = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\,dt =$$
$$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + L\,(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \pi\,[[\sqrt{2} + L\,(1+\sqrt{2})] - [-\sqrt{2} + L\,(-1+\sqrt{2})]] =$$
$$= \pi\sqrt{2} + \pi\,L\,(1+\sqrt{2}) + \pi\sqrt{2} - \pi\,L\,(\sqrt{2}-1) =$$
$$= 2\pi\sqrt{2} + \pi\,L\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right| = 2\pi\sqrt{2} + \pi\,L\,(3+2\sqrt{2})$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$cos\,x = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$
$$sen\,x\,dx = -dt$$
$$I = \int \sqrt{1+t^2}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = t\sqrt{1+t^2} -$$
$$- \int \frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int\sqrt{1+t^2}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$
$$= t\sqrt{1+t^2} - I + \int \frac{sec^2 z\,dz}{\sqrt{1+tg^2 z}} = t\sqrt{1+t^2} - I + \int sec\,z\,dz =$$
$$= t\sqrt{1+t^2} - I + L\,|sec\,z + tg\,z|$$
$$2I = t\sqrt{1+t^2} + L\,|\sqrt{1+t^2}+t|$$
$$I = \frac{1}{2}\,[t\sqrt{1+t^2} + L\,|\sqrt{1+t^2}+t|]$$
$$t = tg\,z$$
$$dt = sec^2 z\,dz$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = [2\pi\sqrt{2} + \pi L\,(3+2\sqrt{2})]\,u^2}$

98. RESOLUCIÓN

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{4x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx =$$
$$= 4\pi \int_0^3 \sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = 4\pi \int_1^4 \sqrt{t}\,dt =$$
$$= 4\pi \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = \frac{8\pi}{3}\,[t\sqrt{t}]_1^4 = \frac{8\pi}{3}\,[4\cdot\sqrt{4} - 1] = \frac{56}{3}\pi$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$$
$$y' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$x + 1 = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ ;\ t = 1 \\ x = 3\ ;\ t = 4 \end{cases}$$
$$dx = dt$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{56}{3}\pi\,u^2}$

99. RESOLUCIÓN

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx =$$
$$= \frac{2\pi}{36}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{18}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_1^{10} = \frac{2\pi}{54}\,[t\sqrt{t}]_1^{10} =$$
$$= \frac{\pi}{27}\,[10\sqrt{10} - 1]$$

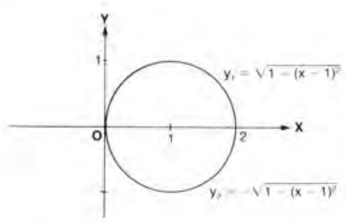
CÁLCULOS AUXILIARES

$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2\ ;\ y'^2 = 9x^4$$
$$1 + 9x^4 = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ ;\ t = 1 \\ x = 1\ ;\ t = 10 \end{cases}$$
$$36x^3\,dx = dt$$
$$x^3\,dx = \frac{dt}{36}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{\pi}{27}\,[10\sqrt{10} - 1]\,u^2}$

100. RESOLUCIÓN

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$
$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-(x-1)^2}}\,dx = 4\pi \int_0^1 dx =$$
$$= 4\pi\,[x]_0^1 = 4\pi$$



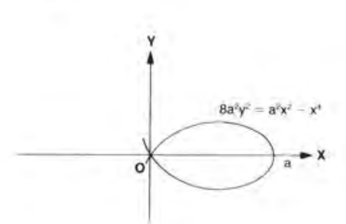
CÁLCULOS AUXILIARES

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sqrt{1-(x-1)^2} \\ y_2 = -\sqrt{1-(x-1)^2} \end{cases}$$
$$y = \sqrt{1-(x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{-2\,(x-1)}{2\sqrt{1-(x-1)^2}} = -\frac{(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$
$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x-1)^2}{1-(x-1)^2} = \frac{1}{1-(x-1)^2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = 4\pi\,u^2}$

101. RESOLUCIÓN

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$
$$= 2\pi \int_0^a \frac{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}{2\sqrt{2}\cdot a}\cdot\sqrt{\frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)}}\,dx =$$
$$= 2\pi \int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{2}\cdot a}\cdot\frac{(3a^2 - 2x^2)}{2\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$
$$= \frac{2\pi}{8a^2}\int_0^a x\,(3a^2 - 2x^2)\,dx = \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a (3a^2x - 2x^3)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{4a^2}\left[\frac{3a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4a^2}\cdot\frac{2a^4}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$\left.\begin{matrix} 8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(a^2 - x^2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ a^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm a \end{cases}$$
$$8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4 \Rightarrow 16a^2yy' = 2a^2x - 4x^3$$
$$y' = \frac{2a^2x - 4x^3}{16a^2y} = \frac{a^2x - 2x^3}{8a^2y}$$
$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{a^2x - 2x^3}{8a^2y}\right)^2 = \frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)}$$
$$8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2(a^2 - x^2)}{8a^2} \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{2}\cdot a}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{\pi}{4}\,a^2\,u^2}$

Bloque 12

- ✔ Espacios vectoriales
- ✔ Subespacio vectorial
- ✔ Determinantes
- ✔ Resolución de sistemas por la regla de Cramer

ESPACIOS VECTORIALES

Concepto de espacio vectorial

Se dice que un conjunto V *tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo* K, *si:*

a. *Se ha definido una ley de composición interna en* V, *es decir, una aplicación de* $V \times V \longrightarrow V$, *la adición, tal que (V, +) tiene estructura de grupo abeliano.*

b. *Se ha definido una ley de composición externa en* V, *es decir, una aplicación de* $K \times V \longrightarrow V$, *tal que:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (k_1 + k_2)\,\vec{v}_1 = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_1 \\ \text{II.} & k_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 \\ \text{III.} & k_1(k_2\,\vec{v}_1) = (k_1\,k_2)\,\vec{v}_1 \\ \text{IV.} & 1 \times \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\, k_1, k_2 \in K \\ \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \end{array}$$

Dependencia lineal de los vectores de un espacio vectorial

El $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$, *pertenecientes a un espacio vectorial* V *definido sobre un cuerpo* K, *se dice que son linealmente dependientes, o que forman un sistema ligado, si los números* $k_1, k_2, ..., k_n$ *que verifican:*

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

no han de ser necesariamente $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$

Independencia lineal de los vectores de un espacio vectorial

El $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$, *pertenecientes a un espacio vectorial* V *definido sobre un cuerpo* K, *se dice que son linealmente independientes, o que forman un sistema libre, si los números* $k_1, k_2, ..., k_n$ *que verifican:*

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

han de ser necesariamente $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$

Combinación lineal de vectores

Una $\vec{a} \neq \vec{0}$, *perteneciente a un espacio vectorial* V *definido sobre un cuerpo* K, *es combinación lineal de los* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, *pertenecientes a* V, *si existen* n *números* $k_1, k_2, ..., k_n$ *pertenecientes al cuerpo* K, *tales que:*

$$\vec{a} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n$$

Sistemas de generadores

El $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, *pertenecientes a un espacio vectorial* V *definido sobre un cuerpo* K, *forman un sistema de generadores de* V *si todo* $\vec{v} \in V$ *se puede expresar como combinación lineal de los* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$.

Base de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, *de un espacio vectorial* V *definido sobre un cuerpo* K, *se dice que forman una base de* V *si los vectores del conjunto* B *son linealmente independientes y, además, forman un sistema de generadores.*

Coordenadas de un vector

Se llaman coordenadas de un $\vec{v}$, *perteneciente a un espacio vectorial* V *definido sobre un cuerpo* K, *respecto de la base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, *a los números* $x_1, x_2, ... x_n$ *que verifican:*

$$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demostrar que los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, siendo a y b elementos de **Q**, constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo **Q**.

SOLUCIÓN:

El C = $\{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Q, b \in Q\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

2. Determinar si los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, siendo a y b elementos de **Z**, constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo **Q**.

SOLUCIÓN:

El C = $\{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Z, b \in Z\}$ no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

3. Llamando $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$, y definiendo en $R_2[x]$ la suma y el producto por un número real, del siguiente modo:

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x + b_2y + c_2z) =$$
$$= (a_1 + a_2)\,x^2 + (b_1 + b_2)\,x + (c_1 + c_2)$$
$$k_1\,(a_1x^2 + b_1x + c_1) = (k_1\,a_1)\,x^2 + (k_1b_1)\,x + (k_1c_1)$$

probar que $R_2[x]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo **R**.

SOLUCIÓN:

El $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

4. En R^2 definimos las operaciones adición y multiplicación por un escalar del siguiente modo:

$$\forall\,(a, b), (a', b') \in R^2:\ (a, b) + (a', b') = [(a + a'), (b + b')]$$
$$\forall\,(a, b) \in R^2;\ \forall\, k \in R;\ k\,(a, b) = [ka, 0]$$

Determinar si se ha definido un espacio vectorial de R^2 sobre **R**.

SOLUCIÓN: **El R^2 tal como se han definido la adición y multiplicación por un escalar no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.**

5. Determinar si los $\vec{a}\,(1, 2, 1)$, $\vec{b}\,(-3, 8, 1)$ y $\vec{c}\,(3, -1, 1)$ son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN: **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son linealmente dependientes**

6. Determinar si los $\vec{a}\,(1, 0, 0)$, $\vec{b}\,(0, 1, 1)$ y $\vec{c}\,(0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

SOLUCIÓN: **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente independientes**

7. Determinar si los $\vec{a}\,(1, 1, 1)$, $\vec{b}\,(2, 3, 4)$ y $\vec{c}\,(0, 1, 2)$ son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN: **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente dependientes**

8. Sean:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\ ;\ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{c} = 6\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}\ ;\ \vec{d} = 5\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$$

Expresar el $\vec{a}$ como combinación lineal de los otros tres.

SOLUCIÓN: **El $\vec{a}$, no es combinación lineal de los $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$**

9. En el $\mathbf{R}^3$ expresar el $\vec{j}$ como combianción lineal de los
$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\vec{j} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{11}{20}\vec{b} - \frac{3}{20}\vec{c}}$

10. Determinar m para que los
$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} - m\vec{j} + 2m\vec{k}$
sean linealmente dependientes.

SOLUCIÓN: $\boxed{m = \frac{1}{2}}$

11. Determinar λ para que los $\vec{a}\,(-1, 4, 2)$; $\vec{b}\,(3, \lambda, -2)$ y $\vec{c}\,(2, 5, 6)$ estén en el mismo plano.

SOLUCIÓN: $\boxed{\lambda = -\frac{34}{5}}$

12. Se sabe que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente dependientes:

I. ¿Se puede asegurar que el $\vec{a}$ es combinación lineal de los otros dos?
II. ¿Se puede asegurar que el $\vec{b}$ es combinación lineal de los otros dos?
III. ¿Y el $\vec{c}$?
IV. ¿Se puede asegurar que uno de los tres es combinación lineal de los otros dos?

SOLUCIÓN: **Se puede asegurar que alguno de los tres es combinación lineal de los otros dos.**

13. Demostrar que los $\vec{u}_1\,(1, 1, 1)$; $\vec{u}_2\,(2, 1, 3)$; $\vec{u}_3\,(1, -2, -4)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Hallar las coordenadas del $\vec{a}\,(3, -5, -13)$ en la citada base.

SOLUCIÓN: $\boxed{\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3}$

14. Comprobar que en el espacio vectorial $\mathbf{R}_2[x]$ $\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c, \in \mathbf{R}\}$ los vectores 1; x; x (x − 1) forman una base. Hallar las coordenadas del vector $x^2 + 5x + 2$ en dicha base.

SOLUCIÓN: **(2, 6, 1)**

15. Averiguar si los polinomios:
$P(x) = x^2 - 3x + 1$; $Q(x) = x^2 - x + 2$; $R(x) = x - 3$
forman una base de $\mathbf{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$

SOLUCIÓN:

Como los polinomios P(x), Q(x), R(x) son linealmente independientes y además forman sistema de generadores, constituyen una base de $R_2\{x\}$.

16. Escribir un conjunto de tres vectores que no formen un sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$. ¿Se pueden escribir dos vectores de $\mathbf{R}^3$ que formen un sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$? Razonar las respuestas.

SOLUCIÓN a): **Basta que uno de ellos sea combinación lineal de los otros dos.**

SOLUCIÓN b): **No se pueden escribir dos vectores de** R^3 **que formen un sistema de generadores de** R^3.

17. Sean los $\vec{u}_1\,(1, -1, 2)$; $\vec{u}_2\,(0, 1, 0)$ y $\vec{u}_3\,(1, 0, -1)$ que forman una base B de $\mathbf{R}^3$ y las $\vec{v}_1\,(2, 0, 1)$; $\vec{v}_2\,(1, -2, 2)$ y $\vec{v}_3\,(-1, 1, 1)$ que forman otra base B′ de $\mathbf{R}^3$, hallar:

I. Las fórmulas de paso de la base B′ a la B.
II. Las fórmulas de paso de la base B a la B′

SOLUCIÓN I):

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' + z' \\ z = x' - z' \end{cases}$$

SOLUCIÓN II):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + y + z}{3} \\ y' = \dfrac{2x - y - z}{3} \\ z' = \dfrac{x + y - 2z}{3} \end{cases}$$

18. Sabiendo que los $\vec{u}_1\,(0, -2, 0)$; $\vec{u}_2\,(2, -2, 1)$ y $\vec{u}_3\,(0, 1, 2)$ forman una base B de $\mathbf{R}^3$ y que los $\vec{v}_1\,(-4, 4, 2)$; $\vec{v}_2\,(-2, -3, -3)$ y $\vec{v}_3\,(2, -1, 3)$ forman otra base B′ de $\mathbf{R}^3$, hallar las fórmulas de paso de la base B′ a la B.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x = x' + 2y' \\ y = -2x' - y' + z' \\ z = 2x' - y' + z' \end{cases}$$

19. Dadas las bases:
$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$
se pide:

I. Las ecuaciones del cambio de la base B a B′
II. Sabiendo que $\vec{v}\,(2, 1, -3)$ respecto de la B, hallar sus coordenadas respecto a B′.
III. Las ecuaciones del cambio de la base B′ a la B.
IV. Sabiendo que $\vec{w}\,(6, -1, -4)$ respecto de B′, hallar sus coordenadas respecto a B.

SOLUCIÓN III):

$$\begin{cases} x = x' + z' \\ y = x' + y' + z' \\ z = -y' + z' \end{cases}$$

SOLUCIÓN IV): $\boxed{\vec{w}_B = (2, 1, -3)}$

SOLUCIÓN I):

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + y \\ z' = -x + y + z \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\vec{v}_{B'}\,(6, -1, -4)}$

20. Las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respecto de una base B de $\mathbf{R}^2$ son (1, 1) y (0, 2) respectivamente. Las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respecto de otra base B′ de $\mathbf{R}^2$ son respectivamente, (0, 1) y (2, 3). Hallar las fórmulas de cambio de base.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}x' + y' \\ y = -\dfrac{1}{2}x' + y' \end{cases}$$

SUBESPACIO VECTORIAL

Concepto de subespacio vectorial

Sean (V, + , ·) *un espacio vectorial, definido sobre un cuerpo* K, *y* S *un subconjunto no vacío de* V. *Si se verifica que* S *tiene estructura de espacio vectorial para las mismas leyes que* V, *decimos que* (S, + , ·) *es un subespacio vectorial de* (V, + , ·).

La condición necesaria y suficiente para que S, *subconjunto no vacío de* V, *sea un subespacio vectorial de* (V, + , ·) es que se verifiquen los dos requisitos siguientes:

I. $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in S: \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in S$
II. $\forall \vec{v}_1 \in S; \forall k_1 \in K: k_1 \vec{v}_1 \in S$

Variedad lineal

Se llama variedad lineal engendrada por dos, tres,... vectores de un espacio vectorial (V, + , ·), *al subconjunto de* V *formado por todos los vectores de V que son combinación lineal de aquellos dos, tres,... vectores.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

21. Sea $V = \{\vec{v}\ (x_1, x_2, x_3)\}$ que verifican una ecuación del tipo $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$, siendo α, β, γ números reales fijos. Probar que V es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

SOLUCIÓN:

Siendo V $\neq \varnothing$ y verificándose los dos requisitos analizados, queda probado que V es un subespacio vectorial de R^3.

22. Sean $\vec{a}\ (1, 2, 1)$ y $\vec{b}\ (2, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$. Sean α y β números reales cualesquiera y sea $V = \{\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\}$. Probar que V es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$. Hallar las ecuaciones paramétricas de V e indicar su dimensión.

SOLUCIÓN I):

Siendo V $\neq \varnothing$ y verificándose los dos requisitos exigibles, queda probado que V es un subespacio vectorial de R^3.

SOLUCIÓN II):

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha + \mathbf{2}\beta \\ \mathbf{y} = \mathbf{2}\alpha + \beta \\ \mathbf{z} = \alpha + \beta \end{cases}$$

SOLUCIÓN III): **Su dimensión es DOS**

23. Hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de V, subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, engendrado por los vectores $\vec{a}\ (1, 2, 2)$ y $\vec{b}\ (2, 3, 5)$

SOLUCIÓN I):

$$\begin{cases} \mathbf{x = k_1 + 2k_2} \\ \mathbf{y = 2k_1 + 3k_2} \\ \mathbf{z = 2k_1 + 5k_3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN II): $\mathbf{4x - y - z = 0}$

24. Hallar el valor de t para que el $\vec{x}\ (3, 8, t)$ esté en V, subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ engendrado por los vectores $\vec{u}\ (1, 2, 3)$ y $\vec{v}\ (1, 3, -1)$.

SOLUCIÓN: $\mathbf{t = 1}$

25. Demostrar que los vectores de la forma (x, y, z), $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$, forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$. Encontrar la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de ese subespacio para la cual:

$$(5, 3, 5) = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$
$$(3, 2, 3) = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\vec{u}_1\ (1, 0, 1)\ ;\ \vec{u}_2\ (1, 1, 1)}$

26. Averiguar cuánto debe valer *a* para que el $\vec{v}\ (1, a, 5)$ pertenezca a la variedad lineal engendrada por los $\vec{v}_1\ (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_2\ (1, 1, 1)$.

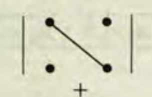
SOLUCIÓN: $\mathbf{a = 3}$

DETERMINANTES

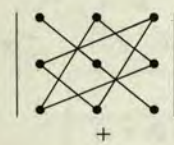
Determinante de una matriz cuadrada

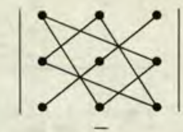
Formados todos los productos de n factores, elegidos entre los n^2 elementos de una matriz cuadrada de orden n, de modo que en cada producto haya un factor y sólo uno de cada fila, y uno y sólo uno de cada columna, y anteponiendo a cada producto el signo más o menos según que las permutaciones de los números que indican las filas y las columnas sean de la misma o distinta clase, se obtiene un polinomio que se llama determinante de la matriz dada.

Determiantes de orden dos



Determinantes de orden tres





Propiedades de los determinantes

I. *El valor de un determinante no varía si se cambian filas por columnas y columnas por filas, sin alterar el orden relativo de los elementos.*

II. *Si se cambian entre sí dos líneas paralelas, sin alterar el orden relativo de los elementos, el valor absoluto del determinante no varía, pero cambia de signo.*

III. *El valor de un determinante con dos líneas paralelas iguales es cero.*

IV. *Si todos los elementos de una línea los multiplicamos por un número λ, el valor del determinante queda multiplicado por λ.*

V. *El valor de un determinante con dos líneas paralelas proporcionales es cero.*

VI. *Si los elementos de una línea son polinomios de n términos, se puede descomponer el determinante en suma de n determinantes, que tienen las mismas restantes líneas, y en lugar de aquélla, la formada por los primeros sumandos, por los segundos, ..., por los enésimos.*

VII. *El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea les sumamos los correspondientes de otra paralela multiplicados por un número cualquiera λ, los de otra paralela multiplicados por otro número cualquiera k, etc.*

VIII. *El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea multiplicados por sus adjuntos correspondientes.*

IX. *La suma de los elementos de una línea multiplicados por los adjuntos de los elementos correspondientes de una paralela a ella es cero.*

Determinante de Vandermonde o de las diferencias

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(e-a)(c-b)(d-b)(e-b)(d-c)(e-c)(e-d)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

27. Calcular el valor de los determinantes siguientes:

I) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ **II)** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

III) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **IV)** $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\Delta_1 = 11}$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\Delta_2 = -16}$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\Delta_3 = 32}$

SOLUCIÓN IV): $\boxed{\Delta_4 = 14}$

28. Calcular el valor de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = 337}$

29. Calcular el valor de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & -2 & 12 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = 0}$

30. Calcular el valor de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & 10 & -10 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = 0}$

31. Comprobar, sin desarrollos, que son nulos los siguientes determinantes.

I) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ **II)** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

III) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 12 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\Delta_1 = 0}$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\Delta_2 = 0}$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\Delta_3 = 0}$

32. Comprobar, sin desarrollar, lo que en cada caso se indica:

I) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \dot{18}$ **II)** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \dot{15}$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\Delta_1 = \dot{18}}$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\Delta_2 = \dot{15}}$

33. Comprobar que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = (a+1)^3$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = (a+1)^3}$

34. Comprobar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b)}$

35. Probar que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

36. Probar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2\,000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2\,000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2\,000 \end{vmatrix} = 12$$

37. Probar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} b & \operatorname{sen} c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a)$$

38. Probar, sin desarrollo, que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

39. Probar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc$$

40. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 9 & -1 \\ -2 & x^2 & 0 & 2 \\ -2 & x^2-1 & 2x^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 1 \ ; \ x_2 = -1 \ ; \ x_3 = 3 \ ; \ x_4 = -3}$

41. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & x \\ 10 & -26 & 33 & 49 \\ 4 & 10x & 10 & 34 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 2 \ ; \ x_2 = -2/5}$

42. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 & 1 \\ 2 & -10 & 13 & -1 \\ -2 & x^2 & 0 & 2 \\ 0 & -1/2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 1 \ ; \ x_2 = -1 \ ; \ x_3 = 3 \ ; \ x_4 = -3}$

43. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x = \dfrac{-abcd}{bc(a+d) + ad(b+c)}}$

44. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 5 \\ x^2 & 4 & 9 & 25 \\ x^3 & 8 & -27 & 125 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 2 \ ; \ x_2 = -3 \ ; \ x_3 = 5}$

45. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x_1 = 1 \ ; \ x_2 = 1 \ ;\ldots; \ x_6 = 1}$

46. Obtener, basándose en las propiedades de los determinantes, las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN:

$x_1 = 1 \ ; \ x_2 = 1 \ ; \ x_3 = -1 \ ; \ x_4 = 1$

$$x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

47. Probar, mediante transformaciones que no alteren el valor del determinante, que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a+x \end{vmatrix} = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$

REGLA DE CRAMER

Regla de Cramer

Un sistema de n *ecuaciones lineales con* n *incógnitas, cuyo determinante es no nulo, tiene solución única. El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante del sistema, el determinante formado sustituyendo por los términos constantes, que están en el segundo miembro, la columna que forman los coeficientes de dicha incógnita.*

Ejemplo:

48. Resolver, aplicando la Regla de Cramer, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = 9 \\ 5x - 3y - z = 0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ; y = 3 ; z = 1**

48. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-84}{-28} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-28} = 1$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ; y = 3 ; z = 1**

EJERCICIOS PROPUESTOS

48. Resolver, aplicando la Regla de Cramer, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = 9 \\ 5x - 3y - z = 0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ; y = 3 ; z = 1**

49. Resolver, aplicando la Regla de Cramer, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 4z = -9 \\ x + 3y - z = 8 \\ 3x - 4y + 2z = -4 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ; y = 1 ; z = −3**

50. Resolver, aplicando la Regla de Cramer, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 7v = 26 \\ x + 3y - v = -5 \\ 3x - y + 2v = 5 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = −1 ; y = 0 ; v = 4**

51. Resolver, aplicando la Regla de Cramer, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = \frac{37}{12} \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = -\frac{5}{6} \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **x = 3 ; y = 1 ; z = 4**

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

Sea $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$

I. *Ley de composición interna:*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$
$$(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] \in C$$

La adición es ley de composición interna en C
$$[x \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{Q} \Rightarrow (x + z) \in \mathbf{Q}, ...]$$

II. *Propiedad conmutativa:*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$
$$(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}]$$
$$(z + t\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = [(z + x) + (t + y)\sqrt{2}]$$

La adición es conmutativa en C
$$[x \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{Q} \Rightarrow (x + z) =$$
$$= (z + x),... \Rightarrow (x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2})]$$

III. *Propiedad asociativa*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2})\ ;\ (u + v\sqrt{2}) \in C:$$
$$[(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] + (u + v\sqrt{2}) =$$
$$= [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] + (u + v\sqrt{2}) =$$
$$= \{[(x + z) + u] + [(y + t) + v]\sqrt{2}\}$$

$$(x + y\sqrt{2}) + [(z + t\sqrt{2}) + (u + v\sqrt{2})] =$$
$$= (x + y\sqrt{2}) + [(z + u) + (t + v)\sqrt{2}] =$$
$$= \{[x + (z + u)] + [y + (t + v)]\sqrt{2}\}$$

La adición es asociativa en C
$$[x \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{Q}, u \in \mathbf{Q}, \Rightarrow (x + z) + u = x + (z + u),... \Rightarrow$$
$$[(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] + (u + v\sqrt{2}) =$$
$$= (x + y\sqrt{2}) + [(z + t\sqrt{2}) + (u + v\sqrt{2})]$$

IV. *Elemento neutro*
$$\forall (x + y\sqrt{2}) \in C\ ;\ \exists\ (0 + 0\sqrt{2}) \in C:$$
$$(x + y\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) = [(x + 0) + (y + 0)\sqrt{2}] = x + y\sqrt{2}$$

La adición tiene elemento neutro en C (no hace falta analizar $(0 + 0\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2})$ porque ya vimos que era conmutativa).

V. *Elemento simétrico*
$$\forall (x + y\sqrt{2}) \in C\ ;\ \exists\ (-x + (-y)\sqrt{2}] \in C:$$
$$(x + y\sqrt{2}) + [-x + (-y)\sqrt{2}] = 0 + 0\sqrt{2}$$
La adición tiene elmento simétrico en C.

a) (C, +) es grupo abeliano

VI. *Ley de composición externa*
$$\forall k_1 \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$k_1 (x + y\sqrt{2}) = [(k_1x) + (k_1y)\sqrt{2}]$$
Hay ley de composición externa en C
$$[k_1 \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q} \Rightarrow k_1 x \in \mathbf{Q}, ... \Rightarrow [(k_1x) + (k_1y)\sqrt{2}] \in C]$$

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares*
$$\forall k_1, k_2 \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$(k_1 + k_2)(x + y\sqrt{2}) = [(k_1 + k_2)x + [(k_1 + k_2)y]\sqrt{2}] =$$
$$= [(k_1x + k_2x) + [(k_1y) + (k_2y)\sqrt{2}] = k_1(x + y\sqrt{2}) + k_2(x + y\sqrt{2})$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de escalares:
$$[(k_1 + k_2)(x + y\sqrt{2}) = k_1(x + y\sqrt{2}) + k_2(x + y\sqrt{2})]$$

VIII. *Distributividad respecto a la adición de vectores*
$$\forall k_1 \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$
$$k_1[(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] = k_1[(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] =$$
$$= [k_1(x + z) + k_1(y + t)\sqrt{2}] = [(k_1x + k_1z) + (k_1y + k_1t)\sqrt{2}] =$$
$$= (k_1x + k_1y\sqrt{2}) + (k_1z + k_1t\sqrt{2}) = k_1(x + y\sqrt{2}) + k_1(z + t\sqrt{2})$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de vectores:
$$[k_1[(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2})] = k_1(x + y\sqrt{2}) + k_1(z + t\sqrt{2})]$$

IX. *Asociatividad del producto de escalares respecto a la ley externa*
$$\forall k_1, k_2 \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$k_1[k_2(x + y\sqrt{2})] = k_1[(k_2x) + (k_2y)\sqrt{2}] =$$
$$= [k_1(k_2x) + k_1(k_2y)\sqrt{2}] = [(k_1k_2)x + (k_1k_2)y\sqrt{2}] =$$
$$= (k_1k_2)(x + y\sqrt{2})$$
El producto de escalares es asociativo respecto a la ley externa
$$[k_1[k_2(x + y\sqrt{2})] = (k_1k_2)(x + y\sqrt{2})]$$

X. *Producto por la unidad*
$$\forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$1 \cdot (x + y\sqrt{2}) = [(1x) + (1y)\sqrt{2}] = (x + y\sqrt{2})$$

b) La ley de composición externa tiene, pues, las cuatro propiedades que junto al apartado a) caracterizan al espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

El $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Q, b \in Q\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

2. RESOLUCIÓN

Sea $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$

I. *Ley de composición interna:*

$$\forall (x + y\sqrt{2})\ ;\ (z + t\sqrt{2}) \in C:$$
$$(x + y\sqrt{2}) + (z + t\sqrt{2}) = [(x + z) + (y + t)\sqrt{2}] \in C$$

La adición es ley de composición interna en C $[x \in \mathbf{Z}, z \in \mathbf{Z} \Rightarrow (x + z) \in \mathbf{Z}, ...]$

*Tal como hicimos en el ejercicio **1**, continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que van cumpliendo, hasta llegar a la:*

VI. *Ley de composición externa*
$$\forall k_1 \in \mathbf{Q}\ ;\ \forall (x + y\sqrt{2}) \in C:$$
$$k_1 (x + y\sqrt{2}) = [(k_1x) + (k_1y)\sqrt{2}]$$
NO HAY LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA EN C
$$C[k_1 \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Z} \not\Rightarrow (k_1x) \in \mathbf{Z}, ... \not\Rightarrow [(k_1x) + (k_1y)\sqrt{2}] \in C]$$

SOLUCIÓN:

El $C = \{(a + b\sqrt{2}) \mid a \in Z, b \in Z\}$ no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo Q.

3. RESOLUCIÓN

I. *Ley de composición interna:*

$$\forall (a_1x^2 + b_1x + c_1)\ ;\ (a_2x^2 + b_2x + c_2) \in \mathbf{R}_2[x]:$$
$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) =$$
$$= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)] \in \mathbf{R}_2[x]$$
La adición es ley de composición interna en $\mathbf{R}_2[x]$.
$$[a_1 \in \mathbf{R}, a_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) \in \mathbf{R},...]$$

II. *Propiedad conmutativa*
$$\forall (a_1x^2 + b_1x + c_1)\ ;\ (a_2x^2 + b_2x + c_2) \in \mathbf{R}_2[x]:$$
$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) =$$
$$= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2);$$
$$(a_2x^2 + b_2x + c_2) + (a_1x^2 + b_1x + c_1) =$$
$$= (a_2 + a_1)x^2 + (b_2 + b_1)x + (c_2 + c_1)$$
La adición es conmutativa en $\mathbf{R}_2[x]$
$$[a_1 \in \mathbf{R}, a_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) = (a_2 + a_1),... \Rightarrow (a_1x^2 + b_1x + c_1) +$$
$$+ (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_2x^2 + b_2x + c_2) + (a_1x^2 + b_1x + c_1)]$$
*Tal como hicimos en el ejercicio **1** continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que se van cumpliendo hasta llegar al final de la primera parte.*

a) $[R_2[x], +]$ es grupo abeliano.

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall k_1 \in \mathbf{R} \;;\; \forall (a_1x^2 + b_1x + c_1) \in \mathbf{R}_2[x]:$$
$$k_1 (a_1x^2 + b_1x + c_1) = (k_1a_1) x^2 + (k_1b_1) x + (k_1c_1)$$

Hay ley de composición externa en $\mathbf{R}_2 [x]$.

$[k_1 \in \mathbf{R} \;;\; a_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow (k_1a_1) \in \mathbf{R}, \; ... \Rightarrow (k_1a_1)\; x^2 + (k_1b_1)\; x + (k_1c_1) \in \mathbf{R}_2 [x]]$

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares*

$$\forall\, k_1, k_2 \in \mathbf{R} \;;\; \forall (a_1x^2 + b_1x + c_1) \in \mathbf{R}_2 [x] \;;$$
$$(k_1 + k_2) (a_1x^2 + b_1x + c_1) =$$
$$= [(k_1 + k_2)\, a_1] x^2 + [(k_1 + k_2)\, b_1] x + [(k_1 + k_2)\, c_1] =$$
$$= [(k_1a_1) + (k_2a_1)] x^2 + [(k_1b_1) + (k_2b_1)] x + [(k_1c_1) + (k_2c_1)] =$$
$$= ... = k_1 (a_1x^2 + b_1x + c_1) + k_2 (a_1x^2 + b_2x + c_2)$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de escalares.

$$[(k_1 + k_2) (a_1x^2 + b_1x + c_1) =$$
$$= k_1 (a_1x^2 + b_1x + c_1) + k_2 (a_1x^2 + b_1x + c_1)]$$

*Análogamente al ejercicio **1** continuaríamos analizando las siguientes propieades, que se van cumpliendo hasta llegar al fin de esta segunda parte.*

b) La ley de composición externa tiene las cuatro propiedades que junto al apartado a) caracterizan al espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

El $\mathrm{R}_2[\mathbf{x}] = \{\mathbf{ax^2 + bx + c} \mid \mathbf{a, b, c} \in \mathrm{R}\}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

4. RESOLUCIÓN

I. *Ley de composición interna:*

$$\forall (a_1, b_1)\,,\, (a_2, b_2) \in \mathbf{R}^2:$$
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + [(a_1 + a_2), (b_1 + b_2)] \in \mathbf{R}^2$$

La adición es ley de composición interna en $\mathbf{R}^2$

$$[a_1 \in \mathbf{R}, a_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow (a_1 + a_2) \in \mathbf{R}...]$$

II. *Propiedad conmutativa*

$$\forall (a_1, b_1)\,,\, (a_2, b_2) \in \mathbf{R}_2:$$
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = [(a_1 + a_2), (b_1 + b_2)]$$
$$(a_2, b_2) + (a_1, b_1) = [(a_2 + a_1), (b_2 + b_1)]$$

La adición es conmutativa en $\mathbf{R}^2$

$$[a_1 \in \mathbf{R}, a_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow$$
$$(a_1 + a_2) = (a_2 + a_1),... \Rightarrow (a_1, b_1) + (a_2, b_2 = (a_2, b_2) + (a_1\,, b_1)]$$

*Tal como hicimos en el ejercicio **1** continuaríamos analizando las siguientes propiedades, que se van cumpliendo hasta llegar al fin de la primera parte.*

a) $[\mathrm{R}^2, +]$ **es un grupo abeliano.**

VI. *Ley de composición externa*

$$\forall k_1 \in \mathbf{R} \;;\; \forall (a_1, b_1) \in \mathbf{R}^2:$$
$$k_1 (a_1, b_1) = [k_1a_1, 0]$$

Hay ley de composición externa en R^2:

$$[k_1 \in \mathbf{R}, a_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow k_1a_1 \in \mathbf{R},... \Rightarrow (k_1a_1, 0) \in \mathbf{R}^2]$$

VII. *Distributividad respecto a la adición de escalares.*

$$\forall\, k_1, k_2 \in \mathbf{R} \;;\; \forall (a_1, b_1) \in \mathbf{R}^2:$$
$$(k_1 + k_2) (a_1, b_1) = [(k_1 + k_2)\, a_1, 0] = [(k_1a_1 + k_2a_1), 0] = ... =$$
$$= k_1 (a_1, b_1) + k_2 (a_1, b_1)$$

La ley externa es distributiva respecto a la adición de escalares:

$$[(k_1 + k_2) (a_1, b_1) = k_1 (a_1, b_1) + k_2 (a_1, b_1)]$$

*Análogamente al ejercicio **1** continuaríamos comprobando las siguientes propiedades de esta segunda parte, que se van cumpliendo hasta llegar a :*

X. *Producto por la unidad*

$$\forall (a_1, b_1) \in \mathbf{R}^2:$$
$$1 \cdot (a_1, b_1) = (a_1, 0) \neq (a_1, b_1)$$

SOLUCIÓN:

El R^2 tal como se han definido la adición y multiplicación por un escalar no tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo R.

NOTA: Obsérvese que sólo falla la propiedad $1 \times \hat{v} = \hat{v}$, lo que nos prueba que esta propiedad no es superflua.

5. RESOLUCIÓN

$$¿k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0?$$
$$k_1 (1, 2, 1) + k_2 (-3, 8, 1) + k_3 (3, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 - 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 8k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- *Damos un valor arbitrario a una de las incógnitas. Por ejemplo* $k_3 = 1$.
- *Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones para* $k_3 = 1$. *Obtenemos* $k_1 = -\dfrac{27}{14}$ *y* $k_2 = \dfrac{5}{14}$
- *Llevamos estos valores de* k_1, k_2 *y* k_3 *a la tercera ecuación y vemos que no la satisface, lo que nos permite asegurar que la única solución del sistema es* $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
- *Deducimos que los vectores son linealmente independientes.*

SOLUCIÓN: **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son linealmente dependientes**

6. RESOLUCIÓN

$$¿k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0?$$
$$k_1 (1, 0, 0) + k_2 (0, 1, 1) + k_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \\ k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Inmediatamente vemos que el sistema sólo admite la solución $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, *por lo que los vectores son linealmente independientes.*

SOLUCIÓN: **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente independientes**

7. RESOLUCIÓN

$$¿k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0?$$
$$k_1 (1, 1, 1) + k_2 (2, 3, 4) + k_3 (0, 1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 + 2k_2 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 + 2k_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- *Damos un valor arbitrario a una de las incógnitas. Por ejemplo* $k_2 = 1$.
- *Resolvemos el sistema formado por las dos primeras para* $k_2 = 1$. *Obtenemos* $k_1 = -2$ *y* $k_3 = -1$.
- *Llevamos estos valores de* k_1, k_2 *y* k_3 *a la tercera ecuación y vemos que la satisface, lo que nos permite asegurar que* $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ *no es la única solución.*
- *Deducimos que los vectores son linealmente dependientes.*

SOLUCIÓN: **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente dependientes**

8. RESOLUCIÓN

$$\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c} + k_3\vec{d}$$
$$(3, 2, 5) = k_1 (1, -2, 3) + k_2 (6, -1, 7) + k_3 (5, -1, 6)$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 + 6k_2 + 5k_3 &= 3 \\ -2k_1 - k_2 - k_3 &= 2 \\ 3k_1 + 7k_2 + 6k_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Al resolver el sistema nos encontramos con que no tiene solución. El $\vec{a}$ no se puede expresar como combinación lineal de los $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

SOLUCIÓN: **El $\vec{a}$, no es combinación lineal de los $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$**

9. RESOLUCIÓN

Notemos que el $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$, por consiguiente:

$$(0, 1, 0) = k_1 (1, -2, 4) + k_2 (-1, -2, -1) + k_3 (2, 4, -3)$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \\ -2k_1 - 2k_2 + 4k_3 = 1 \\ 4k_1 - k_2 - 3k_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k_1 = -\dfrac{1}{4} \\ k_2 = -\dfrac{11}{20} \\ k_3 = -\dfrac{3}{20} \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\vec{j} = -\dfrac{1}{4}\vec{a} - \dfrac{11}{20}\vec{b} - \dfrac{3}{20}\vec{c}}$

10. RESOLUCIÓN

Para que sean linealmente dependientes ha de ocurrir que:

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \not\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$$k_1 (-1, 1, 3) + k_2 (5, -2, 9) + k_3 (1, -m, 2m) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - 2k_2 - mk_3 = 0 \\ 3k_1 + 9k_2 + 2mk_3 = 0 \end{array}\right\}$$

- *El sistema ha de tener soluciones distintas de la $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.*
- *Damos un valor arbitrario a una de las incógnitas. Por ejemplo $k_3 = 1$.*
- *Resuelto el sistema para $k_3 = 1$ obtenemos:*

$$k_1 = \frac{1}{6} \;;\; k_2 = -\frac{1}{6} \text{ y } m = \frac{1}{2}$$

NOTA: Si damos otro valor cualquiera a k_3 obtenemos distintos valores para k_1 y k_2, pero siempre el mismo para m.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = \dfrac{1}{2}}$

11. RESOLUCIÓN

Para que estén en el mismo plano hay que evitar que sean linealmente independientes, hay, pues, que hacer que sean linealmente dependientes. Por consiguiente:

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \not\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$$k_1 (-1, 4, 2) + k_2 (3, \lambda, -2) + k_3 (2, 5, 6) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ 4k_1 + \lambda k_2 + 5k_3 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 + 6k_3 = 0 \end{array}\right\} k_2 = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{11}{5} \\ k_3 = -\dfrac{2}{5} \\ \lambda = -\dfrac{34}{5} \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lambda = -\dfrac{34}{5}}$

12. RESOLUCIÓN

I) *Por ser $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, linealmente dependientes sabemos que:*

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \not\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

de donde:

$$\vec{a} = -\frac{k_2}{k_1}\vec{b} - \frac{k_3}{k_1}\vec{c}$$

¿Existen siempre los $-\dfrac{k_2}{k_1}$ y $-\dfrac{k_3}{k_1}$?

Evidentemente estos cocientes no existen cuando $k_1 = 0$. Por tanto:

No podemos asegurar que el $\vec{a}$ es combinación lineal de los otros dos.

II) y III) *El mismo razonamiento nos conduce a que:*

$$\vec{b} = -\frac{k_1}{k_2}\vec{a} - \frac{k_3}{k_2}\vec{c} \;;$$

$$\vec{c} = -\frac{k_1}{k_3}\vec{a} - \frac{k_2}{k_3}\vec{b}$$

No podemos asegurar, pues, que el $\vec{b}$ y el $\vec{c}$ sean combinación lineal de los otros dos.

IV)

- *Puede ser k_1 cero y, en este caso, el $\vec{a}$ no sería combinación lineal de los otros dos.*
- *Puede ser k_2 cero, y ..., el $\vec{b}$ ...*
- *Puede ser k_3 cero, y ..., el $\vec{c}$ ...*
- *Ahora bien, lo que es seguro es que k_1, k_2 y k_3 no tienen que ser cero al mismo tiempo. Por eso ha de haber alguno que sea combinación lineal de los otros dos.*

SOLUCIÓN:

Se puede asegurar que alguno de los tres es combinación lineal de los otros dos.

13. RESOLUCIÓN

a)

- *Veamos si son linealmente independientes:*

$$¿k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0?$$

$$k_1 (1, 1, 1) + k_2 (2, 1, 3) + k_3 (1, -2, -4) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 - 2k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ son linealmente independientes.

- *Veamos si forman sistema de generadores:*

Sea $\vec{v}$ (x, y, z) un vector cualquiera de $\mathbf{R}^3$:

$$¿\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3?$$

$$(x, y, z) = k_1 (1, 1, 1) + k_2 (2, 1, 3) + k_3 (1, -2, -4)$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 + 2k_2 + k_3 = x \\ k_1 + k_2 - 2k_3 = y \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 = z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{2x + 11y - 5z}{8} \\ k_2 = \dfrac{2x - 5y + 3z}{8} \\ k_3 = \dfrac{2x - y - z}{8} \end{array}\right.$$

Evidentemente, cualesquiera que sean (x, y, z), componentes de $\vec{v}$, existen unos números reales k_1, k_2, k_3, tales que:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3$$

por lo que:

Los $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ forman sistema de generadores.

CONCLUSIÓN: Como $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$, son linealmente independientes y además forman un sistema de generadores, constituyen una base de $\mathbf{R}^3$.

b) *Coordenadas del $\vec{a}$ (3, −5, −13) en esa base.*

$$\vec{a} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

$$(3, -5, -13) = x_1 (1, 1, 1) + x_2 (2, 1, 3) + x_3 (1, -2, -4)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -13 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3}$

14. RESOLUCIÓN

a) *El enunciado es equivalente a probar que los $\vec{a}$ (0, 0, 1); $\vec{b}$ (0, 1, 0); $\vec{c}$ (1, −1, 0) forman una base. Por tanto:*

I. *¿Son linealmente independientes?*

$$¿k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0?$$

$$k_1 (0, 0, 1) + k_2 (0, 1, 0) + k_3 (1, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} k_3 = 0 \\ k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son linealmente independientes.

II. *¿Forman sistema de generadores?*

Sea $\vec{v}$ (x, y, z) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$

$$¿\vec{v} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}?$$

$$(x, y, z) = k_1 (0, 0, 1) + k_2 (0, 1, 0) + k_3 (1, -1, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} k_3 = x \\ k_2 - k_3 = y \\ k_1 = z \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} k_1 = z \\ k_2 = y - x \\ k_3 = x \end{array}\right.$$

Los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ forman sistema de generadores.

NOTA: Es conveniente saber que dos vectores de $\mathbf{R}^2$ linealmente independientes, tres vectores de $\mathbf{R}^3$ linealmente independientes, ...siempre forman sistema de generadores, por lo que podemos ahorrarnos la segunda parte del análisis.

CONCLUSIÓN: Como los polinomios 1; x; x (x − 1) son linealmente independientes y además forman sistema de generadores, constituyen una base de $\mathbf{R}_2[x]$.

b) *Coordenadas de $x^2 + 5x + 2$ en esa base*

$$(1, 5, 2) = x_1 (0, 0, 1) + x_2 (0, 1, 0) + x_3 (1, -1, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 = 2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 1 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: **(2, 6, 1)**

15. RESOLUCIÓN

a) *¿Son linealmente independientes?*

$$¿k_1 P(x) + k_2 Q(x) + k_3 R(x) = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0?$$

$$k_1 (1, -3, 1) + k_2 (1, -1, 2) + k_3 (0, 1, -3) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} k_1 + k_2 = 0 \\ -3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Los polinomios P(x), Q(x), R(x) son linealmente independientes.

b) *¿Forman sistema de generadores?*

Sí, tres vectores de R^3 linealmente independientes siempre forman sistema de generadores.

SOLUCIÓN: **Como los polinomios P(x), Q(x), R(x) son linealmente independientes y además forman sistema de generadores, constituyen una base de $\mathbf{R}_2[x]$.**

16. RESOLUCIÓN

a) *Sean los $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. La solución es:*

$$\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$$

Basta que uno de ellos sea combinación lineal de los otros dos. Así los tres vectores están en el mismo plano y, evidentemente, no forman sistema de generadores, pues todo vector que no esté en ese plano, no puede ser combinación lineal de los tres. Un caso concreto sería, por ejemplo:

$$\vec{a} (2, 1, -3) \ , \ \vec{b} (4, 0, 1) \ , \ \vec{c} (6, 1, -2)$$

b) *No se pueden escribir dos vectores de $\mathbf{R}^3$ que formen sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$, pues los dos vectores determinan un plano (excepcionalmente pueden estar sobre una recta), y todo vector que esté fuera de ese plano...*

SOLUCIÓN a):

Basta que uno de ellos sea combinación lineal de los otros dos.

SOLUCIÓN b):

No se pueden escribir dos vectores de $\mathbf{R}^3$ que formen un sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$.

17. RESOLUCIÓN

I) *Pretendemos resolver el siguiente problema: conocidas (x', y', z'), coordenadas de un $\vec{v}$ respecto de la base B', hallar (x, y, z), coordenadas del mismo $\vec{v}$ respecto de la base B.*

El problema consta de dos partes:

a) *Expresar $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.*

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

$$(2, 0, 1) = x_1 (1, -1, 2) + x_2 (0, 1, 0) + x_3 (1, 0, -1)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}\right.$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

Análogamente:

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \quad ; \quad \vec{v}_3 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$$

b) *Sea un $\vec{v}$ cualquiera de $\mathbf{R}^3$:*

- *Por una parte:*

$$\vec{v} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 + z'\vec{v}_3 = x' (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + y' (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + $$
$$+ z' (\vec{u}_2 - \vec{u}_3) = (x' + y')\,\vec{u}_1 + (x' - y' + z')\,\vec{u}_2\,(x' - z')\,\vec{u}_3$$

- *Por otra parte:*

$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

y, puesto que las coordenadas de un vector en una base son únicas, resulta:

SOLUCIÓN I): $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = x' + y'} \\ \mathbf{y = x' - y' + z'} \\ \mathbf{z = x' - z'} \end{array}\right. \qquad (1)$$

II) *Para no repetir todo el proceso podemos despejar, x', y', z' de la (1), (resolver el sistema teóricamente). Resulta:*

SOLUCIÓN II): $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x'} = \dfrac{\mathbf{x + y + z}}{\mathbf{3}} \\ \\ \mathbf{y'} = \dfrac{\mathbf{2x - y - z}}{\mathbf{3}} \\ \\ \mathbf{z'} = \dfrac{\mathbf{x + y - 2z}}{\mathbf{3}} \end{array}\right.$$

18. RESOLUCIÓN

a) *Expresamos* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *y* $\vec{v}_3$ *como combinación lineal de* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *y* $\vec{u}_3$

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

$$(-4, 4, 2) = x_1(0, -2, 0) + x_2(2, -2, 1) + x_3(0, 1, 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_2 \qquad\quad = -4 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{array}\right.$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$$

Análogamente:

$$\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \; ; \; \vec{v}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

b) *Sea un* $\vec{v}$ *cualquiera. Si* (x', y', z') *son sus coordenadas respecto de B' y* (x, y, z) *respecto de B, tendríamos:*

$$\vec{v} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 + z'\vec{v}_3 = x'(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + y'(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3) +$$
$$+ z'(\vec{u}_2 - \vec{u}_3) =$$
$$= (x' + 2y')\vec{u}_1 + (-2x' - y' + z')\vec{u}_2 + (2x' - y' + z')\vec{u}_3$$

$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

de donde:

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x'} + \mathbf{2y'} \\ \mathbf{y} = -\mathbf{2x'} - \mathbf{y'} + \mathbf{z'} \\ \mathbf{z} = \mathbf{2x'} - \mathbf{y'} + \mathbf{z'} \end{cases}$$

19. RESOLUCIÓN

III)

a) *Si* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ *son los vectores que forman la B' ya sabemos que:*

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \; ; \; \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \; ; \; \vec{v}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

b) *Sea un* $\vec{v}$ *cualquiera. Si* (x', y', z') *son sus coordenadas respecto de B' y* (x, y, z) *respecto de B, tendríamos:*

$$\vec{v} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 + z'\vec{v}_3 = x'(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + y'(\vec{u}_2 - \vec{u}_3) +$$
$$+ z'(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) =$$
$$(x' + z')\vec{u}_1 + (x' + y' + z')\vec{u}_2 (-y' + z')\vec{u}_3$$

$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

de donde:

SOLUCIÓN III):

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x'} + \mathbf{z'} \\ \mathbf{y} = \mathbf{x'} + \mathbf{y'} + \mathbf{z'} \\ \mathbf{z} = -\mathbf{y'} + \mathbf{z'} \end{cases} \qquad (1)$$

IV)

$$\vec{w}_{B'}(6, -1, -4) \Rightarrow \vec{w}_B(2, 1, -3)$$

SOLUCIÓN IV): $\vec{\mathbf{w}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{(2, 1, -3)}$

I) *Basta hallar x', y', z' de las (1). Resolviendo el sistema obtenemos:*

SOLUCIÓN I):

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{2x} - \mathbf{y} - \mathbf{z} \\ \mathbf{y'} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{z'} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \end{cases}$$

II)

$$\vec{v}_B(2, 1, -3) \Rightarrow \vec{v}_{B'}(6, -1, -4)$$

SOLUCIÓN II): $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B'}}\ \mathbf{(6, -1, -4)}$

20. RESOLUCIÓN

- *Sean* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *y* $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
- *Si* $\vec{v} = (x, y)$ *respecto de B y* $\vec{v} = (x', y')$ *respecto de B' será:*

$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 \qquad (1)$$

- *Expresemos ahora* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *como combinación lineal de los* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 1\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2 \\ \vec{b} = 0\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{u}_1 = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{2}\vec{b} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 \\ \vec{b} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1 = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{v}_2 = \vec{a} \end{array}\right.$$

- *Llevando estos valores a la (1) resulta:*

$$x\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) + y\frac{1}{2}\vec{b} = x'\left(-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + y'\vec{a}$$

$$x\vec{a} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\vec{b} = \left(-\frac{3}{2}x' + y'\right)\vec{a} + \frac{1}{2}x'\vec{b}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{x'} + \mathbf{y'} \\ \mathbf{y} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x'} + \mathbf{y'} \end{cases}$$

21. RESOLUCIÓN

- *Evidentemente* $V \neq \emptyset$, *pues fijados* α, β, γ *hay infinitos vectores que verifican* $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$

a) *Sean:*

$$\vec{v}_1 = (x_1, x_2, x_3) \in V \; ; \; \vec{v}_2(y_1, y_2, y_3) \in V$$

se verifica:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$$

de donde:

$$\alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) + \gamma(x_3 + y_3) = 0$$

por lo que se infiere que el vector de componentes:

$$[(x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3)]$$

pertenece a V. En consecuencia:

Si $\vec{v}_1 \in V$; $\vec{v}_2 \in V$: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$

b) *Sean*

$$\vec{v}_1 = (x_1, x_2, x_3) \in V \; ; \; k_1 \in \mathbf{R}$$

se verifica:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

de donde

$$k_1(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) = 0 \ldots$$
$$\alpha(k_1 x_1) + \beta(k_1 x_2) + \gamma(k_1 x_3) = 0$$

De lo que se deduce que el vector de componentes (k_1x_1, k_1x_2, k_1x_3) *pertenece a V. En consecuencia:*

Si $\vec{v}_1 \in V$; $k_1 \in \mathbf{R}$: $k_1\vec{v}_1 \in V$

SOLUCIÓN:

Siendo V ≠ ∅ y verificándose los dos requisitos analizados, queda probado que V es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

22. RESOLUCIÓN

I)

- *Evidentemente* $V \neq \emptyset$, *pues hay infinitos* $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ *que verifican la condición:*

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{v}$$

a) *Sean:* $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{R}$. *Se verifica:*

$$\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} = \vec{v}_1 \in V$$
$$\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} = \vec{v}_2 \in V$$

de donde:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\,\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\,\vec{b} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Es evidente que $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ *;* $\alpha_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbf{R}$, ... *por lo que se infiere:*

$$\text{Si } \vec{v}_1 \in V \,;\, \vec{v}_2 \in V : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$$

b) *Sean* $\vec{v}_1 = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} \in V \,;\, k_1 \in \mathbf{R}$

Se verifica:

$$k_1\,(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}) = \ldots = (k_1\alpha_1)\,\vec{a} + (k_1\beta_1)\,\vec{b}$$

de donde se deduce que este vector pertenece a V, pues es de la forma $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. *En consecuencia:*

$$\text{Si } \vec{v} \in V \,;\, k_1 \in \mathbf{R} : k_1\vec{v}_1 \in V$$

SOLUCIÓN I):

Siendo V $\neq \varnothing$ y verificándose los dos requisitos exigibles, queda probado que V es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

II) *Ecuaciones paramétricas de V:*

$$V = \{\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\}$$
$$(x, y, z) = \alpha\,(1, 2, 1) + \beta\,(2, 1, 1)$$

SOLUCIÓN II):

$$\begin{cases} \mathbf{x = \alpha + 2\beta} \\ \mathbf{y = 2\alpha + \beta} \\ \mathbf{z = \alpha + \beta} \end{cases}$$

III) *Dimensión de V*

V es de dimensión ***DOS****, pues dos vectores son los que forman una base de este subespacio vectorial*

23. RESOLUCIÓN

• *El subespacio vectorial V engendrado por* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *(variedad lineal engendradada por* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$*) es:*

$$V = \{\vec{v} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} \;\; k_1, k_2 \in \mathbf{R}\}$$

I) *Ecuaciones paramétricas:*

$$(x, y, z) = k_1\,(1, 2, 2,) + k_2\,(2, 3, 5)$$

SOLUCIÓN I) :

$$\begin{cases} \mathbf{x = \;\; k_1 + 2k_2} \\ \mathbf{y = 2k_1 + 3k_2} \\ \mathbf{z = 2k_1 + 5k_3} \end{cases}$$

II) *Ecuaciones cartesianas:*

Eliminamos los parámetros k_1, k_2 *y* k_3 *de las ecuaciones paramétricas:*

$$\left.\begin{matrix} k_1 + 2k_2 = x \\ 2k_1 + 3k_2 = y \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} 2k_1 + 4k_2 = 2x \\ -2k_1 - 3k_2 = -y \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} k_1 = -3x + 2y \\ k_2 = \;\; 2x - \;\; y \end{matrix}\right.$$

llevando estos valores a la tercera ecuación:

$$z = 2\,(-3x + 2y) + 5\,(2x - y)$$

de donde:

SOLUCIÓN II

$$\boxed{\mathbf{4x - y - z = 0}}$$

24. RESOLUCIÓN

$$\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$$

$$(3, 8, t) = k_1\,(1, 2, 3) + k_2\,(1, 3, -1)$$

$$\left.\begin{matrix} k_1 + \;\; k_2 = 3 \\ 2k_1 + 3k_2 = 8 \\ 3k_1 - \;\; k_2 = t \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \\ t = 1 \end{matrix}\right.$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\mathbf{t = 1}}$$

25. RESOLUCIÓN

I) *Sea* $V = \{\vec{v}\,(x, y, x) \in \mathbf{R^3}\}$

• *Evidentemente* $V \neq \varnothing$, *pues hay infinitos vectores de la forma* (x, y, x)

a)

$$\forall\,(x_1, y_1, x_1) \in V \;\;;\;\; (x_2, y_2, x_2) \in V:$$
$$(x_1, y_1, x_1) + (x_2, y_2, x_2) = [(x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (x_1 + x_2)] \in V$$

pues si $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 \in \mathbf{R}$, *evidentemente*, $x_1 + x_2 \in \mathbf{R}$... *por lo que se infiere:*

$$\text{Si } \vec{v}_1 \;\;;\;\; \vec{v}_2 \in V \;:\; \vec{v}_1 + v_2 \in V$$

b)

$$\forall\,(x_1, y_1, x_1) \in V \;\;;\;\; \forall\, k_1 \in \mathbf{R}$$
$$k_1\,(x_1, y_1, x_1) = [(k_1x_1), (k_1y_1), (k_1x_1)] \in V$$
$$\text{Si } \vec{v} \in V \;\;;\;\; k_1 \in \mathbf{R} : k_1\vec{v}_1 \in V$$

CONCLUSIÓN: Siendo V $\neq \varnothing$ y cumpliéndose los dos requisitos exigibles queda probado que V es un subespacio de $\mathbf{R^3}$.

II) *Determinación de la* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *pedida.*

$$\left.\begin{matrix} (5, 3, 5) = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 \\ (3, 2, 3) = \;\; \vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{matrix} (5, 3, 5) = \;\; 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 \\ (-6, -4, -6) = -2\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2 \end{matrix}\right.$$

$$\vec{u}_2\,(1, 1, 1) \;\;;\;\; \vec{u}_1\,(1, 0, 1)$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\mathbf{\vec{u}_1\,(1, 0, 1) \;\;;\;\; \vec{u}_2\,(1, 1, 1)}}$$

26. RESOLUCIÓN

Sea V la variedad lineal engendrada por los $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$.

$$\vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2$$

$$(1, a, 5) = k_1\,(1, 2, 3) + k_2\,(1, 1, 1)$$

$$\left.\begin{matrix} k_1 + k_2 = 1 \\ 2k_1 + k_2 = a \\ 3k_1 + k_2 = 5 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \\ a = 3 \end{matrix}\right.$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\mathbf{a = 3}}$$

27. RESOLUCIÓN

I) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11$

SOLUCIÓN I):

$$\boxed{\mathbf{\Delta_1 = 11}}$$

II) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16$

SOLUCIÓN II):

$$\boxed{\mathbf{\Delta_2 = -16}}$$

III) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 3 - 12 + 18 + 8 + 3 = 32$

SOLUCIÓN III):

$$\boxed{\mathbf{\Delta_3 = 32}}$$

IV) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 36 - 8 - 6 - 18 = 14$

SOLUCIÓN IV):

$$\boxed{\mathbf{\Delta_4 = 14}}$$

28. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \\ 0 & 12 & -11 & -12 \\ 0 & -7 & 15 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 12 & -11 & -12 \\ -7 & 15 & 18 \end{vmatrix} = -792 - 900 - 588 + 385 + 720 + 1\,512 = 337$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = \mathbf{337}}$

29. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & -2 & 12 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -10 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 12 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} -3 & -10 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -10 & -4 & 1 \\ 5 & 6 & 5 & 0 \\ 20 & 62 & 26 & 0 \\ -15 & -56 & -21 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 20 & 62 & 26 \\ -15 & -56 & -21 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-6\,510 - 5\,600 - 2\,340 + 4\,650 + 7\,280 + 2\,520) = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = \mathbf{0}}$

30. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & 10 & -10 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 13 & 6 & 7 & 0 & -3 \\ -8 & -3 & -13 & 0 & 8 \\ -8 & -3 & -13 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

pues el determinante tiene la cuarta y quinta filas iguales.

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = \mathbf{0}}$

31. RESOLUCIÓN

I) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\Delta_1 = \mathbf{0}}$

pues el determinante tiene la primera y segunda columna proporcionales.

II) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 + (2 \times 2) & 11 \\ 4 & 5 + (4 \times 2) & 13 \\ 1 & 2 + (1 \times 2) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 4 & 13 & 13 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\Delta_2 = \mathbf{0}}$

III) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 + 3 & 5 + 5 & 6 + 6 \\ 10 & 10 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN III): $\boxed{\Delta_3 = \mathbf{0}}$

32. RESOLUCIÓN

I) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \times 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dot{1}8$$

SOLUCIÓN I): $\boxed{\Delta_1 = \dot{\mathbf{1}}\mathbf{8}}$

II) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 15 & 15 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dot{1}5$$

SOLUCIÓN II): $\boxed{\Delta_2 = \dot{\mathbf{1}}\mathbf{5}}$

33. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = \mathbf{(a+1)^3}}$

34. RESOLUCIÓN

Como se trata de un determinante de Vandermonde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) = (-1)(a-b)(-1)(a-c)(d-a)(-1)(b-c)(d-b)(-1)(c-d) = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b)$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\Delta = \mathbf{(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b)}}$

35. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b-c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} a-b-c & a+b+c & a+b+c \\ -2b & a+b+c & 0 \\ -2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a-b-c & 1 & 1 \\ -2b & 1 & 0 \\ -2c & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= (a+b+c)^2\ (a-b-c+2c+2b) = (a+b+c)^2\ (a+b+c) = (a+b+c)^3$$

NOTA:

(1) Multiplicamos los elementos de la primera columna por (-1) y los sumamos a los de la segunda y tercera.

(2) Sacamos (-1) factor común en la segunda y tercera fila.

(3) Desarrollamos el determinante.

36. RESOLUCIÓN

Como se trata de un determinante de Vandermonde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2\,000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2\,000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2\,000 \end{vmatrix} =$$

$= (\log 20 - \log 2)\ (\log 200 - \log 2)\ (\log 2\,000 - \log 2)$
$(\log 200 - \log 20)\ (\log 2\,000 - \log 20)\ (\log 2\,000 - \log 200) =$
$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 1\,000 \cdot \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 =$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

37. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} b & \operatorname{sen} c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} b & \operatorname{sen} c \\ \cos b & \cos c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} c \\ \cos a & \cos c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} b \\ \cos a & \cos b \end{vmatrix} =$$

$= (\operatorname{sen} b \cos c - \cos b \operatorname{sen} c) - (\operatorname{sen} a \cos c - \cos a \operatorname{sen} c) +$
$+ (\operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b) =$
$= \operatorname{sen}(b-c) - \operatorname{sen}(a-c) + \operatorname{sen}(a-b) =$
$= \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen}(a-b) =$
$= \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a)$

38. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c+a \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

pues este determinante tiene la primera y tercera columna proporcionales.

39. RESOLUCIÓN

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a\,b\,c$$

40. RESOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 9 & -1 \\ -2 & x^2 & 0 & 2 \\ -2 & x^2-1 & 2x^2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & x^2-10 & 8 & 2 \\ 0 & x^2-11 & 2x^2+8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ x^2-10 & 8 & 2 \\ x^2-11 & 2x^2+8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ x^2-10 & 18 & 0 \\ x^2-11 & 2x^2+18 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1) \begin{vmatrix} x^2-10 & 18 \\ x^2-11 & 2x^2+18 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 1\ ;\ x_2 = -1\ ;\ x_3 = 3\ ;\ x_4 = -3}$

41. RESOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & x \\ 10 & -26 & 33 & 49 \\ 4 & 10x & 10 & 34 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & x-8 \\ 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & 10x+8 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & x-8 \\ -6 & 3 & 9 \\ 10x+8 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & x-8 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5x+4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5x+2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x-2 \\ 5x+2 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-[(x-2)\ (5x+2)] = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 2\ ;\ x_2 = -2/5}$

42. RESOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 & 1 \\ 2 & -10 & 13 & -1 \\ -2 & x^2 & 0 & 2 \\ 0 & -1/2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & x^2-10 & 18 & 0 \\ 0 & -1/2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ x^2-10 & 18 & 0 \\ -1/2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x^2-10 & 18 \\ -1/2 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 1\ ;\ x_2 = -1\ ;\ x_3 = 3\ ;\ x_4 = -3}$

43. RESOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x\begin{vmatrix}-a & b & 0\\ -a & 0 & c\\ -a & 0 & 0\end{vmatrix} + d\begin{vmatrix}a+x & x & x\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$ax\begin{vmatrix}1 & b & 0\\ 1 & 0 & c\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} + d\begin{vmatrix}a+x & x & x\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix} = \Rightarrow$$

$$abcx + d\,[(a+x)\,bc + abx + acx] = 0$$

$$abcx + abcd + bcdx + abdx + acdx = 0$$

$$bcx\,(a+d) + adx\,(b+c) = -abcd$$

$$x\,[bc\,(a+d) + ad\,(b+c)] = -abcd$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = \dfrac{-abcd}{bc\,(a+d) + ad\,(b+c)}}$

44. RESOLUCIÓN

Como es un determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x & 2 & -3 & 5\\ x^2 & 4 & 9 & 25\\ x^3 & 8 & -27 & 125\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2-x)\,(-3-x)\,(5-x)\,(-3-2)\,(5-2)\,(5+3) = 0 \Rightarrow$$

$$(2-x)\,(-3-x)\,(5-x) = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 2\ ;\ x_2 = -3\ ;\ x_3 = 5}$

45. RESOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}x^3-1 & 3x^2-3 & 3x-3 & 0\\ x^2-1 & x^2+2x-3 & 2x-2 & 0\\ x-1 & 2x-2 & x-1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}x^3-1 & 3x^2-3 & 3x-3\\ x^2-1 & x^2+2x-3 & 2x-2\\ x-1 & 2x-2 & x-1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}(x-1)(x^2+x+1) & 3(x-1)(x+1) & 3(x-1)\\ (x-1)(x+1) & (x-1)(x+3) & 2(x-1)\\ (x-1) & 2(x-1) & (x-1)\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^3\begin{vmatrix}x^2+x+1 & 3(x+1) & 3\\ x+1 & x+3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^3\begin{vmatrix}x^2+x-2 & 3x-3 & 0\\ x-1 & x-1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^3\begin{vmatrix}(x-1)(x+2) & 3(x-1)\\ (x-1) & (x-1)\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^5\begin{vmatrix}x+2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^5\,(x+2-3) = 0 \Rightarrow (x-1)^6 = 0$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 1\ ;\ x_2 = 1\ ;...;\ x_6 = 1}$

46. RESOLUCIÓN

a) *Para $x = 1$ el determinante tendría la primera y segunda filas iguales. Primera solución $x_1 = 1$*

b) *Para $x^2 = 1$ el determinante tendría la primera y tercera filas iguales. Se obtienen $x_2 = 1$; $x_3 = -1$*

c) *Para $x^3 = 1$ tendría la primera y la cuarta fila iguales. Se obtienen $x_4 = 1$;*

$$x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\ ;\ x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$[x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)\,(x^2+x+1) = 0]$$

SOLUCIÓN:

$\mathbf{x_1 = 1\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_3 = -1\ ;\ x_4 = 1}$

$\mathbf{x_5 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$

$\mathbf{x_6 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$

47. RESOLUCIÓN

Sumando a los elementos de la primera columna los correspondientes de la segunda multiplicados por x, los de la tercera multiplicados por x^2, los de la cuarta por x^3 y los de la quinta por x^4, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -x & 1\\ e + dx + cx^2 + bx^3 + (a+x)\,x^4 & d & c & b & a-x\end{vmatrix} =$$

$$= [e + dx + cx^2 + bx^3 + (a+x)\,x^4]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -x & 1 & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & 0\\ 0 & 0 & -x & 1\end{vmatrix} =$$

$$= [e + dx + cx^2 + bx^3 + (a+x)\,x^4]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -x & 1 & 0\\ 0 & -x & 1\end{vmatrix} =$$

$$= [e + dx + cx^2 + bx^3 + (a+x)\,x^4]\cdot 1 =$$

$$= x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\Delta = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$

48. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 9 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & -3 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 9 & -1\\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & -3 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-84}{-28} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 2 & 9\\ 5 & -3 & -0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & -3 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-28}{-28} = 1$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = 2\ ;\ y = 3\ ;\ z = 1}$

49. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 & 4 \\ 8 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-86}{-43} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -9 & 4 \\ 1 & 8 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{-43}{-43} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{129}{-43} = -3$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ; y = 1 ; z = −3**

50. RESOLUCIÓN

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{45}{-45} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 26 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{0}{-45} = 0$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 26 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{-180}{-45} = 4$$

SOLUCIÓN: **x = −1 ; y = 0 ; v = 4**

51. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{37}{12} \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{2}{z} &= -\frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ \frac{37}{12} & 2 & -1 \\ -\frac{5}{6} & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{53}{3}}{-53} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & \frac{37}{12} & -1 \\ 2 & -\frac{5}{6} & -2 \end{vmatrix}}{-53} = \frac{-53}{-53} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & \frac{37}{12} \\ 2 & -1 & -\frac{5}{6} \end{vmatrix}}{-53} = \frac{-\frac{53}{4}}{-53} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4} \Rightarrow z = 4$$

SOLUCIÓN: **x = 3 ; y = 1 ; z = 4**

Bloque 13

- ✔ Aplicaciones lineales
- ✔ Matrices
- ✔ Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

APLICACIONES LINEALES

Concepto de aplicación lineal

Sean (V, + , •) *y* (W, + , •) *dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo* K, *y sea* f *una aplicación de* V *en* W.

Se dice que f *es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales* (V, + , •) *y* (W, + , •) *si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

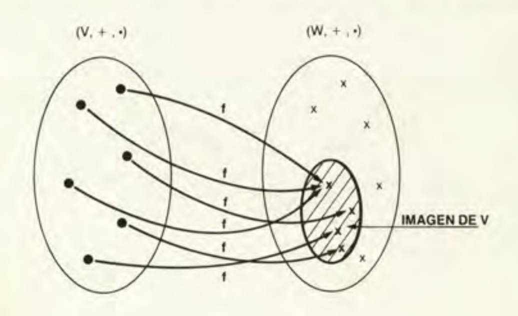
I. $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

II. $\forall \vec{v}_1 \in V ; \forall k_1 \in K : f(k_1 \vec{v}_1) = k_1 f(\vec{v}_1)$

Imagen de una aplicación lineal

Sea f *una aplicación lineal de* (V, + , •) *en* (W, + , •), *ambos definidos sobre el mismo cuerpo* K.

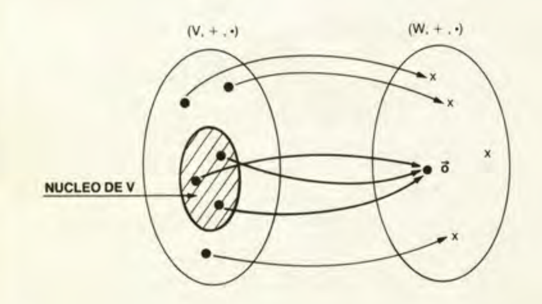
Se llama imagen del V, *dada por* f, *al subconjunto de* W *formado por todos los elementos de* W, *que son imagen de alguno de* V.



Núcleo de una aplicación lineal

Sea f *una aplicación lineal de* (V, + , •) *en* (W, + , •), *ambos definidos sobre el mismo cuerpo* K.

Se llama núcleo de la aplicación lineal f, *al conjunto de los elementos de* V *que tienen por imagen el vector nulo de* W.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hagamos corresponder a cada vector libre del plano su proyección sobre un eje de dicho plano. Comprobar que dicha correspondencia es una aplicación lineal del espacio vectorial que forman los vectores del plano sobre el espacio vectorial que forman las proyecciones de dichos vectores sobre el citado eje. ¿Cuál es su núcleo?

SOLUCIÓN: **El núcleo de esta aplicación es el conjunto de todos los vectores del plano perpendiculares al eje**

2. Dados $\vec{v}_1$ (x_1, y_1) y una aplicación f, tal que $f(\vec{v}_1) = (x_1 + 1, y_1 + 1)$, determinar si f es una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **f no es una aplicación lineal**

3. Dados $\vec{v}_1$ (x_1, y_1) y una aplicación f, tal que $f(\vec{v}_1) = (2x_1, y_1 - 1)$, determinar si f es una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **f no es una aplicación lineal**

4. Dados $\vec{v}_1$ (x_1) y una transformación T, tal que $T(\vec{v}_1) = (3x_1, x_1)$, determinar si T es una transformación lineal de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **T es una transformación lineal**

5. El sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x'_1 = x_1 - 3x_2 \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 \end{array}\right\}$ establece una aplicación f de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ $[(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} (x'_1, x'_2) \in \mathbf{R}^2]$, determinar si f es una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **f es una aplicación lineal**

6. Dados un $\vec{v}_1$ (x_1, x_2) y una aplicación f, tal que $f(\vec{v}_1) = (x_1 x_2, x_1 + 1)$, determinar si f es una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.

SOLUCIÓN: **f no es una aplicación lineal**

7. Dados un $\vec{v}_1$ (x_1, y_1, z_1) y una aplicación f, tal que $f(\vec{v}_1) = (x_1, y_1, 0)$, se pide:

I. La imagen del $\vec{v}$ (4, −2, 5) dada por f.

II. Comprobar que f es una aplicación lineal.

III. Hallar el núcleo de f.

IV. Comprobar si pertenece el $\vec{w}$ (0, −2, 0) al núcleo de f.

SOLUCIÓN I: **f(4, −2, 5) = (4, −2, 0)**

SOLUCIÓN II: **Al verificarse los dos axiomas de linealidad queda comprobado que f es una aplicación lineal**

SOLUCIÓN III: **Núcleo de f = $\{(0, 0, z) \in \mathbf{R}^3\}$**

SOLUCIÓN IV: **$\vec{w}$ = (0, −2, 0) no pertenece al núcleo de f**

8. Dados un $\vec{v}_1$ (x_1, y_1) y una transformación T, tal que $T(\vec{v}_1) = (3x_1 + y_1)$, se pide:

I. La imagen del $\vec{v}$(2, 4) dada por T.

II. Probar que T es una transformación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$.

III. El núcleo de esa transformación.

IV. Comprobar si pertenece el $\vec{w}$(9, 3) al núcleo de T.

SOLUCIÓN I: **T(2, 4) = (2)**

SOLUCIÓN II: **Al cumplirse los dos axiomas de linealidad queda probado que T es una transformación lineal**

SOLUCIÓN III: **Núcleo de T = $\{(x, y) \in R^2 \mid y = 3x\}$**

SOLUCIÓN IV: **$\vec{w}(9, 3)$ no pertenece al núcleo de T**

9. Se asocia a cada $\vec{v}$ perteneciente al plano $R \times R$ el $\vec{w}$ que resulta de proyectar el $\vec{v}$ sobre el eje Y'Y. ¿Cuál es el núcleo de esa aplicación?

SOLUCIÓN: **El núcleo de esa aplicación es el conjunto de todos los vectores del plano $R \times R$ que son perpendiculares al eje Y'Y, puesto que su proyección sobre dicho eje es el vector nulo**

10. Las ecuaciones de una transformación lineal definida en $\mathbf{R}^3$, con imágenes en $\mathbf{R}^2$, son:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \end{cases}$$

I. Hallar el núcleo de dicha transformación.

II. Dar un vector que pertenezca al núcleo.

SOLUCIÓN I: **Núcleo = $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_2 = -3x_1 \; ; \; x_3 = -5x_1\}$**

SOLUCIÓN II: **$\vec{v}(2, -6, -10) \in$ Núcleo**

11. Se desea saber:

I. Si el $\vec{v}(1, 2, 3)$ pertenece al núcleo de la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_3 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

II. Si el $\vec{w}(1, 2, 3)$ pertenece a la imagen de f.

III. El núcleo de dicha aplicación.

SOLUCIÓN I: **$\vec{v}(1, 2, 3)$ no pertenece al núcleo**

SOLUCIÓN II: **El $\vec{w}(1, 2, 3)$ pertenece a la imagen de f**

SOLUCIÓN III: **Núcleo de f = $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_2 = -\frac{x_1}{2} \; ; \; x_3 = -\frac{3x_1}{2}\right\}$**

MATRICES

Definición de matriz

Se llama matriz del tipo (m, n), *sobre un cuerpo* K, *a un cuadro rectangular de* m *filas y* n *columnas, formado por elementos de* K.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A = [a_{ij}] \in / (m, n)$

Adición de matrices

Se llama suma de las matrices $A = [a_{ij}]$ *y* $B = [b_{ij}]$, *ambas del mismo tipo* (m, n), *a otra matriz* $C = [c_{ij}]$, *del mismo tipo, obtenida sumando los términos correspondientes de* A *y* B *que ocupan en ambas la misma fila y la misma columna.*

$$\left.\begin{array}{l} A = [a_{ij}] \in / (m, n) \\ B = [b_{ij}] \in / (m, n) \end{array}\right\} \Rightarrow A + B = C = [c_{ij}] \in / (m, n)$$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; ; \; \forall\, 1 \leq i \leq m \; ; \; \forall\, 1 \leq j \leq n$

Producto de un número real por una matriz

El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ *por un número real* k, *es otra matriz* $k\,A = [ka_{ij}]$, *cuyos elementos se obtienen multiplicando cada elemento de la matriz* A *por el número* k.

$A = [a_{ij}] \in / (m, n) \; ; \; k \in \mathbf{R}$

$k\,A = [k\,a_{ij}] \in / (m, n)$

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = [a_{ij}]$, *del tipo* (m, n) *y* $B = [b_{ij}]$, *del tipo* (n, r), *esto es, tales que el número de columnas de* A *sea igual al de filas de* B, *se llama producto* $A \times B$ *a otra matriz* $P = [p_{ij}]$, *del tipo* (m, r) *cuyo elemento genérico,* p_{ij}, *es igual a la suma de los productos de los elementos que ocupan la fila i-ésima de la matriz* A *por los correspondientes de la columna j-ésima de la matriz* B.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix}$$

$p_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{in} \times b_{nj}$

$$\left.\begin{array}{l} A = [a_{ij}] \in / (m, n) \\ B = [b_{ij}] \in / (n, r) \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B = P = [p_{ij}] \in / (m, r)$$

Matriz transpuesta

Matriz transpuesta de una dada A *es otra matriz, que se indica con la notación* A', *que se obtiene de la* A *cambiando columnas por filas y filas por columnas, conservando el orden relativo de los elementos.*

$A = [a_{ij}] \in / (m, n) \Rightarrow A' = [a'_{ji}] \in / (n, m)$

$a'_{ji} = a_{ij}$

Matriz unidad

Una matriz cuadrada que tenga iguales a uno todos los elementos de la diagonal principal, e iguales a cero todos los demás se denomina matriz unidad (I).

Matriz de una aplicación lineal

Sean (V, +, •) *y* (W, +, •) *dos espacios vectoriales, de dimensiones* n *y* m, *definidos sobre el mismo cuerpo* K, *y sea* f *una aplicación lineal de* V *en* W.

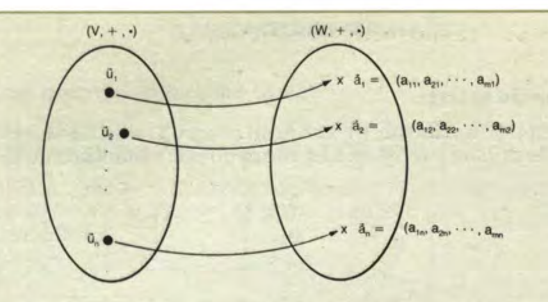
Sean $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ *la base canónica de* V *y* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ *vectores de* W, *tales que:*

$f(\vec{u}_1) = \vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$

$f(\vec{u}_2) = \vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$f(\vec{u}_n) = \vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn})$



Se llama matriz asociada a la aplicación lineal f, *a la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz inversa de una matriz cuadrada

Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A, *cuyo determinante es no nulo, a otra matriz que se indica con la notación* A^{-1} *y que verifica:*

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Si designamos por A_{ij} *al adjunto del elemento* $a_{ij} \in A$, *y por* $|A|$ *al determinante de* A *se verifica:*

$$\left.\begin{matrix} A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}(n, n) \\ |A| \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \left[\frac{a_{ji}}{|A|}\right] \in \mathscr{M}(n, n)$$

NOTA: I *representa la matriz unidad.*

Rango de una matriz

Si en una matriz A *existe algún menor de orden* h *no nulo, y todos los menores de orden superior al* h *son nulos o no existen, el número* h *se dice que es el rango de la matriz* A.

EJERCICIOS PROPUESTOS

12. Comprobar si las siguientes matrices son iguales:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{3} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} & 7 \\ 0 & 1 - \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{6} & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) \\ 1 - \dfrac{105-90}{15} & \dfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: **$\forall$ (i, j) es $a_{ij} = b_{ij}$ por lo que A = B**

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hallar:

I. $A \times (B + C)$
II. $A \times B'$
III. $B' \times A$
IV. $A \times (3B - 2C)$
V. A^2

SOLUCIÓN I: $\mathbf{A \times (B + C)} = \begin{pmatrix} 51 & 50 & 64 \\ 45 & 28 & 48 \\ 24 & 37 & 60 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{A \times B'} = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 31 \\ 7 & 26 & 25 \\ -4 & 23 & 40 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{B' \times A} = \begin{pmatrix} 36 & 4 & 16 \\ 7 & 3 & 5 \\ 35 & 25 & 28 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{A \times (3B - 2C)} = \begin{pmatrix} 18 & -65 & 67 \\ 70 & -21 & 69 \\ -48 & -69 & -40 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN V: $\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 26 & 30 & 28 \\ 30 & 14 & 18 \\ 24 & 30 & 13 \end{pmatrix}$

14. Comprobar que el sistema

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{matrix}\right\}$$

puede escribirse matricialmente del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: **Sí se puede escribir matricialmente**

15. Utilizando el cálculo matricial, expresar x_1 y x_2 en función de t_1 y t_2 sabiendo las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = y_1 + 3y_1 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} y_1 = 4z_1 + z_2 \\ y_2 = -3z_1 + 2z_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} z_1 = -3t_1 - t_2 \\ z_2 = 5t_1 + t_2 \end{matrix}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 50t_1 + 12t_2}$
$\mathbf{x_2 = -33t_1 - 11t_2}$

16. Hallar las matrices A y B sabiendo que:

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & -8 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

$$5A - 3B = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & 6 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. Hallar la matriz que expresa la suma $X^2 + Y^2$, siendo X e Y las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{array}\right\}$$

y $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X^2 + Y^2} = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$

18. Hallar la matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ tal que:

$f(x_1, x_2, x_3) = [2x_1 - x_2, x_2, x_1 - x_2 + x_3]$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. Una transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ tiene por matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallar la imagen del $\vec{v}(1, 2, -1)$ a través de dicha transformación.

SOLUCIÓN: $\mathbf{f(\vec{v}) = (-3, -1)}$

20. I. Determinar las ecuaciones de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ en la que:

$\vec{a} = (1, 3, -1)$; $f(\vec{a}) = (0, 1)$
$\vec{b} = (-1, 1, 0)$; $f(\vec{b}) = (-1, 0)$
$\vec{c}) = (0, 0, 1)$; $f(\vec{c}) = (1, -3)$

II. ¿Cuál es la matriz asociada a esta aplicación?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y_1 = x_1 + x_3}$
$\mathbf{y_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x - x_3}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

21. I. Determinar las ecuaciones de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ tal que aplica el vector (1, 1, 0) en el vector (2, 2, 1) ; el vector (0, 0, 1) en el (0, −1, −1) y el vector (−1, 1, 2) en el (2, −2, 1).

II. Hallar la matriz asociada a dicha aplicación.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y_1 = 2x_2}$
$\mathbf{y_2 = x_1 + x_2 - x_3}$
$\mathbf{y_3 = -x_1 + 2x_2 - x_3}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

22. Determinar dos matrices A y B, tales que:

$3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$; $-A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{39}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

23. Hallar las matrices A y B, sabiendo que:

$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; $3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 18 & 14 & 49 \end{pmatrix}$

24. Resolver la ecuación matricial XA = B + C, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

25. Resolver la ecuación A · X = B, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$

26. Resolver la ecuación matricial A · X · B = C, siendo:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

27. Resolver la ecuación matricial M · X + N = P, siendo:

$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

28. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se llaman valores propios de dicha matriz, a los valores de λ, tales que el determinante de la matriz A − λ I sea nulo. Hallar los valores propios de A. (I representa la matriz unidad.)

SOLUCIÓN: $\mathbf{\lambda_1 = -1 \ ; \ \lambda_2 = 4}$

29. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

I. Averiguar para qué valores de λ, la matriz A no tiene inversa.

II. Calcular la inversa de A para λ = 2.

SOLUCIÓN I: **Para λ = 1 ; λ = 3 la matriz A no tiene inversa al ser |A| = 0**

SOLUCIÓN II: $\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

30. Resolver matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \\ x + 3y + 2z = 10 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = -2} \\ \mathbf{y = 2} \\ \mathbf{z = 3} \end{array}\right.$

31. Resolver matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ x - 2y + 4z = -13 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 3} \\ \mathbf{z = -2} \end{array}\right.$

32. Calcular el rango de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{t \neq 4 \Rightarrow R(A) = 2}$
$\mathbf{t = 4 \Rightarrow R(A) = 1}$

33. Calcular el rango de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{R(A) = 2}$

34. Calcular el rango de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{R(A) = 2}$

35. Dados los vectores:

$\vec{v}_1 = (1, -2, 2, 3, 4)$
$\vec{v}_2 = (2, 0, -3, 4, 2)$
$\vec{v}_3 = (10, -26, 61/2, 33, 49)$
$\vec{v}_4 = (4, -20, 26, 10, 34)$

se sabe que al menos uno de los $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ dependen linealmente de los $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

I. Determinar los coeficientes de dicha combinación lineal.

II. Hallar el rango de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 10 & -26 & 61/2 & 33 & 49 \\ 4 & -20 & 26 & 10 & 34 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{\vec{v}_3 = 13\,\vec{v}_1 - \frac{3}{2}\,\vec{v}_2 \;;\; \vec{v}_4 \neq \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{R(A) = 3}$

DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Teorema de Rouche

Sea un sistema de m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas.*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + \cdots + a_{1n}t = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + \cdots + a_{2n}t = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}t = k_m \end{array}\right\}$$

Formemos las matrices de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & k_2 \\ \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

I. *La condición necesaria y suficiente, para que un sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas sea* compatible, *es que las matrices de los coeficientes y la ampliada con los términos independientes tengan el mismo rango.*

II. *Si el rango,* h, *es igual al número de incógnitas,* n, *el sistema tiene solución única, es* compatible determinado. *Se obtiene esta solución eliminando las* m − n *ecuaciones que son combinación lineal de las* n, *y aplicando la regla de Crámer al sistema que nos queda de* n *ecuaciones con* n *incógnitas, pues su determinante es no nulo.*

III. *Si el rango,* h, *es menor que el número de incógnitas,* n, *el sistema tiene infinitas soluciones, es* compatible indeterminado. *Se obtienen estas soluciones pasando al segundo miembro las* n − h *incógnitas no principales, y aplicando la regla de Crámer al sistema que nos queda de* h *ecuaciones con* h *incógnitas principales y dando valores arbitrarios a las incógnitas no principales.*

NOTA: *Incógnitas principales son aquéllas que figuran en un menor principal, es decir, en un determinante de orden* h *no nulo. No principales son todas las demás.*

EJERCICIOS PROPUESTOS

36. Estudiar la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z - 9v = 0 \\ 3x - y - 5z + v = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 5v = 0 \end{array}\right\}$$

y resolverlo si es compatible.

SOLUCIÓN: **R(C) = R(A) = 3 < n.° Inc. ⇒ Sist. comp. ind.**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = \dfrac{119v}{56}} \\ \mathbf{y = \dfrac{98v}{56}} \\ \mathbf{z = \dfrac{63v}{56}} \end{array}\right.$$

37. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de a, y resolverlo cuando sea determinado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:
a ≠ 8 ⇒ R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.
a = 8 ⇒ R(C) = 2 = R(A) < n.° Inc.: Sist. comp. ind.

$$\mathbf{a \neq 8 \Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = \dfrac{-29a + 232}{-a + 8}} \\ \mathbf{y = \dfrac{19a - 152}{-a + 8}} \\ \mathbf{z = 0} \end{array}\right.$$

38. Estudiar la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x + 5y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

y resolverlo, si es compatible.

SOLUCIÓN: **R(C) = R(A) = 2 < n.° Inc.: Sist. comp. ind.**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = \dfrac{-z}{7}} \\ \mathbf{y = \dfrac{5z}{7}} \end{array}\right.$$

39. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de a, y resolverlo cuando sea determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 2a \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:
a ≠ 1 ⇒ R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.
a = 1 ⇒ R(A) = 2 > R(C) ⇒ Sist. inc.

$$\mathbf{a \neq 1 \Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = \dfrac{-2a^2 + 3a - 1}{a^2 - 2a + 1}} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = \dfrac{2a^2 - 3a + 1}{a^2 - 2a + 1}} \end{array}\right.$$

40. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y resolverlo si es compatible.

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -5 \\ 2x + y - z = 8 \\ x - 2y + z = -3 \\ x + 2y + 2z = -2 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = -3} \end{array}\right.$$

41. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y resolverlo si es compatible.

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 0 \\ 2x - 7y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.**
x = y = z = 0

42. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y resolverlo si es compatible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ -x + 5y + 2z = 23 \\ 3x - 4y + z = -1 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 3} \\ \mathbf{z = 5} \end{array}\right.$$

43. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + mz = 0 \\ 2x + my - z = 0 \\ x + y - mz = 0 \end{array}\right\}$$

hallar m para que admita soluciones no nulas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m_1 = -1 + \sqrt{3}\ ;\ m_2 = -1 - \sqrt{3}}$

44. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2my + 6z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ mx - 2y - 10z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{array}\right\}$$

hallar m para que admita soluciones no nulas.

SOLUCIÓN: **m = 2**

45. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2my - 3mz = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ 19x + 2my - 4z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{array}\right\}$$

hallar m para que admita soluciones no nulas.

SOLUCIÓN: **No hay ningún valor de m para el que el sistema tenga soluciones no nulas.**

46. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x - ny + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ mx - 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

hallar m y n para que el sistema tenga infinitas soluciones.

SOLUCIÓN: $\mathbf{m = -\dfrac{11}{2}\ ;\ n = \dfrac{1}{3}}$

47. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de a, y resolverlo cuando sea determinado.

$$\left.\begin{array}{r} 2ax - 3y + 4az = 8 \\ 5x - 2y + az = 4a \\ 4x + 5y - 10z = -16 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a \neq 1}\\ \mathbf{a \neq 15}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = n.^o\ Inc.: Comp.\ det.}$$

$\mathbf{a = 1 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < n.^o\ Inc.: Comp.\ ind.}$

$\mathbf{a = 15 \Rightarrow R(A) = 3 > R(C): Sist.\ inc.}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a \neq 1}\\ \mathbf{a \neq 15}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{80a^2 - 240a + 160}{-10a^2 + 160a - 150} \\ y = \dfrac{-112a^2 - 288a + 400}{-10a^2 + 160a - 150} \\ z = \dfrac{-40a^2 + 16a + 24}{-10a^2 + 160a - 150} \end{cases}$$

48. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de a, y resolverlo cuando sea indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} ax - (a-1)y + 5z = a - 1 \\ 2x - 3y + (a+1)z = 5 \\ 8x - 7y + 14z = 3a \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a \neq 3}\\ \mathbf{a \neq -10}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = n.^o\ Inc.: Comp.\ det.}$$

$\mathbf{a = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < n.^o\ Inc.: Comp.\ ind.}$

$\mathbf{a = -10 \Rightarrow R(A) = 3 > R(C): Sist.\ inc.}$

$$\mathbf{a = 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4 - 7z}{5} \\ y = \dfrac{-11 + 2z}{5} \end{cases}$$

49. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de k.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - z = -10 \\ 8x - 8y + 5z = 12 \\ x + 5y - kz = 5 \\ -3x + y + 3z = 9 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} \mathbf{k \neq 3 \Rightarrow R(A) = 4 > R(C): Sist.\ inc.} \\ \mathbf{k = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 = n.^o\ Inc.: Comp.\ det.} \end{cases}$$

50. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ ty + z = 0 \\ x + (1+t)y + tz = t + 1 \end{array}\right\}$$

determinar t de modo que:

I. El sistema tenga solución única.
II. Que tenga infinitas soluciones.
III. Que sea incompatible.

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{t \neq 0}\\ \mathbf{t \neq 1}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = n.^o\ Inc.: Sol.\ única}$$

$\mathbf{t = 0 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < n.^o\ Inc.: Inf.\ sol.}$

$\mathbf{t = 1 \Rightarrow R(A) > R(C): Sist.\ inc.}$

51. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y resolverlo si es compatible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z + u = 9 \\ 3x + 2y - z - 2u = 4 \\ 4x - y - 5z + u = 9 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

$\mathbf{R(C) = R(A) = 3 < n.^o\ Inc.: Comp.\ ind.}$

$$\begin{cases} x = z + 2 \\ y = -z + 1 \\ u = 2 \end{cases}$$

52. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema para los distintos valores de a, y resolverlo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a \neq -1}\\ \mathbf{a \neq 2}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(A) = 4 > R(C): Sist.\ inc.}$$

$\mathbf{a = -1 \Rightarrow R(A) = 3 > R(C): Sist.\ inc.}$

$\mathbf{a = 2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 = n.^o\ Inc.: Comp.\ det.}$

$$\mathbf{a = 2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

53. Discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z + t = 0 \\ ax - 2y + z + 4t = 0 \\ 3x - y - z + 4t = 0 \\ -2x + 4y - z + 9t = 0 \end{array}\right\}$$

para los distintos valores de a.

SOLUCIÓN:

$\mathbf{a \neq 11 \Rightarrow R(C) = R(A) = 4 = n.^o\ Inc.: Comp.\ det.}$

$\mathbf{a = 11 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 < n.^o\ Inc.: Comp.\ ind.}$

$\mathbf{a \neq 11 \Rightarrow x = y = z = t = 0}$

$$\mathbf{a = 11} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$$

54. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de a y b, y resolverlo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a \neq 2}\\ \mathbf{\forall b \in R}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = n.^o\ Inc.: Comp.\ det.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a \neq 2}\\ \mathbf{\forall b \in R}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2(1-b)}{a-2} \\ y = \dfrac{a + 4b - 6}{a-2} \\ z = \dfrac{b-1}{a-2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a = 2}\\ \mathbf{b \neq 1}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(A) = 3 > R(C): Sist.\ inc.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a = 2}\\ \mathbf{b = 1}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 2 < n.^o\ Inc.: Comp.\ ind.}$$

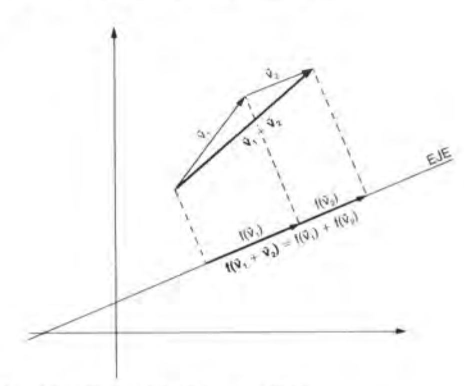
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a = 2}\\ \mathbf{b = 1}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 1 + 4z \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

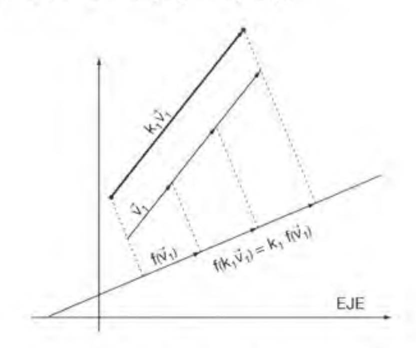
1. RESOLUCIÓN

a) *La citada correspondencia es una aplicación, pues a cada vector libre del plano le corresponde uno y solo un vector como proyección de aquél sobre el eje.*

$\forall\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \in V:\ f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$



$\forall \vec{v}_1 \in V\ ;\ \forall k_1 \in \mathbf{R}:\ f(k_1\, \vec{v}_1) = k_1\, f(\vec{v}_1)$



b) *El núcleo de esta aplicación es el conjunto de todos los vectores del plano perpendiculares al eje.*

SOLUCIÓN: **El núcleo de esta aplicación es el conjunto de todos los vectores del plano perpendiculares al eje.**

2. RESOLUCIÓN

$\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = (x_1 + 1,\ y_1 + 1)$

$\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2) \Rightarrow f(\vec{v}_2) = (x_2 + 1,\ y_2 + 1)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2)] \Rightarrow f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$

$= [(x_1 + x_2 + 1),\ (y_1 + y_2 + 1)] = [(x_1 + 1),\ (y + 1)] + [x_2,\ y_2] \neq$

$\neq f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

Al no verificarse el primer axioma es evidente que f no es aplicación lineal.

SOLUCIÓN: **f no es una aplicación lineal**

3. RESOLUCIÓN

$\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = (2x_1,\ y_1 - 1)$

$\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2) \Rightarrow f(\vec{v}_2) = (2x_2,\ y_2 - 1)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2)] \Rightarrow f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$

$= [2\,(x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2 - 1)] = [(2x_1 + 2x_2),\ (y_1 + y_2 - 1)] =$

$= [2x_1,\ y_1 - 1] + [2x_2,\ y_2] \neq f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

Al no verificarse el primer axioma es evidente que f no es una aplicación lineal.

SOLUCIÓN: **f no es una aplicación lineal**

4. RESOLUCIÓN

a) $\vec{v}_1 = (x_1) \Rightarrow T(\vec{v}_1) = (3x_1,\ x_1)$

$\vec{v}_2 = (x_2) \Rightarrow T(\vec{v}_2) = (3x_2,\ x_2)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + x_2)] \Rightarrow T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = [3\,(x_1 + x_2),\ (x_1 + x_2)] =$

$= [(3x_1 + 3x_2),\ (x_1 + x_2)] = [3x_1,\ x_1] + [3x_2,\ x_2] =$

$= T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$

b) $\vec{v}_1 = (x_1) \Rightarrow T(\vec{v}_1) = (3x_1,\ x_1)$

$k_1\, \vec{v}_1 = (k_1\, x_1) \Rightarrow T(k_1\, \vec{v}_1) = [3k_1\, x_1,\ k_1\, x_1] =$

$= k_1\, [3x_1,\ x_1] = k_1\, T(\vec{v}_1)$

Al verificarse los dos axiomas de linealidad es evidente que T es una transformación lineal.

SOLUCIÓN: **T es una transformación lineal**

5. RESOLUCIÓN

a) $\vec{v}_1 = (x_1,\ x_2) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = [(x_1 - 3x_2),\ (2x_1 + x_2)]$

$\vec{v}_2 = (y_1,\ y_2) \Rightarrow f(\vec{v}_2) = [(y_1 - 3y_2),\ (2y_1 + y_2)]$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + y_1),\ (x_2 + y_2)] \Rightarrow f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$

$= [[(x_1 + y_1) - 3\,(x_2 + y_2)],\ [2\,(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)]] =$

$= [[(x_1 - 3x_2) + (y_1 - 3y_2)],\ [(2x_1 + x_2) + (2y_1 + y_2)]] =$

$= [(x_1 - 3x_2), (2x_1 + x_2)] + [(y_1 - 3y_2),\ (2y_1 + y_2)] = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

b) $\vec{v}_1 = (x_1,\ x_2) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = [(x_1 - 3x_2),\ (2x_1 + x_2)]$

$k_1\, \vec{v}_1 = (k_1\, x_1,\ k_1\, x_2) \Rightarrow f(k_1\, \vec{v}_1) =$

$= [(k_1\, x_1 - 3k_1\, x_2),\ (2k_1\, x_1 + k_1\, x_2)] =$

$= k_1\, [(x_1 - 3x_2),\ (2x_1 + x_2)] = k_1\, f(\vec{v}_1)$

Al verificarse los dos axiomas de linealidad, es evidente que f es una aplicación lineal.

SOLUCIÓN: **f es una aplicación lineal**

6. RESOLUCIÓN

$\vec{v}_1 = (x_1,\ x_2) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = (x_1\, x_2,\ x_1 + 1)$

$\vec{v}_2 = (y_1,\ y_2) \Rightarrow f(\vec{v}_2) = (y_1\, y_2,\ y_1 + 1)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + y_1),\ (x_2 + y_2)] \Rightarrow f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$

$= [(x_1 + y_1)\,(x_2 + y_2),\ (x_1 + y_1 + 1)] =$

$= [(x_1\, x_2 + x_1\, y_2 + y_1\, x_2 + y_1\, y_2),\ (x_1 + y_1 + 1)] =$

$= [(x_1\, x_2,\ x_1 + 1)] + [(x_1\, y_2 + y_1\, x_2 + y_1\, y_2),\ y_1] \neq f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

Al no verificarse el primer axioma es evidente que f no es una aplicación lineal.

SOLUCIÓN: **f no es una aplicación lineal**

7. RESOLUCIÓN

I. $f(x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_1,\ y_1,\ 0) \Rightarrow f(4,\ -2,\ 5) = (4,\ -2,\ 0)$

SOLUCIÓN I: **f(4, −2, 5) = (4, −2, 0)**

II. a)

$\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = (x_1,\ y_1,\ 0)$

$\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2) \Rightarrow f(\vec{v}_2) = (x_2,\ y_2,\ 0)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2),\ (z_1 + z_2)] \Rightarrow f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$

$= [(x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2),\ 0] = [(x_1,\ y_1,\ 0) + (x_2,\ y_2,\ 0)] =$

$= f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

b)

$\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = (x_1,\ y_1,\ 0)$

$k_1\, \vec{v}_1 = (k_1\, x_1,\ k_1\, y_1,\ k_1\, z_1) \Rightarrow f(k_1\, \vec{v}_1) = [k_1\, x_1,\ k_1\, y_1,\ 0] =$

$= k_1\, [x_1,\ y_1,\ 0] = k_1\, f(\vec{v}_1)$

SOLUCIÓN II: **Al verificarse los dos axiomas de linealidad queda comprobado que f es una aplicación lineal**

III.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_1,\ y_1,\ 0) \\ f\ ¿(x,\ y,\ z)? = (0,\ 0,\ 0) \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{array}$$

SOLUCIÓN III: **Núcleo de f** $= \{(0, 0, z) \in \mathbf{R}^3\}$

IV. $f(0,\ -2,\ 0) = (0,\ -2,\ 0) \neq (0,\ 0,\ 0) \Rightarrow (0,\ -2,\ 0) \notin$ núcleo de f

SOLUCIÓN IV: $\vec{w}$ **= (0, −2, 0) no pertenece al núcleo de f**

8. RESOLUCIÓN

I. $T(x_1,\ y_1) = (3x_1 - y_1) \Rightarrow T(2,\ 4) = (3 \times 2 - 4) = (2)$

SOLUCIÓN I: **T(2, 4) = (2)**

II. a)

$\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1) \Rightarrow T(\vec{v}_1) = (3x_1 - y_1)$

$\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2) \Rightarrow T(\vec{v}_2) = (3x_2 - y_2)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(x_1 + x_2),\ (y_1 + y_2)] \Rightarrow T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$
$= [3\,(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)] = [(3x_1 + 3x_2 - y_1 - y_2)] =$
$= (3x_1 - y_1) + (3x_2 - y_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$

b)

$\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1) \Rightarrow T(\vec{v}_1) = (3x_1 - y_1)$

$k_1\,\vec{v}_1 = (k_1\,x_1,\ k_1\,y_1) \Rightarrow T(k_1\,\vec{v}_1) = (3k_1\,x_1 - k_1\,y_1) =$
$= k_1\,(3x_1 - y_1) = k_1\,T(\vec{v}_1)$

SOLUCIÓN II: **Al cumplirse los dos axiomas de linealidad queda probado que T es una transformación lineal**

III. $\left.\begin{array}{l} T(x_1,\ y_1) = 3x_1 - y_1 \\ T\ ¿(x,\ y)? = 3x - y = 0 \end{array}\right\}\ 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x$

SOLUCIÓN III: **Núcleo de T = {(x, y) ∈ R² | y = 3x}**

IV. $T(9,\ 3) = (27 - 3) \neq (0) \Rightarrow (9,\ 3) \notin$ núcleo de T

SOLUCIÓN IV: **$\vec{w}$(9, 3) no pertenece al núcleo de T**

9. RESOLUCIÓN

*El núcleo de esa aplicación es el conjunto de todos los vectores del plano **R × R** que son perpendiculares al eje Y′Y, puesto que su proyección sobre dicho eje es el vector nulo.*

SOLUCIÓN: **El núcleo de esa aplicación es el conjunto de todos los vectores del plano R × R que son perpendiculares al eje Y′Y, puesto que su proyección sobre dicho eje es el vector nulo**

10. RESOLUCIÓN

I. *Núcleo de la transformación.*

$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = [(2x_1 - x_2 + x_3),\ (3x_1 + x_2)] = (0,\ 0)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = -3x_1 \\ x_3 = -5x_1 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN I: **Núcleo = {(x₁, x₂, x₃) ∈ R³ | x₂ = −3x₁; x₃ = −5x₁}**

II. *Un vector del núcleo.*

Para $x_1 = 2$, por ejemplo, $x_2 = -6$; $x_3 = -10$

SOLUCIÓN II: **$\vec{v}$(2, −6, −10) ∈ Núcleo**

11. RESOLUCIÓN

I. $f(1, 2, 3) = (2, 7, 7) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow \vec{v} \notin$ al núcleo.

SOLUCIÓN I: **$\vec{v}$(1, 2, 3) no pertenece al núcleo**

II. $¿f(x_1,\ x_2,\ x_3) = [(x_1 - x_2 + x_3),\ (2x_1 + x_2 + x_3),\ (3x_1 + 2x_3)] = (1,\ 2,\ 3)?$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = 3 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = \dfrac{1 - x_1}{2} \\ x_3 = \dfrac{3 - 3x_1}{2} \end{array}\right.$$

*Como el sistema tiene infinitas soluciones, hay infinitos vectores de **R³** cuya imagen es el $\vec{w}(1,\ 2,\ 3)$.*

SOLUCIÓN II: **El $\vec{w}$(1, 2, 3) pertenece a la imagen de f**

III. $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = [(x_1 - x_2 + x_3),\ (2x_1 + x_2 + x_3),\ (3x_1 + 2x_3)] = (0,\ 0,\ 0)$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = \dfrac{-x_1}{2} \\ x_3 = \dfrac{-3x_1}{2} \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN III: **Núcleo de f = $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_2 = -\dfrac{x_1}{2}\ ;\ x_3 = -\dfrac{3x_1}{2}\right\}$**

12. RESOLUCIÓN

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}\ ;\ \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(1 - \sqrt{5})\,(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})\,(1 - \sqrt{5})} =$$
$$= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{1 - 5} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{-4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}, \cdots$$
$$\cdots,\ 1 = 1$$

SOLUCIÓN: **∀ (i, j) es $a_{ij} = b_{ij}$ por lo que A = B**

13. RESOLUCIÓN

I.

$$A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 50 & 64 \\ 45 & 28 & 48 \\ 24 & 37 & 60 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 51 & 50 & 64 \\ 45 & 28 & 48 \\ 24 & 37 & 60 \end{pmatrix}}$

II.

$$A \times B' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 31 \\ 7 & 26 & 25 \\ -4 & 23 & 40 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{A \times B' = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 31 \\ 7 & 26 & 25 \\ -4 & 23 & 40 \end{pmatrix}}$

III.

$$B' \times A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 4 & 16 \\ 7 & 3 & 5 \\ 35 & 25 & 28 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{B' \times A = \begin{pmatrix} 36 & 4 & 16 \\ 7 & 3 & 5 \\ 35 & 25 & 28 \end{pmatrix}}$

IV.

$$A \times (3B - 2C) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & 3 & 15 \\ 18 & 3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 & 14 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -11 & -12 & -8 \\ 3 & -7 & 15 \\ 18 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -65 & 67 \\ 70 & -21 & 69 \\ -48 & -69 & -40 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{A \times (3B - 2C) = \begin{pmatrix} 18 & -65 & 67 \\ 70 & -21 & 69 \\ -48 & -69 & -40 \end{pmatrix}}$

V.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 30 & 28 \\ 30 & 14 & 18 \\ 24 & 30 & 13 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN V: $\mathbf{A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 30 & 28 \\ 30 & 14 & 18 \\ 24 & 30 & 13 \end{pmatrix}}$

14. RESOLUCIÓN

Para comprobarlo efectuamos el producto indicado.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

y, del concepto de igualdad de matrices, se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: **Sí se puede escribir matricialmente**

15. RESOLUCIÓN

Escribimos los sistemas en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Haciendo las sustituciones adecuadas, aplicando la propiedad asociativa cuando es preciso y operando:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 50 & 12 \\ -33 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50t_1 + 12t_2 \\ -33t_1 - 11t_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50t_1 + 12t_2 \\ -33t_1 - 11t_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 50t_1 + 12t_2 \\ x_2 = -33t_1 - 11t_2 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x_1 = 50t_1 + 12t_2}$; $\mathbf{x_2 = -33t_1 - 11t_2}$

16. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & -8 & 13 & 16 \end{pmatrix} \\ 5A - 3B = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & 6 & 12 & 17 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9A + 12B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 54 & 45 \\ 84 & 57 & 78 & -57 \\ -9 & -24 & 39 & 48 \end{pmatrix} \\ 20A - 12B = \begin{pmatrix} 72 & 40 & 120 & -16 \\ 32 & 88 & 96 & -88 \\ -20 & 24 & 48 & 68 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 29A = \begin{pmatrix} 87 & 58 & 174 & 29 \\ 116 & 145 & 174 & -145 \\ -29 & 0 & 87 & 116 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bien por reducción o sustitución obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

17. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X = 2A - 3B \\ Y = 5B - 3A \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \\ Y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X^2 + Y^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-14} & \mathbf{17} \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

18. RESOLUCIÓN

La base canónica de R^3 *es* $[(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)]$*, por tanto:*

$$\left.\begin{array}{l} f(1, 0, 0) = (\ 2, 0,\ 1) \\ f(0, 1, 0) = (-1, 1, -1) \\ f(0, 0, 1) = (\ 0, 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

NOTA: *Obsérvese que* $f(x_1, x_2, x_3) = [2x_1 - x_2,\ x_2,\ x_1 - x_2 + x_3]$ *o lo que es lo mismo:*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 - x_2 + 0x_3 \\ y_2 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{array}\right.$$

implica que la matriz asociada sea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

19. RESOLUCIÓN

a) *Hallamos las ecuaciones de la transformación:*

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2) \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{array}\right.$$

b) *Conocidas las ecuaciones ya podemos hallar la imagen del* $\vec{v}\ (1, 2, -1)$:

$$f(\vec{v}) = f(1, 2, -1) = (-3, -1)$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{f(\vec{v}) = (-3, -1)}$

20. RESOLUCIÓN

I. *Sean las ecuaciones de la aplicación:*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ y_2 = mx_1 + nx_2 + px_3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = (1, 3, -1) \\ f(\vec{a}) = (0, 1) \\ \vec{b} = (-1, 1, 0) \\ f(\vec{b}) = (-1, 0) \\ \vec{c} = (0, 0, 1) \\ f(\vec{c}) = (1, -3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = a + 3b - c \\ 1 = m + 3n - p \\ -1 = -a + b \\ 0 = -m + n \\ 1 = c \\ -3 = p \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema formado por estas seis ecuaciones obtenemos:

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 1$

$m = -1/2 \quad n = -1/2 \quad p = -3$

y por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = -\dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - x_3 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{y_1 = x_1 + x_3}$; $\mathbf{y_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x - x_3}$

II. *Matriz asociada:*

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)=(1,-1/2)\\ f(0,1,0)=(0,-1/2)\\ f(0,0,1)=(1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}}$

21. RESOLUCIÓN

I. *Sean las ecuaciones de la aplicación:*

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3\\ y_2 = mx_1 + nx_2 + px_3\\ y_3 = qx_1 + rx_2 + sx_3\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(1,1,0)\\ f(\vec{a})=(2,2,1)\end{array}\right|\\ \\ \left.\begin{array}{l}\vec{b}=(0,0,1)\\ f(\vec{b})=(0,-1,-1)\end{array}\right|\\ \\ \left.\begin{array}{l}\vec{c}=(-1,1,2)\\ f(\vec{c})=(2,-2,1)\end{array}\right|\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}2=a+b\\ 2=m+n\\ 1=q+r\end{cases}\\ \\ \begin{cases}0=c\\ -1=p\\ -1=s\end{cases}\\ \\ \begin{cases}2=-a+b+2c\\ -2=-m+n+2p\\ 1=-q+r+2s\end{cases}\end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema formado por estas nueve ecuaciones obtenemos:

$a=0 \quad b=2 \quad c=0$

$m=1 \quad n=1 \quad p=-1$

$q=-1 \quad r=2 \quad s=-1$

y por tanto:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_2\\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3\\ y_3 = -x_1 + 2x_2 - x_3\end{cases}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{y_1 = 2x_2}\\ \mathbf{y_2 = x_1 + x_2 - x_3}\\ \mathbf{y_3 = -x_1 + 2x_2 - x_3}\end{array}}$

II. *Matriz asociada:*

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)=(0,\ 1,-1)\\ f(0,1,0)=(2,\ 1,\ 2)\\ f(0,0,1)=(0,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}}$

22. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l}3A-5B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & 1\end{pmatrix}\\ \\ -A+3B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3A-5B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & 1\end{pmatrix}\\ \\ -3A+9B=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 9 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4B=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 17 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}\dfrac{7}{4} & \dfrac{10}{4}\\ \dfrac{17}{4} & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Por sustitución o reducción obtenemos:

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{13}{4} & \dfrac{14}{4}\\ \dfrac{39}{4} & \dfrac{3}{4}\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}} & \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\\ \dfrac{\mathbf{39}}{\mathbf{4}} & \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\end{pmatrix}\ ;\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}} & \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\\ \dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\end{pmatrix}}$

23. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l}2A+B=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}\\ \\ 3A+2B=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}\end{array}\right\}\begin{array}{l}4A+2B=\begin{pmatrix}10 & 24 & 14\\ 8 & 4 & 14\end{pmatrix}\\ \\ -3A-2B=\begin{pmatrix}-11 & -25 & 0\\ -20 & -10 & -35\end{pmatrix}\end{array}\Bigg\}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{14}\\ \mathbf{-12} & \mathbf{-6} & \mathbf{-21}\end{pmatrix}\ ;\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{14} & \mathbf{-21}\\ \mathbf{18} & \mathbf{14} & \mathbf{49}\end{pmatrix}}$

24. RESOLUCIÓN

Primer procedimiento

Como $A \in \mathcal{M}(2,2)$ y $(B+C) \in \mathcal{M}(2,2)$, para que x sea multiplicable por A, y dé una matriz de tipo (2, 2), ha de ser $X \in \mathcal{M}(2,2)$.

Sea $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ *; tendremos:*

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x+y & x+2y\\ z+t & z+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x+2y=1\\ z+t=1\\ z+2t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=1\\ t=0\end{cases}$$

Segundo procedimiento

$X \cdot A = B + C$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, por la derecha:

$(X \cdot A)\,A^{-1} = (B+C)\,A^{-1} \Rightarrow X\,(A \cdot A^{-1}) = (B+C)\,A^{-1}$

$X = (B+C)\,A^{-1}$ (1)

Cálculo de A^{-1}:

$$\left.\begin{array}{l}A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}\\ |A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\\ A_{11}=2\ ;\ A_{21}=-1\\ A_{12}=-1\ ;\ A_{22}=1\end{array}\right\}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

llevando estos valores a la ecuación (1) *resulta:*

$$X=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}}$

25. RESOLUCIÓN

Primer procedimiento

Como $A \in \mathcal{M}(2,2)$ y $B \in \mathcal{M}(2,2)$, para que sea posible el producto $A \cdot X$ y dé una matriz del tipo (2, 2) ha de ocurrir $X \in \mathcal{M}(2,2)$.

Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ *; tendremos:*

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+3c & 2b+3d\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}2a+3c=3\\ 2b+3d=1\\ a+2c=2\\ b+2d=-5\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=17\\ c=1\\ d=-11\end{cases}$$

Segundo procedimiento

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, por la izquierda:

$A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)\,X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$ (1)

Cálculo de A^{-1}:

$$\left.\begin{array}{l} A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix} \\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{11} = 2 \;;\; A_{21} = -3 \\ A_{12} = -1 \;;\; A_{22} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación (1) *resulta:*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{17} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-11} \end{pmatrix}$

26. RESOLUCIÓN

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, *por la izquierda:*

$A^{-1}(A\,X\,B) = A^{-1}\,C \Rightarrow (A^{-1}A)\,(X\,B) = A^{-1}\,C$

$X\,B = A^{-1}\,C$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por B^{-1}, *por la derecha:*

$(X\,B)\,B^{-1} = (A^{-1}\,C)\,B^{-1} \Rightarrow X\,(B\,B^{-1}) = (A^{-1}\,C)\cdot B^{-1}$

$X = (A^{-1}\,C)\cdot B^{-1}$ (1)

Calculando A^{-1} *y* B^{-1} *obtenemos:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;;\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la (1) *y operando:*

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

27. RESOLUCIÓN

$M\,X + N = P \Rightarrow M\,X = P - N$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

28. RESOLUCIÓN

Cálculo de la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda\cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Cálculo del determinante de $A - \lambda I$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Cálculo de los valores propios:

$\Delta = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \;;\; \lambda_2 = 4$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lambda_1 = -1 \;;\; \lambda_2 = 4}$

29. RESOLUCIÓN

I. *Para que A tenga matriz inversa su determinante ha de ser no nulo.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 4\lambda - 3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \neq 1 \\ \lambda_2 \neq 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN I: **Para $\lambda = 1$; $\lambda = 3$ la matriz A no tiene inversa al ser $|\mathbf{A}| = 0$**

II.

Para $\lambda = 2$ *resulta:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \;;\; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 12 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{12} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

NOTA: *Compruébese que* $A \times A^{-1} = I$

30. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \\ x + 3y + 2z = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A\cdot X = K$ (1)

siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \;;\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;;\; K = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Multiplicando los dos miembros de la (1) *por* A^{-1}, *por la izquierda:*

$A^{-1}(A\,X) = A^{-1}\cdot K \Rightarrow (A^{-1}A)\,X = A^{-1}\cdot K \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}K$ (2)

Cálculo de A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \;;\; |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -19 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -19 & 18 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 11 & -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{9} & 2 & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{11}{9} & -1 & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la (2), *resulta:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{9} & 2 & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{11}{9} & -1 & \frac{5}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\begin{cases} \mathbf{x = -2} \\ \mathbf{y = 2} \\ \mathbf{z = 3} \end{cases}$

31. RESOLUCIÓN

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 2z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= -1 \\ x - 2y + 4z &= -13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cdots X = A^{-1}K \quad (1). \text{ (Ver problema 30)}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 50 \; ; A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{50} & \frac{12}{50} & -\frac{4}{50} \\ -\frac{5}{50} & \frac{14}{50} & -\frac{13}{50} \\ -\frac{5}{50} & \frac{4}{50} & \frac{7}{50} \end{pmatrix}$$

llevando estos valores a la ecuación (1) *resulta:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{50} & \frac{12}{50} & -\frac{4}{50} \\ -\frac{5}{50} & \frac{14}{50} & -\frac{13}{50} \\ -\frac{5}{50} & \frac{4}{50} & \frac{7}{50} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 3} \\ \mathbf{z = -2} \end{cases}$

32. RESOLUCIÓN

Designamos por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ los vectores fila y por $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ y $\vec{w}_4$ los vectores columna.

I. *Suprimimos $\vec{v}_3$, combinación lineal de los demás.*

$$\left[\vec{v}_3 = -\frac{3}{2}\vec{v}_2 \right]$$

Resulta la matriz A_1, con el mismo rango que A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

II. *Suprimimos $\vec{w}_2$ [$\vec{w}_2 = 2\,\vec{w}_1$]. Obtenemos la matriz A_2 con el mismo rango que A_1.*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

III. *Suprimimos $\vec{w}_3$ (referido a la matriz A, $\vec{w}_3 = 3\,\vec{w}_1$). Obtenemos la matriz A_3 con el mismo rango que A_2.*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Obviamente el rango de A_3 es 2 para $t \neq 4$ y 1 para $t = 4$. Por tanto:

$t \neq 4 \Rightarrow R(A) = R(A_1) = R(A_2) = R(A_3) = 2$

$t = 4 \Rightarrow R(A) = R(A_1) = R(A_2) = R(A_3) = 1$

SOLUCIÓN: $\mathbf{t \neq 4 \Rightarrow R(A) = 2}$; $\mathbf{t = 4 \Rightarrow R(A) = 1}$

33. RESOLUCIÓN

Designamos por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ los vectores fila.

Suprimimos $\vec{v}_1$ [$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$]. Obtenemos la matriz A_1, que tiene el mismo rango que A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente que el rango de A_1 es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ *y no hay determinantes de orden superior al dos. Como el rango de A es el mismo que el de A_1:*

$$R(A) = 2$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{R(A) = 2}$

NOTA: *Podíamos haber suprimido de entrada la cuarta columna, por estar formada por ceros, sin variar el rango, pero ya vemos que resulta totalmente innecesario.*

34. RESOLUCIÓN

Designamos por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ los vectores fila de A.

I. *Suprimimos $\vec{v}_2$ [$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$]. Obtenemos A_1, con el mismo rango que A.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

II. *Suprimimos $\vec{v}_1$ [$\vec{v}_1 = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$] (siempre referido a A). Resulta la matriz A_2 del mismo rango que A_1.*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de A_2 es, evidentemente, 2, pues, por ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ *y no hay determinantes de orden superior a 2.*

$R(A) = R(A_1) = R(A_2) = 2$

SOLUCIÓN: $\mathbf{R(A) = 2}$

35. RESOLUCIÓN

I. a) *¿$\vec{v}_3 = k_1\,\vec{v}_1 + k_2\,\vec{v}_2$?*

¿(10, −26, 61/2, 33, 49) = k_1 (1, −2, 2, 3, 4) + k_2 (2, 0, −3, 4, 2)?

$$\left.\begin{aligned} k_1 + 2k_2 &= 10 \\ -2k_1 &= -26 \\ 2k_1 - 3k_2 &= 61/2 \\ 3k_1 + 4k_2 &= 33 \\ 4k_1 + 2k_2 &= 49 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 13 \\ k_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) *¿$\vec{v}_4 = \lambda_1\,\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$?*

¿(4, −20, 26, 10, 34) = λ_1 (1, −2, 2, 3, 4) + λ_2 (2, 0, −3, 4, 2)?

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 = -20 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 26 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 10 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 34 \end{array}\right\} \text{Sistema incompatible}$$

NOTA: *La solución del sistema formado por las dos primeras, $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = -3$, ya no satisface la tercera.*

SOLUCIÓN I: $\boxed{\vec{v}_3 = 13\,\vec{v}_1 - \frac{3}{2}\,\vec{v}_2 \ ; \ \vec{v}_4 \neq \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2}$

II. *Rango de A.*

a)

Suprimimos $\vec{v}_3$ [$\vec{v}_3 = 13\vec{v}_1 - \frac{3}{2}\vec{v}_2$]. Obtenemos A_1, del mismo rango que A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & -20 & 26 & 10 & 34 \end{pmatrix}$$

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -20 & 26 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A_1) = 3$$

y como $R(A) = R(A_1)$, resulta: $R(A) = 3$

SOLUCIÓN II: $\boxed{R(A) = 3}$

36. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -9 \\ 3 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}}_{C}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{A}$$

I. *La matriz ampliada, A, y la de los coeficientes, C, tienen el mismo rango, pues si suprimimos la columna de ceros de A su rango no varía y se convierte en la C.*

$R(C) = R(A) \Rightarrow$ Sist. compatible

II. *$R(C) = R(A) < 4$, pues no hay determinantes de 4.° orden.*

$R(C) = R(A) < 4$ (n.° Inc.) $\Rightarrow$ Sist. compatible indeterminado

III.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} R(C) = R(A) < 4 \\ \Delta = 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(C) = R(A) = 3$$

Además: *x, y, z son las incógnitas principales, (son las que intervienen en Δ, menor principal) y v es la incógnita no principal.*

IV.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 9v \\ 3x - y - 5z = -v \\ 2x + 3y - 4z = 5v \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9v & 2 & 3 \\ -v & -1 & -5 \\ 5v & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{119v}{56}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9v & 3 \\ 3 & -v & -5 \\ 2 & 5v & -4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{98v}{56}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9v \\ 3 & -1 & -v \\ 2 & 3 & 5v \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{63v}{56}$$

SOLUCIÓN:

$R(C) = R(A) = 3 <$ n.° Inc. $\Rightarrow$ Sist. comp. ind.

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{119v}}{\mathbf{56}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{98v}}{\mathbf{56}} \\ \mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{63v}}{\mathbf{56}} \end{cases}$$

37. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}_{C}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{matrix}}_{A}$$

I. *Vamos a determinar cuándo es $R(C) = 3$:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -a + 8 \neq 0 \Rightarrow a \neq 8$$

$\forall a \in \mathbf{R} \,/\, a \neq 8$ es $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) =$ n.° Inc.: Sist. comp. det. (no hay determinantes de orden superior al 3 en la matriz A).

II. *Analizamos el caso $a = 8$:*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}}_{C}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{matrix}}_{A}$$

Suprimimos $\vec{v}_2$ [$\vec{v}_2 = 2\,\vec{v}_1$], resulta:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}}_{C_1}\begin{matrix} 1 \\ 10 \end{matrix}}_{A_1}$$

donde vemos que $R(C_1) = 2 = R(A_1)$, y como C y C_1, por una parte, y, A y A_1, por otra, tienen el mismo rango, resulta que para $a = 8$ el $R(C) = 2 = R(A) <$ n.° Inc.: Sist. comp. ind.

III. *Resolución del sistema para $a \neq 8$:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & -a \\ 10 & 1 & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-29a + 232}{-a + 8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -a \\ 1 & 10 & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{19a - 152}{-a + 8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0}{-a + 8}$$

SOLUCIÓN:

$a \neq 8 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) =$ n.° Inc.: Sist. comp. det.

$a = 8 \Rightarrow R(C) = 2 = R(A) <$ n.° Inc.: Sist. comp. ind.

$$\mathbf{a \neq 8} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{-29a + 232}}{\mathbf{-a + 8}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{19a - 152}}{\mathbf{-a + 8}} \\ \mathbf{z = 0} \end{cases}$$

38. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{C}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{A}$$

I. *La matriz ampliada, A, y la de los coeficientes, C, tienen el mismo rango.* (Ver problema 36.)

$R(C) = R(A) \Rightarrow$ *Sist. comp.*

II. *Vamos a determinar el rango de las matrices C y A.*

Suprimimos $\vec{v}_1$ $[\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3]$, *resulta:*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix.}}_{C_1}\left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)}_{A_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ R(C) = R(A) \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2 = R(A) < n.^o Inc.: \text{ Sist. comp. ind.}$$

Además: *La cuarta ecuación es combinación lineal de las demás (se suprime, como la primera), x e y son las incógnitas principales (son las que intervienen en el menor principal no nulo), z es la incognita no principal.*

III.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 2z \\ 2x - y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{z}{7} \\ y = \dfrac{5z}{7} \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: **R(C) = R(A) = 2 < n.º Inc.: Sist. comp. ind.**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{-z}}{\mathbf{7}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{5z}}{\mathbf{7}} \end{array}\right.$$

39. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix.}}_{C}\left.\begin{matrix} 1 \\ a \\ 2a \end{matrix}\right)}_{A}$$

I. *Vamos a determinar cuándo es R(C) = 3:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$$

$\forall\, a \in \mathbf{R} \,/\, a \neq 1$ *es* $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) = n.^o$ *Inc.: Sist. comp. det. (no hay determinantes de orden superior a 3 en la matriz A).*

II. *Analizamos el caso a = 1:*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix.}}_{C}\left.\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right)}_{A}$$

Suprimimos $\vec{v}_1$ $[\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ *en las dos matrices], resulta:*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix.}}_{C_1}\left.\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right)}_{A_1}$$

donde vemos que $R(C_1) = 1$ *y* $R(A_1) = 2$, *y como* C_1 *y C, por una parte, y,* A_1 *y A, por otra, tienen el mismo rango, resulta que para a = 1 el R(A) = 2 > R(C): Sist. inc.*

III. *Resolución del sistema para a ≠ 1:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2a^2 + 3a - 1}{a^2 - 2a + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 2a + 1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2a^2 - 3a + 1}{a^2 - 2a + 1}$$

SOLUCIÓN:

a ≠ 1 ⇒ R(C) = 3 = R(A) = n.º Inc.: Sist. comp. det.

a = 1 ⇒ R(A) = 2 > R(C) ⇒ Sist. inc.

$$\mathbf{a \neq 1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{-2a^2 + 3a - 1}}{\mathbf{a^2 - 2a + 1}} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{2a^2 - 3a + 1}}{\mathbf{a^2 - 2a + 1}} \end{array}\right.$$

40. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix.}}_{C}\left.\begin{matrix} -5 \\ 8 \\ -3 \\ -2 \end{matrix}\right)}_{A} = 0$$

I. *Vamos a determinar si el rango de A es 4, pues si fuese 4 sería mayor que el de C, el sistema incompatible, y habríamos terminado.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(A) < 4$$

Además: *Hay una línea combinación lineal de las demás.*

II. *Vamos a ver ahora si el rango de C es tres o menor que tres.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} R(A) < 4 \\ R(C) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) = n.^o Inc.: \text{ Sist. comp. det.}$$

Además: *El* $\vec{v}_4$ *es combinación lineal de los otros tres (suprimimos la cuarta fila), si no fuese así al orlar* Δ_1 *no daría el* $\Delta = 0$, *y la cuarta ecuación es combinación lineal de las otras tres (la eliminamos).*

III. *Resolución del sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -5 \\ 2x + y - z = 8 \\ x - 2y + z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: **R(C) = 3 = R(A) = n.º Inc.: Sist. comp. det.**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = -3} \end{array}\right.$$

41. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix.}}_{C}\left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)}_{A}$$

I. *La matriz ampliada, A, y la de los coeficientes, C, tienen el mismo rango.* (Ver problema 36)

$R(C) = R(A) \Rightarrow$ *Sist. comp.*

II. *Vamos a determinar el rango de las matrices C y A.*

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \\ R(C) = R(A) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R(C) = 3 = R(A) = n.^o$ *Inc.: Sist. comp. det.*

III. *Resolución del sistema:*
Puesto que es un sistema homogéneo, con solución única, ésta será la trivial: $x = y = z = 0$

SOLUCIÓN: **R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.**
$\mathbf{x = y = z = 0}$

42. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 2 \\ 23 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)}_{C}$$

I. *Vamos a determinar si el rango de A es 4:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 23 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(A) < 4$$

Además: *Hay una línea combinación lineal de las demás.*

II. *Veamos ahora si el rango de C es tres o menos de tres.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3$$

$$\left.\begin{matrix} R(A) < 4 \\ R(C) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 = \text{n.° Inc.: Sist. comp. det.}$$

Además: *El $\vec{v}_4$ es combinación lineal de los otros tres (suprimimos la cuarta fila) y la cuarta ecuación combinación lineal de las otras tres (la eliminamos).*

III. *Resolución del sistema:*

$$\left.\begin{matrix} 2x + y - z = 2 \\ -x + 5y + 2z = 23 \\ 3x - 4y + z = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{matrix}\right.$$

SOLUCIÓN: **R(C) = 3 = R(A) = n.° Inc.: Sist. comp. det.**
$\mathbf{x = 2}$
$\mathbf{y = 3}$
$\mathbf{z = 5}$

43. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & m \\ 2 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)}_{C}$$

I. *Evidentemente R(A) = R(C), por tanto el sistema siempre es compatible.*

II. *Para que admita soluciones no nulas hay que hacer que sea indeterminado; ocurrirá cuando R(C) = R(A) < 3 (n.° Inc.), para ello han de ser nulos* TODOS *los determinantes de orden tres. Como sólo hay uno:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 2 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m_1 = -1 + \sqrt{3} \ ; \ m_2 = -1 - \sqrt{3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{m_1 = -1 + \sqrt{3} \ ; \ m_2 = -1 - \sqrt{3}}$

44. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 2m & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & -2 & -10 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)}_{C}$$

I. *Evidentemente R(A) = R(C), por tanto el sistema siempre es compatible.*

II. *Para que admita soluciones no nulas hay que hacer que sea indeterminado; ocurrirá cuando R(C) = R(A) < 3 (n.° Inc.), para ello han de ser nulos* TODOS *los determinantes de orden tres.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2m & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 2$$

Ya podemos asegurar que $\forall m \in \mathbf{R} \mid m \neq 2$ es $\Delta_1 \neq 0$, por lo que R(C) = R(A) = 3 = n.° Inc.: Comp. det. [x = y = z = 0]. Sólo nos falta, por tanto, analizar el caso en el que m = 2.

Además: *Para m = 2 es $\vec{v}_1$ combinación lineal de los demás (suprimimos la primera fila), y la primera ecuación combinación lineal de las demás (la eliminamos).*

III. *Para m = 2, suprimida ya la primera fila:*

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -10 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix}}_{A_1}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)}_{C_1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -10 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(C) = R(A) < 3$$

Conclusión: *Para m = 2 es R(C) = R(A) < 3 (n.° Inc.), y el sistema admite soluciones distintas de la trivial (x = y = z = 0).*

SOLUCIÓN: **m = 2**

NOTA: *Al elegir Δ_1 del punto **II** es muy importante no escoger dos líneas que lleven el parámetro m, siempre que sea posible, pues el análisis se duplicaría en dificultad, extensión, etc.*

45. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2m & -3m \\ 4 & 2 & -2 \\ 19 & 2m & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)}_{C}$$

I. *Evidentemente R(A) = R(C), por tanto el sistema siempre es compatible.*

II. *Para que admita soluciones no nulas hay que hacer que sea indeterminado; ocurrirá cuando R(C) = R(A) < 3 (n.° Inc.), para ello han de ser nulos* TODOS *los determinantes de orden tres.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 19 & 2m & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 3$$

Ya podemos asegurar que $\forall m \in \mathbf{R} \mid m \neq 3$ es $\Delta_1 \neq 0$ por lo que R(C) = R(A) = 3 = n.° Inc.: Comp. det. [x = y = z = 0]. Sólo nos falta, por tanto, analizar el caso en el que m = 3

Además: *Para m = 3 es $\vec{v}_3$ combinación lineal de los demás (suprimimos la tercera fila), y la tercera ecuación combinación lineal de las demás (la eliminamos).*

III. *Para m = 3, suprimida ya la tercera fila:*

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 6 & -9 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}}_{C_1}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)}_{A_1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A)$$

[para m = 3 es $R(C) = R(C_1)$ y $R(A) = R(A_1)$]

Conclusión:

$$m \neq 3 \Rightarrow \Delta_1 \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A)$$
$$m = 3 \Rightarrow \Delta_2 \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A)$$

en consecuencia, para todo valor de m es R(C) = 3 = R(A) = = n.° Inc.: Comp. det., y la solución es, obviamente, la trivial:

$$x = y = z = 0$$

SOLUCIÓN: **No hay ningún valor de m para el que el sistema tenga soluciones no nulas**

46. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -n & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ m & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *Evidentemente R(A) = R(C), por tanto el sistema siempre es compatible.*

II. *Para que admita infinitas soluciones hay que hacer que sea indeterminado; ocurrirá cuando R(C) = R(A) <3 (n.º inc.), para ello han de ser nulos* TODOS *los determinantes de orden tres.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -\frac{11}{2}$$

Ya podemos asegurar que $\forall m \in \mathbf{R} \mid m \neq -\frac{11}{2}$ *es* $\Delta_1 \neq 0$, *por lo que R(C) = 3 = R(A) = 3 = n.º Inc.: Sist. comp. det. [x = y = z = 0]. Sólo nos falta, por tanto, analizar el caso en que* $m = -\frac{11}{2}$.

Además: *Para* $m = -\frac{11}{2}$ *es* $\vec{v}_3$ *combinación lineal de los demás (suprimimos la tercera fila), y la tercera ecuación combinación lineal de las demás (la eliminamos).*

III. *Para* $m = -\frac{11}{2}$, *suprimida ya la tercera fila:*

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -n & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{A_1}}_{C_1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{3} \Rightarrow R(C) = R(A) < 3$$

Conclusión: *Para* $m = -\frac{11}{2}$ *y* $n = \frac{1}{3}$ *es R(C) = R(A) < 3 (n.º Inc.): Sist. comp. ind.*

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{m = -\frac{11}{2}\ ;\ n = \frac{1}{3}}}$

47. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & -3 & 4a & 8 \\ 5 & -2 & a & 4a \\ 4 & 5 & -10 & -16 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *Vamos a determinar cuándo es R(C) = 3:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & -3 & 4a \\ 5 & -2 & a \\ 4 & 5 & -10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -10a^2 + 160a - 150 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq 1 \\ a_2 \neq 15 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbf{R} \mid a \neq 1$ *y* $a \neq 15$ *es* $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ *R(C) = 3 = R(A) = n.º Inc.: Sist. comp. det. (no hay determinantes de orden superior a 3 en la matriz A).*

II. *Analizamos el caso a = 1:*

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -10 & -16 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -10 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -10 & -16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(A) < 3$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) < 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < \text{n.º Inc: Comp. ind.}$$

III. *Analizamos el caso a = 15:*

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & 60 & 8 \\ 5 & -2 & 15 & 60 \\ 4 & 5 & -10 & -16 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \begin{vmatrix} 30 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

b)

$$\begin{vmatrix} 30 & -3 & 8 \\ 5 & -2 & 60 \\ 4 & 5 & -16 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A) = 3$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) = 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(A) > R(C)\text{: Sist. inc.}$$

IV. *Resolución del sistema para* $a \neq 1$ *y* $a \neq 15$:

$$x = \frac{80a^2 - 240a + 160}{-10a^2 + 16a - 15}$$

$$y = \frac{-112a^2 - 288a + 400}{-10a^2 + 16a - 15}$$

$$z = \frac{-40a^2 + 16a + 24}{-10a^2 + 16a - 15}$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{a \neq 1} \\ \mathbf{a \neq 15} \end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = \text{n.º Inc.: Comp. det.}} \\ \mathbf{a = 1 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < \text{n.º Inc.: Comp. ind.}} \\ \mathbf{a = 15 \Rightarrow R(A) = 3 > R(C)\text{: Sist. inc.}} \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{a \neq 1} \\ \mathbf{a \neq 15} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x = \dfrac{80a^2 - 240a + 160}{-10a^2 + 160a - 150}} \\ \mathbf{y = \dfrac{-112a^2 - 288a + 400}{-10a^2 + 160a - 150}} \\ \mathbf{z = \dfrac{-40a^2 + 16a + 24}{-10a^2 + 160a - 150}} \end{cases} \end{array}}$$

48. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & -(a-1) & 5 & a-1 \\ 2 & -3 & (a+1) & 5 \\ 8 & -7 & 14 & 3a \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *Vamos a determinar cuando es R(C) = 3:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -(a-1) & 5 \\ 2 & -3 & a+1 \\ 8 & -7 & 14 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -a^2 - 7a + 30 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq 3 \\ a_2 \neq -10 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbf{R} \mid a \neq 3$ *y* $a \neq -10$ *es* $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ *R(C) = 3 = R(A) = = n.º Inc.: Sist. comp. det., (no hay determinantes de orden superior a 3 en la matriz A).*

II. *Analizamos el caso a = 3*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 14 \end{pmatrix}}_{C}\!\!\begin{matrix} | & 2 \\ | & 5 \\ | & 9 \end{matrix}}_{A}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & 14 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 7 & 14 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(A) < 3$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) < 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < \text{n.° Inc: Comp. ind.}$$

III. *Analizamos el caso a = −10:*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} -10 & 11 & 5 \\ 2 & -3 & -9 \\ 8 & -7 & 14 \end{pmatrix}}_{C}\!\!\begin{matrix} | & -11 \\ | & 5 \\ | & -30 \end{matrix}}_{A}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \begin{vmatrix} -10 & 11 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

b)

$$\begin{vmatrix} -10 & 11 & -11 \\ 2 & -3 & 5 \\ 8 & -7 & -30 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A) = 3$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) = 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(A) > R(C)\text{: Sist. inc.}$$

IV. *Resolución del sistema para a = 3:*

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 5z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 5 \\ 8x - 7y + 14z = 9 \end{array}\right\}$$

Del apartado **II** *a) deducimos que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos (la eliminamos), que x e y son incógnitas principales y la z no principal.*

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 - 5z \\ 2x - 3y = 5 - 4z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4 - 7z}{5} \\ y = \dfrac{-11 - 2z}{5} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a \neq 3} \\ \mathbf{a \neq -10} \end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = n.° Inc.: Comp. det.}$$

$$\mathbf{a = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < n.° Inc.: Comp. ind.}$$

$$\mathbf{a = -10 \Rightarrow R(A) = 3 > R(C): Sist. inc.}$$

$$\mathbf{a = 3} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{-4 - 7z}}{\mathbf{5}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{-11 + 2z}}{\mathbf{5}} \end{cases}$$

49. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 8 & -8 & 5 \\ 1 & 5 & -k \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{C}\!\!\begin{matrix} | & -10 \\ | & 12 \\ | & 5 \\ | & 9 \end{matrix}}_{A}$$

I. *Vamos a determinar cuando es R(A) = 4:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 & -10 \\ 8 & -8 & 5 & 12 \\ 1 & 5 & -k & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$$

$\forall k \in \mathbf{R} \mid k \neq 3$ es $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(A) = 4 > R(C)$: Sist. inc.

II. *Análisis del caso k = 3:*

Para $k = 3$ *es* $\Delta = 0 \Rightarrow R(A) < 4$ *y* $\vec{v}_3$ *combinación lineal de los demás (suprimimos la tercera fila).*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 8 & -8 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{C}\!\!\begin{matrix} | & -10 \\ | & 12 \\ | & 9 \end{matrix}}_{A}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 8 & -8 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(C_1) = 3 = R(A_1)$$

Como en este caso, $k = 3$, *es* $R(C) = R(C_1)$ *y* $R(A) = R(A_1)$ *resulta que* $R(C) = 3 = R(A) =$ *n.° Inc.: Comp. det.*

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{k \neq 3 \Rightarrow R(A) = 4 > R(C): Sist. inc.}$$

$$\mathbf{k = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 = n.° Inc.: Comp. det.}$$

50. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 1+t & t \end{pmatrix}}_{C}\!\!\begin{matrix} | & 1 \\ | & 0 \\ | & t+1 \end{matrix}}_{A}$$

I. *Para que tenga solución única ha de ser R(C) = 3 (así sería R(C) = 3 = R(A) = n.°Inc: Comp. det.).*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 1+t & t \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow t^2 - t \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 \neq 0 \\ t_2 \neq 1 \end{cases}$$

$\forall t \in R \mid t \neq 0$ y $t \neq 1$ es $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3$: sol. única.

II. y III. *Las respuestas a estos apartados, si existen, tienen que estar entre los valores t = 0 y t = 1, pues ya vimos que en otro caso tiene solución única.*

a) *Análisis del caso t = 0:*

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C}\!\!\begin{matrix} | & 1 \\ | & 0 \\ | & 1 \end{matrix}}_{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(A) < 3$$

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) < 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < \text{n.° Inc.: Comp. ind.}$$

Por tanto $t = 0$ es la solución del apartado **II.**

b) *Análisis del caso $t = 1$.*

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A) = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) = 3 \end{array}\right| \Rightarrow R(A) > R(C) \text{ Sist. inc.}$$

Por tanto $t = 1$ es la solución del apartado **III.**

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{t \neq 0} \\ \mathbf{t \neq 1} \end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = \textbf{n.° Inc.: Sol. única}}$$
$$\mathbf{t = 0 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < \textbf{n.° Inc.: Inf. sol.}}$$
$$\mathbf{t = 1 \Rightarrow R(A) > R(C)\textbf{: Sist. inc.}}$$

51. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *Vamos a determinar si $R(C) = 3$:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -44 \neq 0$$

$\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) <$ n.° inc.: Comp. ind. (no hay en la matriz A determinantes de orden superior al tres).

Además: *Las incógnitas principales son x, y, u (las que intervienen en Δ_2, menor principal), la z es no principal.*

II. *Resolución del sistema.*

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + u = 9 - z \\ 3x + 2y - 2u = 4 + z \\ 4x - y + u = 9 + 5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z + 2 \\ y = -z + 1 \\ u = 2 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{R(C) = R(A) = 3 < \textbf{n.° Inc.: Comp. ind.}}$$
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = z + 2} \\ \mathbf{y = -z + 1} \\ \mathbf{u = 2} \end{array}\right.$$

52. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *Vamos a determinar cuando es $R(A) = 4$:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 \neq -1 \\ a_2 \neq 2 \end{array}\right.$$

$\forall a \in \mathbf{R} \mid a \neq -1$ y $a \neq 2$ es $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(A) = 4 > R(C)$: Sist. inc.

II. *Análisis del caso $a = -1$:*

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

Suprimimos la tercera columna de ambas matrices, por ser igual a la primera. Resultan las matrices C_1 y A_1, del mismo rango que C y A, respectivamente.

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{array}\right)}_{A_1}}_{C_1}$$

a)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(C) = R(C_1) = 2$$

b)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A) = R(A_1) = 3$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A) > R(C)\text{: Sist. inc.}$$

III. *Análisis del caso $a = 2$:*

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

a)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3$$

b)
$$\Delta = 0 \Rightarrow R(A) < 4$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 3 \\ R(A) < 4 \end{array}\right| \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 = \text{n.° inc.: Comp. det.}$$

IV. *Resolución para $a = 2$:*

Para $a = 2$ es $\Delta_1 \neq 0$, y $\Delta = 0$ por lo que la cuarta ecuación es combinación lineal de las otras tres, la suprimimos.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a \neq -1} \\ \mathbf{a \neq 2} \end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{R(A) = 4 > R(C)\textbf{: Sist. inc.}}$$
$$\mathbf{a = -1 \Rightarrow R(A) = 3 > R(C)\textbf{: Sist. inc.}}$$
$$\mathbf{a = 2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 = \textbf{n.° Inc.: Comp. det.}}$$
$$\mathbf{a = 2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = 1} \end{array}\right.$$

53. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *La matriz ampliada, A, y la de los coeficientes, C, tienen el mismo rango.* (Ver problema 36)

$$R(C) = R(A) \Rightarrow \text{Sist. comp.}$$

II. *Vamos a determinar cuándo el rango de C es 4:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ a & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \neq 11$$

$\forall a \in \mathbf{R} \mid a \neq 11$ *es* $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(C) = 4 = R(A) = n.^{\circ}$ *Inc.: Sist. comp. det. La solución es la trivial:* $x = y = z = t = 0$

III. *Análisis del caso* $a = 11$:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 4 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) < n.^{\circ} \text{Inc.: Comp. ind.}$$

Además: *El* $\vec{v}_4$ *es combinación lineal de los otros tres (suprimimos la cuarta fila), la cuarta ecuación combinación lineal de las otras tres (la eliminamos), x, y, z son las incógnitas principales, t es la incógnita no principal.*

IV. *Resolución para* $a = 11$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -t \\ 11x - 2y + z = -4t \\ 3x - y - z = -4t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a \neq 11 \Rightarrow R(C) = R(A) = 4 = n.^{\circ} Inc.: Comp.\ det.} \\ \mathbf{a = 11 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 < n.^{\circ} Inc.: Comp.\ ind.} \\ \mathbf{a \neq 11 \Rightarrow x = y = z = t = 0} \\ \mathbf{a = 11 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = -2t \\ z = \ \ 3t \end{array}\right.} \end{array}}$$

54. RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & a & b \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

I. *Vamos a determinar cuándo* $R(C) = 3$:

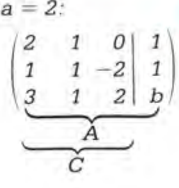
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$$

$\forall a \in \mathbf{R} \mid a \neq 2$ *es* $\Delta \neq 0 \Rightarrow R(C) = 3 = R(A) = n.^{\circ}$ *Inc.: Sist. comp. det. (valga lo que valga b).*

II. *Resolución para* $a \neq 2$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \qquad = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2(1-b)}{a-2} \\ y = \dfrac{a + 4b - 6}{a-2} \\ z = \dfrac{b-1}{a-2} \end{array}\right.$$

III. *Análisis del caso* $a = 2$:



$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & b \end{array}\right)}_{A}}_{C}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow R(C) < 3 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

b)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} \forall b \in \mathbf{R} \mid b \neq 1 \\ a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta_1 \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A) = 3 > R(C)\text{: Sist. inc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} b = 1 \\ a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta_1 = 0 \Rightarrow R(A) < 3$$

$$\left.\begin{array}{l} R(C) = 2 \\ R(A) < 3 \end{array}\right\} \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < n.^{\circ} \text{Inc.: Comp. ind.}$$

Además: El $\vec{v}_3$ es combinación lineal de los otros dos (suprimimos la tercera fila), la tercera ecuación combinación lineal de las otras dos (la eliminamos), x, y son las incógnitas principales, z la incógnita no principal.

IV. *Resolución para* $a = 2$; $b = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ x + 1 = 1 + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y = 1 + 4z \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN:

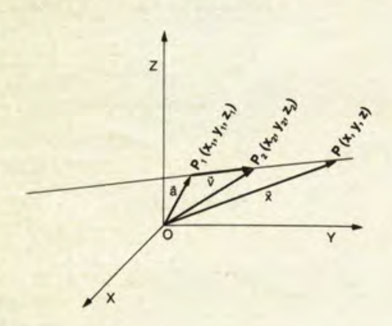
$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{a \neq 2} \\ \mathbf{\forall b \in R} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 3 = n.^{\circ} Inc.: Comp.\ det.} \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{a \neq 2} \\ \mathbf{\forall b \in R} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = \dfrac{2(1-b)}{a-2}} \\ \mathbf{y = \dfrac{a+4b-6}{a-2}} \\ \mathbf{z = \dfrac{b-1}{a-2}} \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b \neq 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(A) = 3 > R(C): Sist.\ inc.} \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R(C) = R(A) = 2 < n.^{\circ} Inc.: Comp.\ ind.} \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \mathbf{x = -2z} \\ \mathbf{y = 1 + 4z} \end{array}\right. \end{array}}$$

Bloque 14

✔ Espacios afín y euclídeo.
✔ Productos escalar, vectorial y mixto

ESPACIOS AFÍN Y EUCLIDEO
PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO

Ecuación de la recta determinada por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$



I. *En forma vectorial:*

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$$

II. *En forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\lambda \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\lambda \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\lambda \end{cases}$$

III. *En forma continua:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

IV. *En función de sus cosenos directores:*

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

siendo α, β, γ *los ángulos que la recta forma con* OX, OY *y* OZ, *respectivamente.*

V. *En forma general:*

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

Producto escalar de dos vectores

Se llama producto escalar de dos vectores libres $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$, *y se indica con la notación* $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, *al número real obtenido del siguiente modo:*

I. *Si* $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ *y* $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ resulta:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos(\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2})$$

II. *Si* $\vec{v}_1 = \vec{0}$ *ó* $\vec{v}_2 = \vec{0}$ *resulta:*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

El producto escalar de dichos vectores en función de sus componentes es:

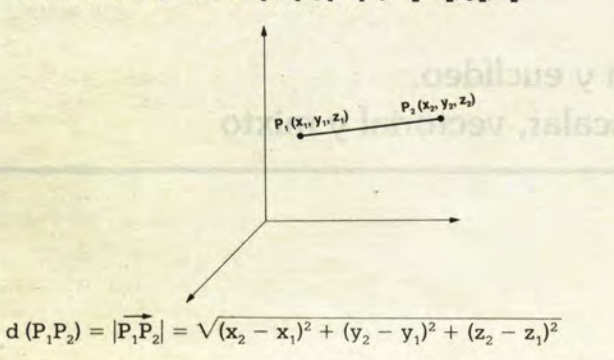
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Módulo de un vector

El módulo del vector $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ *es:*

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$



$$d(P_1P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Relación entre los cosenos directores de un vector

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

siendo α, β, γ *los ángulos que forma el vector con los ejes* OX, OY, OZ, *respectivamente.*

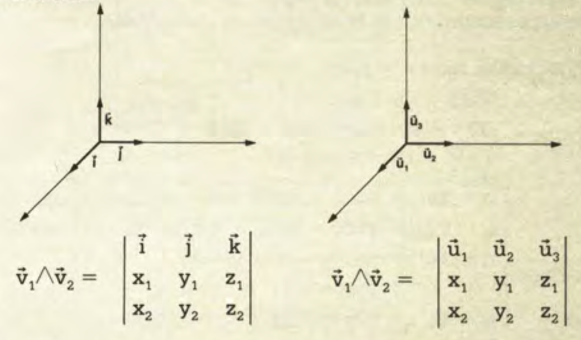
Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$, *que se indica con la notación* $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, *es otro vector* $\vec{v}$, *cuyo módulo es igual al producto de los módulos por el seno del ángulo que forman:*

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \operatorname{sen}(\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}) \; ; \; 0 \leq \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2} \leq \pi$$

cuya dirección es perpendicular al plano determinado por ambos vectores, y cuyo sentido es el del avance del sacacorchos que gira del primero al segundo factor por un ángulo menor de 180°.

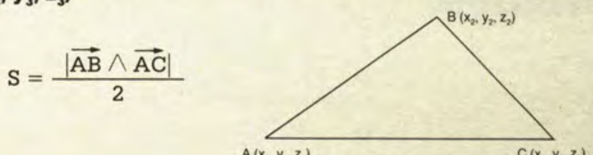
El producto vectorial de dichos vectores en función de sus componentes es:



$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Área del triángulo de vértices en $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$; $C(x_3, y_3, z_3)$

$$S = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|}{2}$$



Producto mixto de tres vectores

El producto mixto de tres vectores $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ *y* $\vec{v}_3(x_3, y_3, z_3)$, *dados en este orden, que se indica con la notación* $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ *es:*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$$

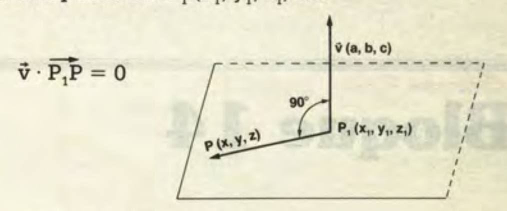
El producto mixto de los $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *y* $\vec{v}_3$, *dados en este orden, en función de sus componentes es:*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ecuación vectorial del plano

La ecuación vectorial del plano perpendicular al $\vec{v}(a, b, c)$ *por su punto de aplicación* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *es:*

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$$



Ecuación cartesiana del plano

La ecuación cartesiana del plano es:

$$ax + by + cz + d = 0$$

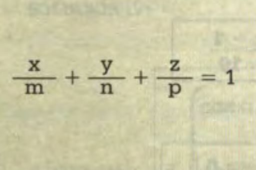
Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados

La ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *y* $P_3(x_3, y_3, z_3)$, *no alineados, es:*

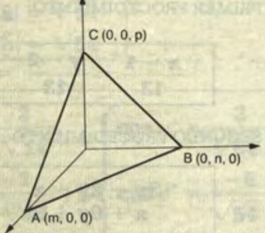
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación segmentaria del plano

La ecuación del plano que corta a los ejes en los puntos A (m, 0, 0), B (0, n, 0) *y* C (0, 0, p), *en función de los segmentos que determina sobre los ejes, es:*



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$



Intersección de dos planos

La intersección de dos planos es una recta.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Haz de planos

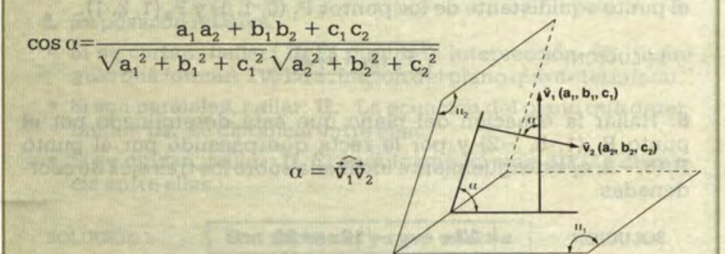
$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 + \lambda a_2)\, x + (b_1 + \lambda b_2)\, y + (c_1 + \lambda c_2)\, z = (d_1 + \lambda d_2) = 0$$

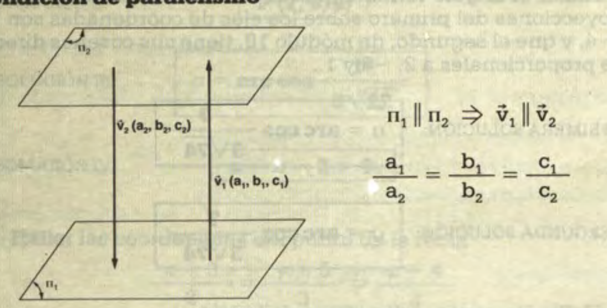
Ángulo de dos planos $\pi_1 \equiv \mathbf{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0}$
$\pi_2 \equiv \mathbf{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0}$

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\alpha = \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$$



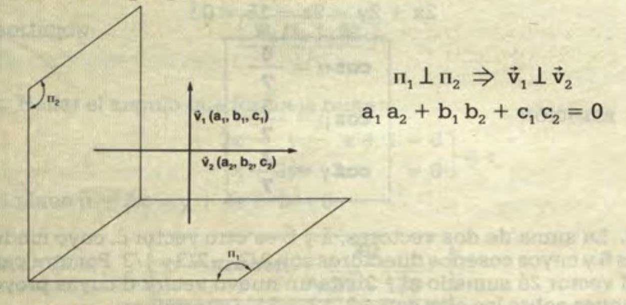
Condición de paralelismo



$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Condición de perpendicularidad



$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Ángulo de dos rectas

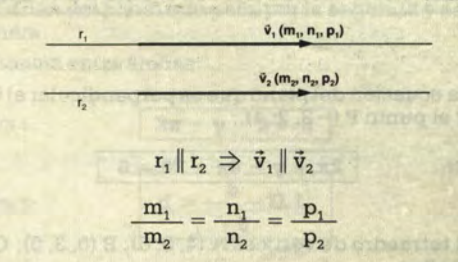
$$\mathbf{r_1 \equiv \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}}$$

$$\mathbf{r_2 \equiv \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}}$$

$$\alpha = \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$$

$$\cos\alpha = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

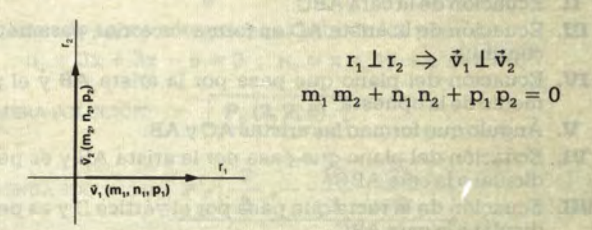
Condición de paralelismo



$$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

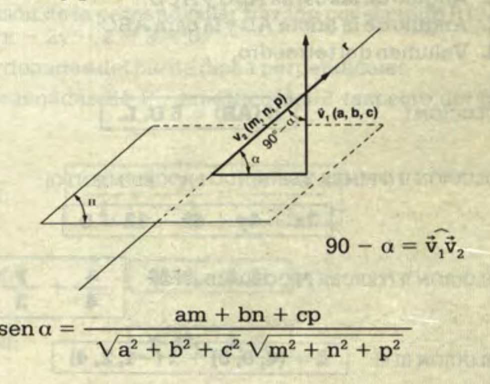
Condición de perpendicularidad



$$r_1 \perp r_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

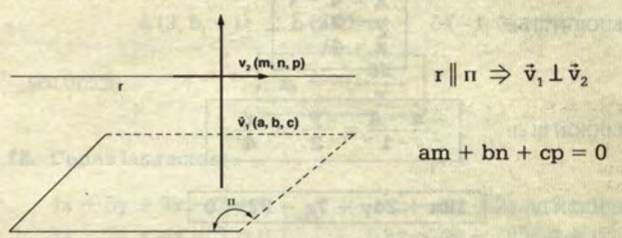
Ángulo de recta y plano



$$90 - \alpha = \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{am + bn + cp}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

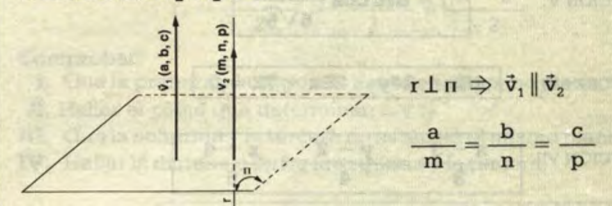
Condición de paralelismo



$$r \parallel \pi \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

$$am + bn + cp = 0$$

Condición de perpendicularidad



$$r \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$$

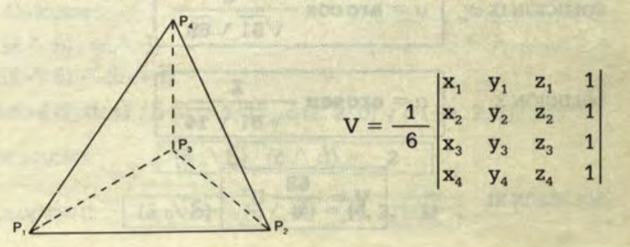
$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

Distancia de un punto a un plano

La distancia del punto P (x_1, y_1, z_1) *al plano:*
$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ *es:*

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

Volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos:
$\mathbf{P_1\,(x_1, y_1, z_1), P_2\,(x_2, y_2, z_2), P_3\,(x_3, y_3, z_3), P_4\,(x_4, y_4, z_4)}$



$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al $\vec{v}$ (2, 1, −4) y pasa por el punto P (−3, 2, 4).

SOLUCIÓN: $\mathbf{2x + y - 4z + 20 = 0}$

2. Dado el tetraedro de vértices A (4, 0, 0); B (0, 3, 0); C (0, 0, 2) y D (3, 2, 4) hallar:

I. La longitud de la arista AB.
II. Ecuación de la cara ABC.
III. Ecuación de la arista AD en forma vectorial, paramétrica y continua.
IV. Ecuación del plano que pasa por la arista AB y el punto medio de la opuesta.
V. Ángulo que forman las aristas AC y AB.
VI. Ecuación del plano que pasa por la arista AB y es perpendicular a la cara ABC.
VII. Ecuación de la recta que pasa por el vértice D y es perpendicular a la cara ABC.
VIII. Longitud de la altura relativa al vértice D.
IX. Ángulo de las caras ABC y ACD.
X. Ángulo de la arista AD y la cara ABC.
XI. Volumen del tetraedro.

SOLUCIÓN I: **d (AB) = 5 U. L.**

SOLUCIÓN II (PRIMER Y SEGUNDO PROCEDIMIENTO): $\mathbf{3x + 4y + 6z - 12 = 0}$

SOLUCIÓN II (TERCER PROCEDIMIENTO): $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$

SOLUCIÓN III a): $\vec{x} = (4, 0, 0) + \lambda(-1, 2, 4)$

SOLUCIÓN III b): $\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$

SOLUCIÓN III c): $\frac{x-4}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{18x + 24y + 7z - 72 = 0}$

SOLUCIÓN V: $\alpha = \text{arc cos } \frac{8}{5\sqrt{5}}$

SOLUCIÓN VI: $\mathbf{18x + 24y - 25z - 72 = 0}$

SOLUCIÓN VII: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{6}$

SOLUCIÓN VIII: $d(\pi D) = \frac{29}{\sqrt{61}}$ U. L.

SOLUCIÓN IX a): $\mathbf{3x + 4y + 6z - 12 = 0}$

SOLUCIÓN IX b): $\mathbf{2x - 7y + 4z - 8 = 0}$

SOLUCIÓN IX c): $\alpha = \text{arc cos } \frac{2}{\sqrt{61}\,\sqrt{69}}$

SOLUCIÓN X: $\alpha = \text{arc sen } \frac{2}{\sqrt{61}\,\sqrt{14}}$

SOLUCIÓN XI: $V = \frac{58}{6}\,U^3$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P_1 (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\frac{x-1}{12} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-1}{-10}$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\begin{rcases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 6y + 9z - 22 = 0 \end{rcases}$

4. Dados dos vectores, uno $\vec{v}_1$ (1, 1, 0), el otro $\vec{v}_2$ de módulo 9, cuyos cosenos directores son proporcionales a 1, 2 y −2, hallar:

I. Su producto escalar.
II. Ángulo que forman.

SOLUCIÓN I: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 9$

SOLUCIÓN II: $\alpha = 45°$

5. Hallar sobre la recta

$$\begin{rcases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{rcases}$$

el punto equidistante de los puntos P_1 (0, 1, 1) y P_2 (1, 2, 1).

SOLUCIÓN: P_0 (3, −1, 2)

6. Hallar la ecuación del plano que está determinado por el punto P_1 (1, 5, −2) y por la recta que pasando por el punto P_2 (6, −2, 4) está igualmente inclinada sobre los tres ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{13x - y - 12z - 32 = 0}$

7. Hallar el ángulo formado por dos vectores, sabiendo que las proyecciones del primero sobre los ejes de coordenadas son 7, 3 y −4, y que el segundo, de módulo 18, tiene sus cosenos directores proporcionales a 2, −2 y 1.

PRIMERA SOLUCIÓN: $\alpha = \text{arc cos } \frac{-7}{3\sqrt{74}}$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $\alpha = \text{arc cos } \frac{7}{3\sqrt{74}}$

8. Hallar los cosenos directores de la recta:

$$\begin{rcases} x - 4y + 3z + 10 = 0 \\ 2x + 2y - 9z - 15 = 0 \end{rcases}$$

SOLUCIÓN: $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$

9. La suma de dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{c}$, cuyo módulo es 6 y cuyos cosenos directores son 2/3, −2/3 y 1/3. Por otra parte el vector $2\vec{a}$ sumado al $-3\vec{b}$ da un nuevo vector $\vec{d}$ cuyas proyecciones sobre los ejes son −2, 17, −21. Determinar:

I. Componentes del vector $\vec{c}$.
II. Componentes del vector $\vec{d}$.
III. Componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
IV. Módulos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
V. Cosenos directores de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
VI. Producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
VII. Producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

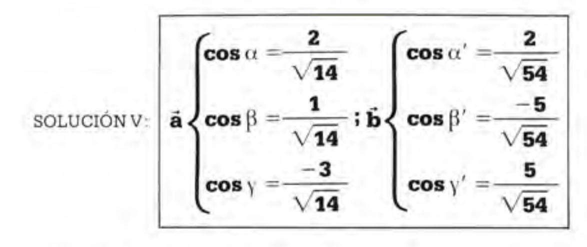
SOLUCIÓN I: $\vec{c}$ (4, −4, 2)

SOLUCIÓN II: $\vec{d}$ (−2, 17, −21)

SOLUCIÓN III: $\vec{a}\,(2, 1, -3)$; $\vec{b}\,(2, -5, 5)$

SOLUCIÓN IV: $|\vec{a}| = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{54}$

SOLUCIÓN V:



$$\vec{a}\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{14}}\\ \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\\ \cos\gamma = \dfrac{-3}{\sqrt{14}}\end{cases} ; \quad \vec{b}\begin{cases}\cos\alpha' = \dfrac{2}{\sqrt{54}}\\ \cos\beta' = \dfrac{-5}{\sqrt{54}}\\ \cos\gamma' = \dfrac{5}{\sqrt{54}}\end{cases}$$

SOLUCIÓN VI: $\vec{a}\cdot\vec{b} = -16$

SOLUCIÓN VII: $\vec{v}\,(-10, -16, -12)$

10. Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3} \quad ; \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$$

Hallar:

I. Su posición relativa.

- Si se cortan, hallar: **II.** El punto de intersección. **III.** El ángulo que forman. **IV.** La ecuación del plano que determinan.
- Si son paralelas, hallar: **II.** La ecuación del plano que determinan. **III.** La distancia entre ellas.
- Si se cruzan, hallar: **II.** El ángulo que forman. **III.** La distancia entre ellas.

SOLUCIÓN I: **Las rectas r_1 y r_2 se cortan**

SOLUCIÓN II: $P\,(7, 6, 5)$

SOLUCIÓN III: $\alpha = \text{arc cos}\,\dfrac{14}{3\sqrt{22}}$

SOLUCIÓN IV: $x - z - 2 = 0$

11. Hallar las coordenadas del punto de la recta

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$$

que equidista del P (3, 2, 1) y del origen de coordenadas.

SOLUCIÓN: $P_0\,(1, 1, 2)$

12. Hallar el ángulo que forma la recta:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y - z + 1 &= 0\\ x + 2y - 3z &= 0\end{aligned}\right\} \equiv r$$

y el plano $\pi \equiv 2x - y + 4z - 2 = 0$.

SOLUCIÓN: $\alpha = \text{arc sen}\,\dfrac{30}{\sqrt{21}\,\sqrt{138}}$

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1\,(2, 1, -3)$ y $P_2\,(4, 2, 1)$ y es perpendicular al plano de ecuación:

$$2x - y - z + 3 = 0$$

SOLUCIÓN: $3x + 10y - 4z - 28 = 0$

14. Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4} \quad ; \quad r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$$

Hallar:

I. La ecuación del plano que pasa por la segunda y es paralelo a la primera.

II. La distancia entre ambas.

SOLUCIÓN I: $2x - y - z = 0$

SOLUCIÓN II: $d = \dfrac{6}{\sqrt{6}}$ **U. L.**

15. Dada la recta $x = \dfrac{y+6}{4} = z - 3$, hallar las coordenadas del punto situado sobre ella que equidista de los planos:

$$\pi_1 \equiv 3x + 3z - 5 = 0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv x + 4y + z + 1 = 0$$

PRIMERA SOLUCIÓN: $P_0\,(2, 2, 5)$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $P'_0\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{10}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$

16. Hallar:

I. La ecuación de la perpendicular trazada por el punto P (0, 0, 3) al plano $x - 2y - z - 3 = 0$.

II. Las coordenadas del pie de dicha perpendicular.

III. Las coordenadas de P', simétrico del P respecto del plano dado.

SOLUCIÓN I: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$

SOLUCIÓN II: $M\,(1, -2, 2)$

SOLUCIÓN III: $P'\,(2, -4, 1)$

17. El producto mixto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ es 48. Calcular z_2, siendo:

$$\vec{a}\,(3, 5, -1) \; ; \; \vec{b}\,(2, 0, z_2) \; ; \; \vec{c}\,(-1, 3, 1)$$

SOLUCIÓN: $z_2 = -\dfrac{32}{7}$

18. Dadas las rectas:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 5y + 7z - 7 &= 0\\ 3x + 2y + 4z - 3 &= 0\end{aligned}\right\} \equiv r_1 \qquad \left.\begin{aligned} x - 3y - 2z + 3 &= 0\\ 3x - 4y - z + 4 &= 0\end{aligned}\right\} \equiv r_2$$

$$r_3 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$$

Comprobar:

I. Que la primera y la segunda están en el mismo plano.

II. Hallar el plano que determinan r_1 y r_2.

III. Que la segunda y la tercera no están en el mismo plano.

IV. Hallar la distancia entre la segunda y la tercera.

SOLUCIÓN I: **Las rectas r_1 y r_2 están en el mismo plano**

SOLUCIÓN II: $2x - y + z + 1 = 0$

SOLUCIÓN III: **Las rectas r_2 y r_3 se cruzan**

SOLUCIÓN IV: $d = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ **U. L.**

19. Calcular:

I. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})$

II. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})$

Siendo $\vec{a}\,(2, 0, 1)$; $\vec{b}\,(2, -1, 1)$; $\vec{c}\,(2, 2, 0)$ y $\vec{d}\,(-1, 2, 1)$

SOLUCIÓN I: $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = -2$

SOLUCIÓN II: $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (4, 2, -2)$

20. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el P (0, 1, −1) y es paralela a los planos $x + 2y - z - 2 = 0$; $2x + y + 2z - 1 = 0$.

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x}{5} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{-3}}$

21. Hallar el área del triángulo de vértices A (1, 1, 1); B (0, 3, 5); C (4, 0, 2).

SOLUCIÓN: $\boxed{S = \frac{\sqrt{230}}{2}\ U^2}$

22. Dadas las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 5 = 0 \\ 3x - 2z - 3 = 0 \end{array}\right\} \equiv r_1 \ ;$$

$$r_2 \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$$

Hallar su posición relativa. Si se cortan, hallar el punto de intersección, el ángulo que forman y la ecuación del plano que determinan. Si son paralelas, hallar la ecuación del plano que determinan y la distancia entre ellas. Si se cruzan, hallar el ángulo que forman y la distancia entre ellas.

SOLUCIÓN I: **Las rectas son paralelas**

SOLUCIÓN II: $\boxed{4x + y - 3z - 2 = 0}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{d = \sqrt{\frac{117}{7}}\ U.\ L.}$

23. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

y es paralelo a la recta:

$$r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{4x - 6y + 5z + 13 = 0}$

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (1, 1, 2) y es perpendicular al plano que pasa por dicho punto y contiene a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-2}{2}}$

25. Hallar la ecuación de los planos que son paralelos al de ecuación $3x + 2y - 5z - 4 = 0$ y distan de él $4\sqrt{38}$ unidades.

SOLUCIÓN:
$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 3x + 2y - 5z + 138 = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x + 2y - 5z - 146 = 0 \end{array}}$$

26. Dados los vectores $\vec{v}_1$ (2, −3, 4) y $\vec{v}_2$ (4, 6, −8) hallar:

I. Su producto escalar.

II. El ángulo que forman.

SOLUCIÓN I: $\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -42}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2} = \arccos \frac{-42}{\sqrt{29}\,\sqrt{116}}}$

27. Dados los vectores $\vec{a}$ (4, 1, −2) ; $\vec{b}$ (2, 0, −1) y $\vec{c}$ (2, 1, 3), hallar los siguientes productos mixtos:

I. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$

II. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

III. $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}]$

SOLUCIÓN I: $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = 0}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -8}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}] = 0}$

28. Hallar el volumen del paralepípedo que tiene tres aristas concurrentes formadas por los vectores $\vec{a}$ (1, 3, −2) , $\vec{b}$ (2, 1, 2) y $\vec{c}$ (−3, 1, 0).

SOLUCIÓN: $\boxed{V = 30\ U^3}$

29. Determinar:

I. La ecuación del plano que corta a los tres ejes de coordenadas en puntos situados a distancia «a» del origen.

II. La ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 (0, 0, a) y $P_2\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$

III. Si la recta hallada está contenida en el plano.

SOLUCIÓN I: $\boxed{x + y + z - a = 0}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{-2}}$

SOLUCIÓN III: **La recta está contenida en el plano**

30. Dada la recta

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{array}\right\} \equiv r$$

y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = n$, determinar m y n de modo que:

I. La recta r y el plano π sean secantes.

II. La recta r y el plano π sean paralelos.

III. La recta r esté contenida en el plano π.

SOLUCIÓN I: $\boxed{m \neq -\frac{23}{7}}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{m = -\frac{23}{7}}$

SOLUCIÓN III: $\boxed{m = -\frac{23}{7}\ ,\ n = \frac{9}{7}}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

Todo plano perpendicular al $\vec{v}$ (2, 1, −4) será de la forma:

$$2x + y - 4z + d = 0$$

Esta ecuación representa los infinitos planos perpendiculares al $\vec{v}$ (2, 1, −4). Sólo nos falta seleccionar el único que además pasa por P (−3, 2, 4), es decir, determinar d para que pase por este punto.

$$2 \cdot (-3) + (1 \cdot 2) - (4 \cdot 4) + d = 0$$
$$d = 20$$

El plano buscado es, por tanto, el de ecuación:

$$2x + y - 4z + 20 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{2x + y - 4z + 20 = 0}}$

NOTA: Este problema es fundamental, ya que nos lo encontraremos con muchísima frecuencia, por lo que es preciso dominar su resolución.

2. RESOLUCIÓN

I.

$$d(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{d\,(AB) = 5\ U.\ L.}}$

II. *Ecuación de la cara ABC:*

PRIMER PROCEDIMIENTO:

a) *Ecuación de la recta AB:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

b) *Haz de planos por AB:*

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y - 12 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$3x + 4y - 12 + \lambda z = 0 \qquad (1)$$

c) *Determinación de λ para que el plano* (1) *pase por el punto C (0, 0, 2):*

$$-12 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6$$

d) *Sustitución del valor hallado de λ en la ecuación* (1). *Resulta:*

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0$$

SOLUCIÓN II (PRIMER PROCEDIMIENTO):

$$\boxed{\mathbf{3x + 4y + 6z - 12 = 0}}$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

A (4, 0, 0) B (0, 3, 0) C (0, 0, 2)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se llega a:

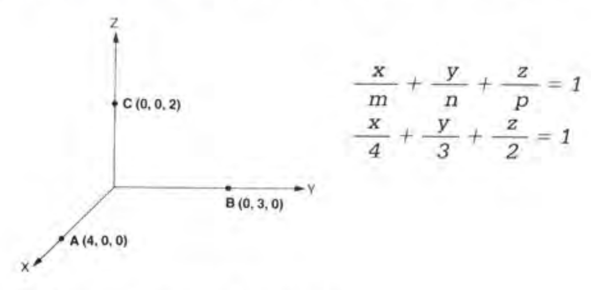
$$3x + 4y + 6z - 12 = 0$$

SOLUCIÓN II (SEGUNDO PROCEDIMIENTO):

$$\boxed{\mathbf{3x + 4y + 6z - 12 = 0}}$$

TERCER PROCEDIMIENTO:

Puesto que A (4, 0, 0), B (0, 3, 0) y C (0, 0, 2) son los puntos en que el plano corta a los ejes, podemos aplicar la ecuación segmentaria.



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

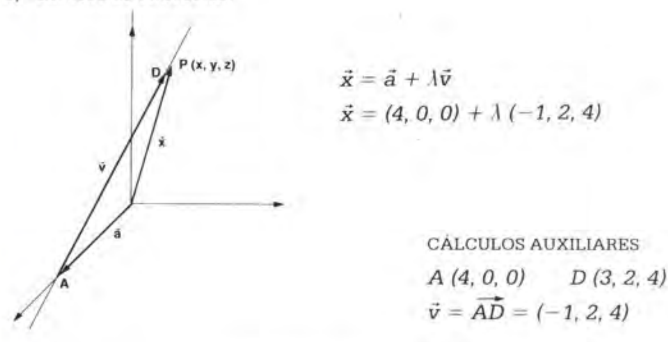
SOLUCIÓN II (TERCER PROCEDIMIENTO):

$$\boxed{\mathbf{\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1}}$$

NOTA: Aconsejamos al alumno que se habitúe a seguir el primer procedimiento, para hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados, ya que el tercero sólo es aplicable en un caso muy particular, como es éste, y por el segundo es fácil equivocarse.

III.

a) *En forma vectorial:*



$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$$
$$\vec{x} = (4, 0, 0) + \lambda\,(-1, 2, 4)$$

CÁLCULOS AUXILIARES

A (4, 0, 0) D (3, 2, 4)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (-1, 2, 4)$$

SOLUCIÓN III a): $\boxed{\mathbf{\vec{x} = (4, 0, 0) + \lambda\,(-1, 2, 4)}}$

b) *En forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda\,(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda\,(z_2 - z_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

SOLUCIÓN III b): $\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{4 - \lambda} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2\lambda} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{4\lambda} \end{aligned}}$

c) *En forma continua:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

SOLUCIÓN III c): $\boxed{\mathbf{\frac{x-4}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}}}$

IV. *La arista opuesta a la AB es la CD, y su punto medio $M\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$. Tenemos que hallar, pues, la ecuación del plano determinado por los puntos:*

$$A\,(4, 0, 0),\ B\,(0, 3, 0)\ \text{y}\ M\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$$

a) *Ecuación de la recta AB (ver* **II** a):

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

b) *Haz de planos por AB (ver* **II** b):

$$3x + 4y + \lambda z - 12 = 0 \qquad (1)$$

c) *Determinación de λ para que el plano (1) pase por el punto* $M\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$:

$$\frac{9}{2} + 4 + 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{6}$$

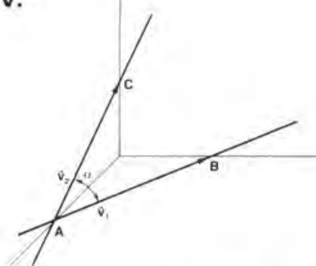
d) *Sustitución del valor de $\lambda = \frac{7}{6}$, hallado, en la ecuación* (1).

Resulta:

$$18x + 24y + 7z - 72 = 0$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{18x + 24y + 7z - 72 = 0}}$

V.



$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (-4, 3, 0)$$
$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (-4, 0, 2)$$

$$\cos\alpha = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{16 + 0 + 0}{\sqrt{16 + 9 + 0}\sqrt{16 + 0 + 4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{16}{5 \cdot 2\sqrt{5}}$$

SOLUCIÓN V: $\boxed{\alpha = \mathbf{arc\,cos}\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5\sqrt{5}}}}$

VI.

a) *Ecuación de la recta AB (ver* **II** a):

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

b) *Haz de planos por AB (ver* **II** b):

$$3x + 4y + \lambda z - 12 = 0 \qquad (1)$$

c) *Ecuación del plano determinado por los puntos A, B, C, (ver* **II**):

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0 \qquad (2)$$

d) *Determinación de λ para que los planos* (1) *y* (2) *sean perpendiculares:*

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

$$9 + 16 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{25}{6}$$

e) *Sustitución del valor de $\lambda = -\frac{25}{6}$, hallado, en la ecuación* (1)

Resulta:

$$18x + 24y - 25z - 72 = 0$$

SOLUCIÓN VI: $\boxed{\mathbf{18x + 24y - 25z - 72 = 0}}$

VII.

a) *Ecuación general de la recta que pasa por D (3, 2, 4).*

Toda recta que pasa por el D (3, 2, 4) es de la forma:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z-4}{p} \qquad (1)$$

b) *Ecuación del plano determinado por los puntos A, B, C (ver* **II**).

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0 \qquad (2)$$

c) *Determinación de m, n, p, para que la recta* (1) *y el plano* (2) *sean perpendiculares:*

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

$$\frac{3}{m} = \frac{4}{n} = \frac{6}{p}$$

d) *Sustitución en la* (1) *de los valores de m, n, p hallados.*

Resulta:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{6}$$

SOLUCIÓN VII: $\boxed{\frac{\mathbf{x-3}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{y-2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{z-4}}{\mathbf{6}}}$

VIII. *Es la distancia del vértice D al plano ABC.*

a) *Ecuación del plano determinado por los puntos A, B, C (ver* **II**).

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0$$

b) *Distancia del punto D (3, 2, 4) al plano:*

$$\pi \equiv 3x + 4y + 6z - 12 = 0$$

$$d(\pi D) = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

$$d(\pi D) = \left|\frac{9 + 8 + 24 - 12}{\sqrt{9 + 16 + 36}}\right|$$

SOLUCIÓN VIII: $\boxed{\mathbf{d(\pi D)} = \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{\sqrt{61}}}\ \mathbf{U.L.}}$

IX.

a) *Ecuación de la cara ABC (ver* **II**):

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0$$

SOLUCIÓN IX a): $\boxed{\mathbf{3x + 4y + 6z - 12 = 0}}$

b) *Ecuación de la cara ACD:*

- *Ecuación de la recta AC:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}$$

- *Haz de planos por AC:*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z - 4 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

$$x + \lambda y + 2z - 4 = 0 \qquad (1)$$

- *Determinación de λ para que el plano* (1) *pase por el D (3, 2, 4):*

$$3 + 2\lambda + 8 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{2}$$

- *Sustitución del valor de $\lambda = -\frac{7}{2}$ hallado, en la ecuación* (1)

Resulta:

$$2x - 7y + 4z - 8 = 0$$

SOLUCIÓN IX b): $\boxed{\mathbf{2x - 7y + 4z - 8 = 0}}$

c) *Ángulos de los planos:*

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y + 6z - 12 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 2x - 7y + 4z - 8 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{6 - 28 + 24}{\sqrt{9 + 16 + 36}\sqrt{4 + 49 + 16}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{61}\sqrt{69}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{61}\sqrt{69}}$$

SOLUCIÓN IX c): $\boxed{\alpha = \mathbf{arc\,cos}\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\sqrt{61}\sqrt{69}}}}$

X.

a) *Ecuación de la arista AD (ver* **III** c):

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

b) *Ecuación de la cara ABC (ver* **II**):

$$3x+4y+6z-12=0$$

c) *Ángulo de la recta* $r\equiv\frac{x-4}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ *y el plano:*

$$\pi\equiv 3x+4y+6z-12=0$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{am+bn+cp}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-3+8+18}{\sqrt{9+16+36}\sqrt{1+4+9}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{23}{\sqrt{61}\sqrt{14}}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arc\,sen}\frac{23}{\sqrt{61}\sqrt{14}}$$

SOLUCIÓN X: $\boxed{\alpha=\textbf{arc sen}\,\frac{\mathbf{23}}{\sqrt{\mathbf{61}}\sqrt{\mathbf{14}}}}$

XI.

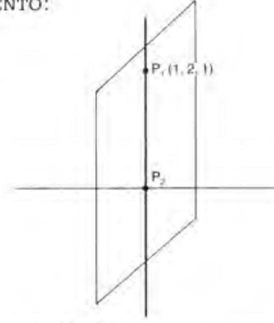
$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_4&y_4&z_4&1\end{vmatrix}$$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}4&0&0&1\\0&3&0&1\\0&0&2&1\\3&2&4&1\end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN XI: $\boxed{\mathbf{V}=\frac{\mathbf{58}}{\mathbf{6}}\,\mathbf{U^3}}$

3. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO:



a) *Plano que pasa por P_1 y es perpendicular a la recta dada, es decir, plano que pasa por P_1 y es perpendicular al $\vec{v}\,(3,-2,1)$ [ver* **1**]:

- $3x-2y+z+d=0$
- $3-4+1+d=0\Rightarrow d=0$
- $3x-2y+z=0$

b) *Intersección del plano hallado con la recta dada.*

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}\\ 3x-2y+z=0\end{array}\right\}$$

$$P_2\left(-\frac{5}{7},\frac{1}{7},\frac{17}{7}\right)$$

c) *Ecuación de la recta que pasa por los puntos:*

$$P_1\,(1,2,1)\ \text{y}\ P_2\left(-\frac{5}{7},\frac{1}{7},\frac{17}{7}\right)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{-\frac{12}{7}}=\frac{y-2}{-\frac{13}{7}}=\frac{z-1}{\frac{10}{7}}$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO:

$$\boxed{\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{12}}=\frac{\mathbf{y-2}}{\mathbf{13}}=\frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{-10}}}$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

a) *Ecuación del plano que pasa por P_1 y es perpendicular a la recta dada:*

$$\pi_1\equiv 3x-2y+z=0$$

b) *Ecuación del plano que contiene a la recta y al punto dados.*

- *Haz de planos por la recta dada:*

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+3y+1=0\\x-3z+8=0\end{array}\right\}$$

$$(2+\lambda)\,x+3y-3\lambda z+(1+8\lambda)=0\qquad(1)$$

- *Determinación de λ para que el plano* (1) *pase por el $P_1\,(1,2,1)$.*

$$(2+\lambda)+6-3\lambda+(1+8\lambda)=0\Rightarrow\lambda=-\frac{3}{2}$$

- *Sustitución del valor de $\lambda=-\frac{3}{2}$ hallado, en la ecuación* (1).

Resulta:

$$\pi_2\equiv x+6y+9z-22=0$$

c) *La recta buscada es la intersección de los planos π_1 y π_2, por tanto:*

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=0\\x+6y+9z-22=0\end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x-2y+z=0}\\\mathbf{x+6y+9z-22=0}\end{array}\right\}}$$

4. RESOLUCIÓN

I.

a) *Cálculo de $\vec{v}_2$:*

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos\beta}{2}=\frac{\cos\gamma}{-2}\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3}\ ;\ \cos\beta=\frac{2}{3}\ ;\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}$$

$$\vec{v}_2\,(3,6,-6)$$

b) *Cálculo del producto escalar:*

$\vec{v}_1\,(x_1,y_1,z_1)\ ;\ \vec{v}_2\,(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=1\cdot3+1\cdot6+0\cdot(-6)=9$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\vec{\mathbf{v}}_1\cdot\vec{\mathbf{v}}_2=\mathbf{9}}$

II. *Cálculo del ángulo que forman:*

$\vec{v}_1\,(x_1,y_1,z_1)\ ;\ \vec{v}_2\,(x_2,y_2,z_2)$

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\alpha\ \frac{9}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{9+36+36}}=\frac{9}{\sqrt{2}\cdot9}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45^\circ$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\alpha=\mathbf{45^\circ}}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos\beta}{2}=\frac{\cos\gamma}{-2}=k\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\end{array}\right\}$$

$\cos\alpha = k$; $\cos\beta = 2k$; $\cos\gamma = -2k$

$k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 1$

$$k = \pm\frac{1}{3}$$

PRIMERA SOLUCIÓN:

$$k=\frac{1}{3}\ ;\ \cos\alpha=\frac{1}{3}\ ;\ \cos\beta=\frac{2}{3}\ ;\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}$$

Si $\vec{v}_2\ (x_2, y_2, z_2)$, tendremos:

$x_2 = |\vec{v}_2| \cos\alpha = 3$

$y_2 = |\vec{v}_2| \cos\beta = 6$

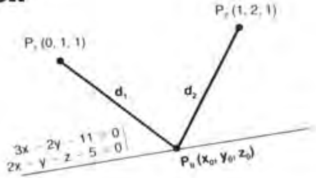
$z_2 = |\vec{v}_2| \cos\gamma = -6$

$\vec{v}_2\ (3, 6, -6)$

SEGUNDA SOLUCIÓN:

Para $k = -1/3$, y procediendo del mismo modo, obtenemos un $\vec{v}_2\ (-3, -6, 6)$ que nos da una segunda solución.

5. RESOLUCIÓN



a) *Sea $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ el punto buscado. Se verificará:*

$$d(P_0P_1) = d(P_0P_2)$$

$$\sqrt{x_0^{\,2} + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2} = \sqrt{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-1)^2}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado y operando obtenemos:

$$x_0 + y_0 - 2 = 0$$

b) *Como $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ tiene que pertenecer a la recta dada, ha de verificar su ecuación, por tanto:*

$$\left.\begin{array}{r}3x_0 - 2y_0 - 11 = 0\\ 2x_0 - y_0 - z_0 - 5 = 0\end{array}\right|$$

c) *El punto buscado será, pues:*

$$\left.\begin{array}{r}x_0 + y_0 - 2 = 0\\ 3x_0 - 2y_0 - 11 = 0\\ 2x_0 - y_0 - z_0 - 5 = 0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x_0 = 3\\ y_0 = -1\\ z_0 = 2\end{array}$$

SOLUCIÓN: **$P_0\ (3, -1, 2)$**

6. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación de la recta que pasa por $P_2\ (6, -2, 4)$ y está igualmente inclinada sobre los ejes.*

- *Toda recta que pase por el $P_2\ (6, -2, 4)$ será de la forma:*

$$\frac{x-6}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-4}{p}$$

- *Al estar igualmente inclinada sobre los ejes, los ángulos α, β, γ que forma con ellos serán iguales, y, por consiguiente, también serán iguales $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, y los parámetros m, n, p. La ecuación de dicha recta será, pues:*

$$r \equiv \frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{1}$$

b) *Haz de planos por r:*

$$\left.\begin{array}{r}x - y - 8 = 0\\ x - z - 2 = 0\end{array}\right|$$

$$(1+\lambda)\,x - y - \lambda z + (-8 - 2\lambda) = 0 \qquad (1)$$

c) *Determinación de λ para que el plano (1) pase por el $P_1\ (1, 5, -2)$:*

$$(1+\lambda) - 5 + 2\lambda + (-8 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 12$$

d) *Sustitución del valor de $\lambda = 12$, hallado, en la ecuación (1). Resulta:*

$$13x - y - 12z - 32 = 0$$

SOLUCIÓN: **$13x - y - 12z - 32 = 0$**

7. RESOLUCIÓN

a) *Cálculo de $\vec{v}_1$:*

Puesto que las componentes de un vector son las proyecciones del vector sobre los ejes será:

$$\vec{v}_1\ (7, 3, -4)$$

b) *Cálculo de $\vec{v}_2$ (ver **4** a):*

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos\beta}{-2}=\frac{\cos\gamma}{2}\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\end{array}\right\}$$

PRIMERA SOLUCIÓN:

$$\cos\alpha=\frac{1}{3}\ ;\ \cos\beta=-\frac{2}{3}\ ;\ \cos\gamma=\frac{2}{3}$$

$$\vec{v}_2\ (6, -12, 12)$$

c) *Cálculo del ángulo que forman*

$\vec{v}_1\ (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v}_2\ (x_2, y_2, z_2)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\ \sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{42 - 36 - 48}{\sqrt{49+9+16}\ \sqrt{36+144+144}} = \frac{-42}{\sqrt{74}\ \sqrt{324}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-42}{18\sqrt{74}} = \frac{-7}{3\sqrt{74}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{-7}{3\sqrt{74}}$$

PRIMERA SOLUCIÓN: **$\alpha = \arccos\dfrac{-7}{3\sqrt{74}}$**

SEGUNDA SOLUCIÓN:

Para:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3}\ ;\ \cos\beta=\frac{2}{3}\ ;\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}$$

obtenemos $\vec{v}_2\ (-6, 12, -12)$ y, haciendo los cálculos, llegamos a:

$$\alpha = \arccos\frac{7}{3\sqrt{74}}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: **$\alpha = \arccos\dfrac{7}{3\sqrt{74}}$**

8. RESOLUCIÓN

a) *Obtención de un vector director de la recta.*

Sabemos que $\vec{v}_1\ (1, -4, 3)$ es perpendicular al plano:

$$\pi_1 \equiv x - 4y + 3z + 10 = 0$$

y que $\vec{v}_2\ (2, 2, -9)$ es perpendicular al:

$$\pi_2 \equiv 2x + 2y - 9z - 15 = 0$$

Todo $\vec{v}$ perpendicular al mismo tiempo a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ será paralelo a la recta, y, por tanto, vector director de la recta.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 3\\ 2 & 2 & -9\end{vmatrix} = 30\vec{i} + 15\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{v}\ (30, 15, 10)$$

b) *Cálculo de los cosenos directores de $\vec{v}$, es decir, de la recta.*

Si $\vec{v}\ (x_1, y_1, z_1)$ y α, β, γ son los ángulos que forma con los ejes:

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = |\vec{v}| \cos\alpha\\ y_1 = |\vec{v}| \cos\beta\\ z_1 = |\vec{v}| \cos\gamma\end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha = \frac{30}{\sqrt{1\,225}} = \frac{30}{35}$$

$$\cos\beta = \frac{15}{\sqrt{1225}} = \frac{15}{35}$$

$$\cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{1225}} = \frac{10}{35}$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{7} \;;\; \cos\beta = \frac{3}{7} \;;\; \cos\gamma = \frac{2}{7}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\cos\alpha = \frac{6}{7},\ \cos\beta = \frac{3}{7},\ \cos\gamma = \frac{2}{7}}$

9. RESOLUCIÓN

Sean $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$; $\vec{c}\,(x_3, y_3, z_3)$ y $\vec{d}\,(x_4, y_4, z_4)$

I. *Cálculo del* $\vec{c}$:

$$x_3 = |\vec{c}|\cos\alpha = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

$$y_3 = |\vec{c}|\cos\beta = 6 \cdot \frac{-2}{3} = -4$$

$$z_3 = |\vec{c}|\cos\gamma = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$\vec{c}\,(4, -4, 2)$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\vec{\mathbf{c}}\,(4, -4, 2)}$

II. *Cálculo del* $\vec{d}$ *(ver* **7** a)

$$\vec{d}\,(-2, 17, -21)$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\vec{\mathbf{d}}\,(-2, 17, -21)}$

III. *Componentes de los* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \\ 2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{d} \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} \vec{a} + \vec{b} = (4, -4, 2) \\ 2\vec{a} - 3\vec{b} = (-2, 17, -21) \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\vec{a}\,(2, 1, -3) \qquad \vec{b}\,(2, -5, 5)$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\vec{\mathbf{a}}\,(2, 1, -3),\ \vec{\mathbf{b}}\,(2, -5, 5)}$

IV. *Módulos de los* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{4 + 25 + 25} = \sqrt{54}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{14} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{54}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{14},\ |\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{54}}$

V. *Cosenos directores de los* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = |\vec{a}|\cos\alpha \\ y_1 = |\vec{a}|\cos\beta \\ z_1 = |\vec{a}|\cos\gamma \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = |\vec{b}|\cos\alpha' \\ y_2 = |\vec{b}|\cos\beta' \\ z_2 = |\vec{b}|\cos\gamma' \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \cos\alpha' = \frac{2}{\sqrt{54}} \\ \cos\beta' = \frac{-5}{\sqrt{54}} \\ \cos\gamma' = \frac{5}{\sqrt{54}} \end{array}$$

SOLUCIÓN V: $\boxed{\vec{\mathbf{a}}\begin{cases} \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{cases} ;\ \vec{\mathbf{b}}\begin{cases} \cos\alpha' = \frac{2}{\sqrt{54}} \\ \cos\beta' = \frac{-5}{\sqrt{54}} \\ \cos\gamma' = \frac{5}{\sqrt{54}} \end{cases}}$

VI. *Producto escalar de los* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4 - 5 - 15$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -16$$

SOLUCIÓN VI: $\boxed{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = -16}$

VII. *Producto vectorial de los* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$:

$$\vec{v} = \vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 16\vec{j} - 12\vec{k}$$

SOLUCIÓN VII: $\boxed{\vec{\mathbf{v}}\,(-10, -16, -12)}$

10. RESOLUCIÓN

I. *Posición relativa:*

a) Vamos a determinar si se cortan. Se cortan si tienen un punto común, si el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas tiene solución única:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3} \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Resuelto el sistema vemos que tiene solución única:

$$x = 7 \;;\; y = 6 \;;\; z = 5$$

SOLUCIÓN I: **Las rectas r_1 y r_2 se cortan**

II. *Punto de intersección (ver* a):

$$P\,(7, 6, 5)$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{P}\,(7, 6, 5)}$

III. *Ángulo que forman:*

- *Hallamos* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$, *vectores directores de* r_1 *y* r_2:

$$\vec{v}_1\,(3, 2, 3) \;;\; \vec{v}_2\,(2, 1, 2)$$

- *Hallamos el ángulo que forman:*

$\vec{v}_1\,(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{v}_2\,(x_2, y_2, z_2)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{6 + 2 + 6}{\sqrt{9 + 4 + 9}\,\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{22}\,\sqrt{9}} = \frac{14}{3\sqrt{22}}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\alpha = \mathbf{arc\,cos}\,\frac{14}{3\sqrt{22}}}$

IV. *Ecuación del plano que determinan:*

- *Haz de planos por* r_1:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{array}\right|$$

$$(1 + 2\lambda)\,x - 3\lambda y - z + (-2 + 4\lambda) = 0 \qquad (1)$$

- *Un punto cualquiera de* r_2, *distinto del de su intersección con* r_1:

$$P\,(-1, 2, -3)$$

- *Determinación de* λ *para que el plano (1) pase por el* $P\,(-1, 2, -3)$:

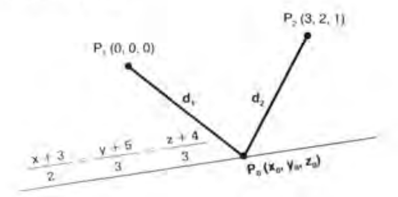
$$(1 + 2\lambda)(-1) - 6\lambda + 3 + (-2 + 4\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

• *Sustitución del valor de* $\lambda = 0$, *hallado, en la ecuación* (1). *Resulta:*

$$x - z - 2 = 0$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{x - z - 2 = 0}}$

11. RESOLUCIÓN



a) *Sea* $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ *el punto buscado.*
Se verificará:

$$d\ (P_0P_1) = d\ (P_0P_2)$$

$$\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2} + z_0^{\,2}} = \sqrt{(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 1)^2}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado y operando obtenemos:

$$3x_0 + 2y_0 + z_0 - 7 = 0$$

b) *Como* $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ *tiene que pertenecer a la recta dada, ha de verificar su ecuación, por tanto:*

$$\frac{x_0 + 3}{2} = \frac{y_0 + 5}{3} = \frac{z_0 + 4}{3}$$

c) *El punto buscado será, pues:*

$$\left.\begin{array}{l} 3x_0 + 2y_0 + z_0 - 7 = 0 \\ \dfrac{x_0 + 3}{2} = \dfrac{y_0 + 5}{3} = \dfrac{z_0 + 4}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P_0\ (1, 1, 2)}}$

12. RESOLUCIÓN

a) *Determinación de un vector director de r (ver* **8** a), $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v}\ (5, 8, 7)$$

b) *Ángulo de la recta r y el plano* π:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{am + bn + cp}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{10 - 8 + 28}{\sqrt{4 + 1 + 16}\ \sqrt{25 + 64 + 49}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{30}{\sqrt{21}\ \sqrt{138}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\alpha = \mathbf{arc\,sen}\ \dfrac{\mathbf{30}}{\sqrt{\mathbf{21}}\ \sqrt{\mathbf{138}}}}$

13. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación de la recta determinada por los puntos* $P_1\ (2, 1, -3)$ *y* $P_2\ (4, 2, 1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$r \equiv \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 3}{4}$$

b) *Haz de planos por r:*

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 2x - z - 7 = 0 \end{array}\right\}$$

$$(1 + 2\lambda)\, x - 2y - \lambda z - 7\lambda = 0 \qquad (1)$$

c) *Determinación de* λ *para que el plano* (1) *sea perpendicular al dado:*

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$(1 + 2\lambda)\, 2 + 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{5}$$

d) *Sustitución del valor de* $\lambda = -\dfrac{4}{5}$, *hallado, en la ecuación* (1). *Resulta:*

$$3x + 10y - 4z - 28 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{3x + 10y - 4z - 28 = 0}}$

14. RESOLUCIÓN

I. *Plano que pasa por* r_2 *y es paralelo a* r_1:

a) *Haz de planos por* r_2:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 3}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

$$(3 + \lambda)\, x - 2y - 2\lambda z + (-5 + 5\lambda) = 0 \qquad (1)$$

b) *Determinación de* λ *para que el plano* (1) *sea paralelo a* r_1:

$$am + bn + cp = 0$$

$$(3 + \lambda)\, 3 - 4 - 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

c) *Sustitución del valor de* $\lambda = 1$, *hallado, en la ecuación* (1). *Resulta:*

$$4x - 2y - 2z = 0$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{2x - y - z = 0}}$

II. *Distancia entre las rectas:*

a) *Plano que pasa por* r_2 *y es paralelo a* r_1 *(ver* **I**):

$$\pi \equiv 2x - y - z = 0$$

b) *Un punto cualquiera, P, de* r_1:

$$P\ (2, -3, 1)$$

c) *Distancia del* $P\ (2, -3, 1)$ *al plano* $\pi \equiv 2x - y - z = 0$:

$$d\ (\pi P) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$d\ (\pi P) = \left| \frac{4 + 3 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1}} \right| = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\ \mathbf{U.L.}}$

15. RESOLUCIÓN

a) *Sea* $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ *el punto buscado. Se verificará:*

$$d(\pi_1, P_0) = d(\pi_2 P_0)$$

$$\left| \frac{3x_0 + 3z_0 - 5}{\sqrt{9 + 9}} \right| = \left| \frac{x_0 + 4y_0 + z_0 + 1}{\sqrt{1 + 16 + 1}} \right|$$

$$\frac{3x_0 + 3z_0 - 5}{\pm\sqrt{18}} = \frac{x_0 + 4y_0 + z_0 + 1}{\sqrt{18}}$$

$$3x_0 + 3z_0 - 5 = \pm\,(x_0 + 4y_0 + z_0 + 1)$$

b) *Como el* $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ *tiene que pertenecer a la recta dada, ha de verificar su ecuación, por tanto:*

$$x_0 = \frac{y_0 + 6}{4} = z_0 - 3$$

c) *El punto buscado será, pues:*

PRIMERA SOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{r} 3x_0 + 3z_0 - 5 = +(x_0 + 4y_0 + z_0 + 1) \\ x_0 = \dfrac{y_0 + 6}{4} = z_0 - 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}2x_0 - 4y_0 + 2z_0 - 6 = 0 \\ x_0 = \dfrac{y_0 + 6}{4} = z_0 - 3\end{array}\right\} \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 5 \end{array}$$

PRIMERA SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P_0\,(2, 2, 5)}}$

SEGUNDA SOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{r}3x_0 + 3z_0 - 5 = -(x_0 + 4y_0 + z_0 + 1) \\ x_0 = \dfrac{y_0 + 6}{4} = z_0 - 3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}4x_0 + 4y_0 + 4z_0 - 4 = 0 \\ x_0 = \dfrac{y_0 + 6}{4} = z_0 - 3\end{array}\right\} \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{2}{3} \\ y_0 = -\dfrac{10}{3} \\ z_0 = \dfrac{11}{3} \end{array}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P'_0\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{10}{3}, \dfrac{11}{3}\right)}}$

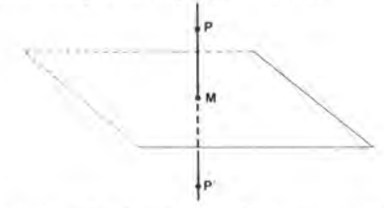
16. RESOLUCIÓN

I. *Recta que pasa por el P (0, 0, 3) y es perpendicular al plano $x - 2y - z - 3 = 0$:*

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z - 3}{-1}}}$

II. *Coordenadas del pie de la perpendicular.*



El pie de la perpendicular, M, es la intersección de la recta hallada con el plano dado.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z - 3}{-1} \\ x - 2y - z - 3 = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{M\,(1, -2, 2)}}$

III. *Coordenadas de P'.*

Si P (x_1, y_1, z_1); M (x_2, y_2, z_2); P' (x_3, y_3, z_3), como M es el punto medio de PP', tendremos:

$$\left.\begin{array}{r}x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \\ y_2 = \dfrac{y_1 + y_3}{2} \\ z_2 = \dfrac{z_1 + z_3}{2}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}1 = \dfrac{0 + x_3}{2} \\ -2 = \dfrac{0 + y_3}{2} \\ 2 = \dfrac{3 + z_3}{2}\end{array}\right\} \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ y_3 = -4 \\ z_3 = 1 \end{array}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{P'\,(2, -4, 1)}}$

17. RESOLUCIÓN

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$48 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & z_2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$48 = -6 - 5z_2 - 9z_2 - 10 \Rightarrow z_2 = -\frac{32}{7}$$

SOLUCION: $\boxed{\mathbf{z_2 = -\dfrac{32}{7}}}$

18. RESOLUCIÓN

I. *Comprobación de que r_1 y r_2 están en el mismo plano.*

Para que estén en el mismo plano han de cortarse o ser paralelas.

- *Empezamos por determinar si se cortan:*

$$\left.\begin{array}{r}4x + 5y + 7z - 7 = 0 \\ 3x + 2y + 4z - 3 = 0 \\ x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - 4y - z + 4 = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}$$

El sistema tiene solución, las rectas, por tanto, se cortan y, por consiguiente están en un mismo plano.

SOLUCIÓN I: **Las rectas r_1 y r_2 están en el mismo plano**

II. *Ecuación del plano determinado por r_1 y r_2.*

- *Haz de planos por r_1:*

$$\left.\begin{array}{r}4x + 5y + 7z - 7 = 0 \\ 3x + 2y + 4z - 3 = 0\end{array}\right\}$$

$$(4 + 3\lambda)\,x + (5 + 2\lambda)\,y + (7 + 4\lambda)\,z + (-7 - 3\lambda) = 0 \qquad (1)$$

- *Un punto cualquiera de r_2, distinto del de su intersección con r_1:* P (0, 1, 0)
- *Determinación de λ para que el plano (1) pase por P (0, 1, 0):*

$$(5 + 2\lambda) + (-7 - 3\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

- *Sustitución del valor de $\lambda = -2$, hallado, en la (1). Resulta:*

$$-2x + y - z - 1 = 0$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{2x - y + z + 1 = 0}}$

III. *Comprobación de que r_2 y r_3 no están en el mismo plano.*

- *Empezamos por determinar si se cortan:*

$$\left.\begin{array}{r}x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - 4y - z + 4 = 0 \\ \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{3} = \dfrac{z - 2}{-2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - 4y - z + 4 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \\ x + z - 3 = 0\end{array}\right\}$$

El sistema no tiene solución, pues resuelto el formado por las tres últimas ecuaciones, se obtiene:

$$x = \frac{15}{2},\ y = \frac{31}{4},\ z = -\frac{9}{2}$$

Solución que no satisface a la primera ecuación:

- *Determinamos si son paralelas r_2 y r_3.*

Calculamos en primer lugar $\vec{v}_2$, un vector director de r_2:

$$\left.\begin{array}{r}x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - 4y - z + 4 = 0\end{array}\right\} \equiv r_2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{v}_2\,(-5, -5, 5)$$

Aplicamos la condición de paralelismo entre rectas:

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{n_2}{n_3} = \frac{p_2}{p_3}$$

$$\frac{-5}{2} \neq \frac{-5}{3} \neq \frac{5}{-2}$$

Como no cumplen la condición de paralelismo, no son paralelas. Puesto que ni se cortan ni son paralelas, las rectas r_2 y r_3 se cruzan.

SOLUCIÓN III: **Las rectas r_2 y r_3 se cruzan**

IV. *Distancia entre las rectas r_2 y r_3.*

a) *Ecuación del plano que pasa por r_2 y es paralelo a r_3.*

- *Haz de planos por r_2:*

$$\left.\begin{array}{r}x - 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - 4y - z + 4 = 0\end{array}\right\}$$

$$(1 + 3\lambda)\,x + (-3 - 4\lambda)\,y + (-2 - \lambda)\,z + (3 + 4\lambda) = 0 \qquad (1)$$

- *Determinación de λ para que el plano (1) sea paralelo a la recta r_3:*

$$am + bn + cp = 0$$

$$(1 + 3\lambda)\,2 + (-3 - 4\lambda)\,3 + (-2 - \lambda)(-2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

- *Sustitución del valor de* $\lambda = -\frac{3}{4}$*, hallado, en la (1). Resulta:*

$$\pi \equiv x + z = 0$$

b) *Un punto cualquiera, P, de* r_3*:*

$$P\,(1, -2, 2)$$

c) *Distancia del punto P (1, −2, 2) al plano* $\pi \equiv x + z = 0$

$$d(\pi P) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$d(\pi P) = \left| \frac{1 + 2}{\sqrt{1 + 1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{d = \frac{3}{\sqrt{2}}}$ **U. L.**

19. RESOLUCIÓN

I.

a) *Cálculo de* $\vec{v}_1 = \vec{a} \wedge \vec{b}$*:*

$$\vec{v}_1 = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

$$\vec{v}_1\,(1, 0, -2)$$

b) *Cálculo de* $\vec{v}_2 = \vec{c} \wedge \vec{d}$*:*

$$\vec{v}_2 = \vec{a} \wedge \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{v}_2\,(2, -2, 2)$$

c) *Cálculo de* $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})$*:*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = +2 + 0 - 4 = -2$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = -2}$

II. *Cálculo de* $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})$*:*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (4, 2, -2)}$

20. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación general de las rectas que pasan por el P (0, 1, −1):*

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

$$\frac{x}{m} = \frac{y - 1}{n} = \frac{z + 1}{p} \quad (1)$$

b) *Determinación de un vector director de la recta.:*
Al ser paralela la recta buscada a los planos $x + 2y - z - 2 = 0$*;* $2x + y + 2z - 1 = 0$ *es también paralela a la recta:*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z - 2 &= 0 \\ 2x + y + 2z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

determinada por ambos, cuyo vector director $\vec{v}$*, es:*

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

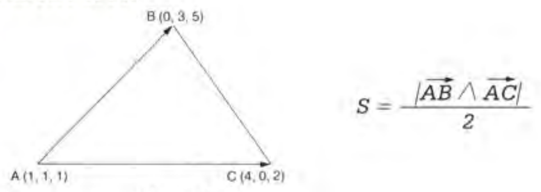
$$\vec{v}\,(5, -4, -3)$$

c) *Ecuación de la recta pedida:*
Llevando los valores de los parámetros m, n, p, a la (1) obtenemos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z + 1}{-3}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{\frac{x}{5} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z + 1}{-3}}$

21. RESOLUCIÓN



$$S = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|}{2}$$

a) *Cálculo de los* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$*:*

$$\overrightarrow{AB}\,(-1, 2, 4)\ ;\ \overrightarrow{AC}\,(3, -1, 1)$$

b) *Cálculo del* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$*:*

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 13\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6, 13, -5)$$

c) *Cálculo del* $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$*:*

$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = |\sqrt{36 + 169 + 25}| = \sqrt{230}$$

$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{230}$$

d) *Cálculo del área del triángulo:*

$$S = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{230}}{2}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{S = \frac{\sqrt{230}}{2}}$ $\mathbf{U^2}$

22. RESOLUCIÓN

I.

a) *Vamos a determinar si se cortan (ver* **10 I.***)*

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 5 &= 0 \\ 3x - 2z - 3 &= 0 \\ \frac{x + 2}{2} = \frac{y - 1}{1} &= \frac{z + 3}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x - 2y - 5 &= 0 \\ 3x - 2z - 3 &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0 \\ 3y - z - 6 &= 0 \end{aligned}\right.$$

El sistema no tiene solución, resuelto el formado por las tres primeras vemos que es incompatible. Las rectas no se cortan.

b) *Vamos a determinar si son paralelas.*

- *Cálculo de* $\vec{v}_1$*, un vector director de* r_1*:*

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{v}_1\,(4, 2, 6)$$

- *Aplicamos la condición de paralelismo entre rectas:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$$

SOLUCIÓN I: **Las rectas son paralelas**

II. *Ecuación del plano que determinan.*

- *Haz de planos por una de ellas,* r_1*:*

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 5 &= 0 \\ 3x - 2z - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(1 + 3\lambda)\,x - 2y - 2\lambda z + (-5 - 3\lambda) = 0 \qquad (1)$$

- *Un punto cualquiera de la otra,* r_2*:*

$$P\,(-2, 1, -3)$$

- *Determinación de* λ *para que el plano (1) pase por el P (−2, 1, −3):*

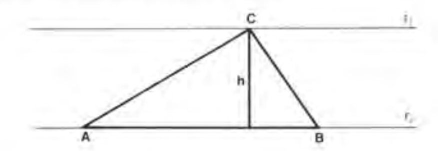
$$(1 + 3\lambda)(-2) - 2 + 6\lambda + (-5 - 3\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

- *Sustitución del valor de* $\lambda = -3$*, hallado, en la ecuación (1). Resulta:*

$$-8x - 2y + 6z + 4 = 0$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{4x + y - 3z - 2 = 0}$

III. *Cálculo de la distancia entre ellas:*



La altura de cualquier triángulo como el de la figura nos da la distancia entre ellas. El área de dicho triángulo es:

$$\frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{2} = \frac{d(AB) \cdot h}{2} \qquad (1)$$

- *Cálculo de dos puntos A y B cualesquiera de r_2:*

$$A(-2, 1, -3) \; ; \; B(0, 2, 0)$$

- *Cálculo de un punto C, cualquiera de r_1:*

$$C(1, -2, 0)$$

- *Cálculo de $|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$:*

$$\vec{AB}(2, 1, 3) \; ; \; \vec{AC}(3, -3, 3)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (12, 3, -9)$$

$$|\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \sqrt{144 + 9 + 81} = \sqrt{234}$$

$$|\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \sqrt{234}$$

- *Cálculo de $d(\vec{AB})$:*

$$d(AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 1 + 9}$$

$$d(AB) = \sqrt{14}$$

- *Cálculo de la distancia entre las rectas. De la expresión (1) se deduce:*

$$h = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{d(AB)} = \frac{\sqrt{234}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{117}{7}}$$

SOLUCIÓN III: $\boldsymbol{d = \sqrt{\frac{117}{7}}}$ **U.L.**

23. RESOLUCIÓN

a) *Expresamos r_1 en forma continua:*

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\} \equiv r_1 \Rightarrow \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{2} \equiv r_1$$

b) *Haz de planos por r_1:*

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{array}\right|$$

$$(1 + 2\lambda)x + y + \lambda z + (-3 - \lambda) = 0 \qquad (1)$$

c) *Determinación de λ para que el plano (1) y la recta r_2 sean paralelos:*

$$am + bn + cp = 0$$

$$(1 + 2\lambda)2 + 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{6}$$

d) *Sustitución del valor de $\lambda = -\frac{5}{6}$, hallado, en la (1). Resulta:*

$$4x - 6y + 5z + 13 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{4x - 6y + 5z + 13 = 0}$

24. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación del plano que pasa por el P (1, 1, 2) y contiene a la* $r \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$

- *Haz de planos que pasa por r:*

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{array}\right|$$

$$(3 + \lambda)x - 2y - \lambda z + (-3 - 2\lambda) = 0 \qquad (1)$$

- *Determinación del λ para que el plano (1) pase por el P (1, 1, 2):*

$$(3 + \lambda) - 2 - 2\lambda + (-3 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

- *Sustitución del valor de $\lambda = -\frac{2}{3}$, hallado, en la (1). Resulta:*

$$\pi \equiv 7x - 6y + 2z - 5 = 0$$

b) *Ecuación de la recta pedida:*

- *Ecuación general de las rectas que pasan por P (1, 1, 2):*

$$\frac{x - 1}{m} = \frac{y - 1}{n} = \frac{z - 2}{p} \qquad (2)$$

- *Determinación de m, n, p, para que la recta (2) sea perpendicular al plano Π:*

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

$$\frac{7}{m} = \frac{-6}{n} = \frac{2}{p}$$

- *Sustitución de los valores de m, n, p, en la (2). Resulta:*

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 1}{-6} = \frac{z - 2}{2}$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 1}{-6} = \frac{z - 2}{2}}$

25. RESOLUCIÓN

a) *Ecuación general de los planos paralelos al dado:*
Todo plano paralelo al dado es de la forma:

$$\pi \equiv 3x + 2y - 5z + d = 0 \qquad (1)$$

b) *Determinación del parámetro d para que el plano (1) diste $4\sqrt{38}$ U.L. del dado.*
La distancia del plano (1) al dado es la que hay desde el plano (1) a cualquier punto del dado.

- *Un punto cualquiera del plano dado:*

$$P(0, 2, 0)$$

- *Cálculo de d para que el plano (1) diste $4\sqrt{38}$ del punto P (0, 2, 0):*

$$d(\pi P) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$4\sqrt{38} = \left| \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0 + d}{\sqrt{9 + 4 + 25}} \right|$$

$$4\sqrt{38} = \frac{4 + d}{\pm\sqrt{38}}$$

$$d_1 = 138 \; ; \; d_2 = -146$$

- *Sustitución de los valores de d, hallados en la (1). Obtenemos:*

$$\pi_1 \equiv 3x + 2y - 5z + 138 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 3x + 2y - 5z - 146 = 0$$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\Pi_1 \equiv 3x + 2y - 5z + 138 = 0}$
$\boldsymbol{\Pi_2 \equiv 3x + 2y - 5z - 146 = 0}$

26. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo del producto escalar:*

$$\text{Si } \vec{v}_1(x_1, y_1, z_1) \text{ y } \vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 8 - 18 - 32$$

SOLUCIÓN I: $\boldsymbol{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -42}$

II. *Cálculo del ángulo que forman:*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos(\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2})$$

$$-42 = \sqrt{29}\sqrt{116}\cos(\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}) = \frac{-42}{\sqrt{29}\sqrt{116}}$$

CÁLCULOS AUXILIARES:

$|\vec{v}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{4 + 9 + 16}$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{29}$

$|\vec{v}_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

$|\vec{v}_2| = \sqrt{16 + 36 + 64}$

$|\vec{v}_2| = \sqrt{116}$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \textbf{arc cos} \dfrac{-42}{\sqrt{29}\sqrt{116}}}$

27. RESOLUCIÓN

I. *Cálculo del* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = 0}$

II. *Cálculo del* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -8}$

III. *Cálculo del* $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}]$:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (8, 2, -4) - (6, 0, -3)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (2, 2, -1)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}] = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b}] = 0}$

28. RESOLUCIÓN

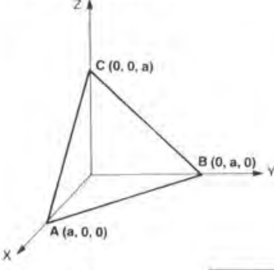
El volumen de este paralepípedo es $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 30$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{V = 30\ U^3}}$

29. RESOLUCIÓN



I. *Ecuación del plano que pasa por los puntos dados:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$$

$$x + y + z - a = 0$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{x + y + z - a = 0}}$

II. *Ecuación de la recta:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{y}{\frac{a}{2}} = \frac{z - a}{-a}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z - a}{-2a}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}} = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{1}} = \dfrac{\mathbf{z - a}}{\mathbf{-2}}}$

III. *¿Está la recta determinada por P_1 (0, 0, a) y $P_2 \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ contenida en el plano $\pi \equiv x + y + z - a = 0$?*

- *P_1 (0, 0, a) pertenece al plano $\pi \equiv x + y + z - a = 0$ porque satisface su ecuación.*

- *$P_2 \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ pertenece al plano $\pi \equiv x + y + z - a = 0$ porque satisface su ecuación.*

- *Toda recta que tenga dos puntos contenidos en un plano está contenida en el plano, por tanto la recta determinada por P_1 y P_2 está contenida en el plano.*

SOLUCIÓN III: **La recta está contenida en el plano**

30. RESOLUCIÓN

I. *La recta y el plano serán secantes siempre que el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 1 \\ x + 5y - z &= 0 \\ 2x + y + mz &= n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

tenga solución única:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & n \end{pmatrix}$$

El sistema tendrá solución única cuando:

Rango de C = rango de A = 3

Para que esto ocurra ha de ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{23}{7}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{m \neq -\dfrac{23}{7}}}$

II. *La recta y el plano serán paralelos si cumplen la condición de paralelismo.*

- *Hallamos un vector director de r:*

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v}_1\ (12, -1, 7)$$

- *Condición de paralelismo entre recta y plano:*

$$am + bn + cp = 0$$

$$24 - 1 + 7m = 0 \Rightarrow m = -\frac{23}{7}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{m = -\dfrac{23}{7}}}$

III. *La recta estará contenida en el plano si el sistema* (1) *tiene infinitas soluciones, para ello:*

Rango de C = rango A = 2

- *Cálculo de m para que R(C) = 2:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -\frac{23}{7}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ \Delta_1 &\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R(C) = 2$$

- *Cálculo de n para que R(A) = 2:*

Análogamente obtenemos:

$$n = \frac{9}{7}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{m = -\dfrac{23}{7},\ n = \dfrac{9}{7}}}$

Bloque 15

- ✔ Probabilidades
- ✔ Ejercicios propuestos
- ✔ Resolución de los ejercicios

PROBABILIDADES

Definición axiomática de probabilidad.

Se denomina probabilidad a una aplicación «p» de $P(S)$ en **Q**, *que obedece a los siguientes axiomas:*

I. $\forall A \in P(S): 0 \leqslant p(A) \leqslant 1$

II. $p(S) = 1$

III. $[A \in P(S)]$ y $[B \in P(S)]$ y $[A \cap B = \varnothing] \Rightarrow$
$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

NOTACIONES

A, B, ... *sucesos* A, B, ...

S *suceso seguro*

Q *conjunto de números racionales*

$P(S)$ *conjunto de partes de* S

$\overline{A}$, $\overline{B}$ ... *sucesos contrarios del* A, B, ...

Consecuencias de los axiomas

I. *La probabilidad de que se verifique un suceso es igual a la unidad menos la probabilidad de que se verifique su contrario.*

$$p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

II. *La probabilidad del suceso imposible es cero.*

$$p(\varnothing) = 0$$

III. *La probabilidad del suceso unión de otros dos es igual a la suma de probabilidades de ambos menos la de su intersección.*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Ley de Laplace

En caso de igualdad de condiciones para todos los sucesos elementales, la probabilidad de que ocurra un suceso A *es el cociente de dividir el número de casos favorables para que se realice el suceso* A, *entre el número de casos posibles.*

$$p(A) = \frac{\text{n.° casos favorables}}{\text{n.° casos posibles}}$$

Probabilidad condicionada

> *Se llama probabilidad del suceso* B *condicionado por el suceso* A, *a la probabilidad de que ocurra el suceso* B *supuesto que ya ha ocurrido el* A.

Se indica la probabilidad del suceso B *condicionado por el* A *con la notación* $p(^B/_A)$, *y se verifica:*

$$p(^B/_A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

o bien:

$$p(A \cap B) = p(^B/_A) \cdot p(A)$$

Sucesos independientes

> *Entendemos que el suceso* B *es independiente del* A *cuando el hecho de que se verifique el* A *no condiciona en forma alguna el hecho de que se verifique el* B, *es decir, cuando* $p(^B/_A) = p(B)$.

Si el suceso B *es independiente del* A, *y como consecuencia de que* $p(^B/_A) = p(B)$ *se verifica:*

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A)$$

Probabilidad compuesta

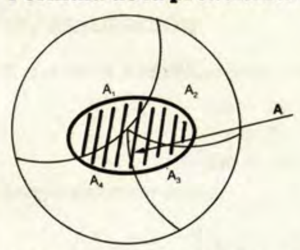
La expresión:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A)$$

constituye el llamado teorema de probabilidad compuesta, que dice:

> La probabilidad de que dos sucesos independientes entre sí se verifiquen al mismo tiempo, es igual al producto de las probabilidades de que se realicen por separado.

Fórmula de la probabilidad total



Si $A_1, A_2, ..., A_n$ *es una familia de sucesos, tales que:*

- *La unión de todos ellos da el suceso seguro.*
- *Son incompatibles dos a dos.*
- *Si* A *es un suceso cualquiera de* $P(S)$, *se verifica:*

$$p(A) = p(^A/_{A_1}) \cdot p(A_1) + p(^A/_{A_2}) \cdot p(A_2) + ... + p(^A/_{A_n}) \cdot p(A_n)$$

o bien:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(^A/_{A_i}) \cdot p(A_i)$$

Fórmula de Bayes

$$p(^{A_i}/_A) = \frac{p(^A/_{A_i})}{\sum_{i=1}^{n} p(^A/_{A_i})\, p(A_i)}$$

RECOPILACIÓN DE LAS FÓRMULAS

I. $p(A) = \dfrac{\text{n.° casos favorables}}{\text{n.° casos posibles}}$

II. $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

III. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

IV. $p(A \cap B) = p(^B/_A) \cdot p(A)$

V. $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ (*)

VI. $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(^A/_{A_i}) \cdot p(A_i)$

VII. $p(^{A_i}/_A) = \dfrac{p(^A/_{A_i})}{\sum p(^A/_{A_i})\, p(A_i)}$

(*) Sólo en el caso de que A y B sean independientes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la probabilidad de sacar por suma 8 puntos al lanzar dos dados.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \frac{5}{36}}$

2. Hallar la probabilidad de sacar por suma o bien 4, o bien 11 puntos al lanzar dos dados.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \frac{5}{36}}$

3. Se escriben al azar las cinco vocales. ¿Cuál es la probabilidad de que la «e» aparezca la primera y la «o» la última?

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \frac{1}{20}}$

4. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras de una urna que contiene 15 bolas blancas y 12 negras, sin reintegrar la bola extraída?

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A) = \frac{66}{351}}$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{66}{351}}$

5. Una urna contiene 12 bolas blancas y 8 negras. Si se sacan dos bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(C) = \frac{\cancel{99}\,94}{190}}$

6. Una urna contiene 12 bolas blancas y 8 negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras reintegrando la bola extraída?

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{4}{25}}$

7. De una baraja española (40 cartas). ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caballo seguido de un tres, reintegrando la primera carta? ¿Y sin reintegrarla?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{1}{100}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(C \cap D) = \frac{2}{195}}$

8. Si la probabilidad de que se realice un suceso es 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de que se realice efectuando 4 pruebas?

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4}$

9. Se sacan dos cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean un caballo y un tres, reintegrando? ¿y sin reintegrar?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{1}{50}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(C \cap D) = \frac{4}{195}}$

10. Una urna contiene 8 bolas blancas, 5 negras y 2 rojas. Se extraen tres bolas al azar y se desea saber:

I. La probabilidad de que las tres bolas sean blancas.

II. La probabilidad de que dos sean blancas y una negra.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{24}{195}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{4}{13}}$

11. Se extraen tres cartas de una baraja de 40 cartas.

I. ¿Cuál es la probabilidad de que sean tres sotas?

II. ¿Y de que sean un as, un dos y un tres?

III. ¿Y de que salga un rey, seguido de un cinco y éste de un siete?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2\,470}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(D \cap E \cap F) = \frac{8}{1\,235}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(G \cap H \cap I) = \frac{4}{3\,705}}$

12. Una urna contiene dos bolas blancas y tres negras. Otra contiene seis blancas y cuatro negras. Si extraemos una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{6}{25}}$

13. Al lanzar dos veces un dado ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos divisible por 3?

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A) = \frac{1}{3}}$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{1}{3}}$

14. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 se escriben todos los números posibles de tres cifras, sin repetir cifras en cada número. Si se señala un número al azar:

I. ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 4?

II. ¿Y que sea múltiplo de tres?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{1}{5}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{2}{5}}$

15. Una caja contiene 8 bolas rojas, 4 azules y 6 verdes. Se extraen 3 bolas al azar y se desea saber:

I. La probabilidad de que las tres sean rojas.

II. La probabilidad de que dos sean rojas y la otra verde.

III. La probabilidad de que dos sean azules y la otra de otro color.

IV. La probabilidad de que todas sean de distinto color.

V. La probabilidad de que todas sean del mismo color.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{7}{102}}$

SOLUCIÓN II: $p(B) = \frac{7}{34}$

SOLUCIÓN III: $p(C) = \frac{7}{68}$

SOLUCIÓN IV: $p(D) = \frac{4}{17}$

SOLUCIÓN V: $p(E) = \frac{5}{51}$

16. Se lanza un dado seis veces, ¿cuál es la probabilidad de sacar algún 1 en los seis lanzamientos?

SOLUCIÓN: $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$

17. Una caja contiene 2 bolas blancas, 3 negras y 4 rojas. Otra contiene 3 blancas, 5 negras y 4 rojas. Se toma al azar una bola de cada caja, ¿qué probabilidad hay de que sean del mismo color?

SOLUCIÓN: $p(D) = \frac{37}{108}$

18. En una urna hay 50 bolas, aparentemente iguales, numeradas del 1 al 50. ¿Qué probabilidad hay de sacar, una a una, las 50 bolas en el orden natural?

SOLUCIÓN: $p(A) = \frac{1}{50!}$

19. La probabilidad de acertar en un blanco de un disparo se estima en 0,2. La probabilidad de acertar en dos disparos será: $p_1 = 0{,}04$; $p_2 = 0{,}36$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}12$. Determinar qué respuesta es la correcta.

SOLUCIÓN: **La respuesta correcta es: $p_2 = 0{,}36$**

20. Cuál es la probabilidad de torpedear un barco, si sólo se pueden lanzar tres torpedos y la probabilidad de impacto de cada uno se estima en un 30 %.

SOLUCIÓN: $p(A) = 1 - (0{,}7)^3$

21. Se considera el experimento aleatorio «lanzar dos veces un dado». ¿Cuál es la probabilidad de obtener número par en el segundo lanzamiento condicionado a obtener impar en el primero? Probar que estos dos sucesos son independientes.

SOLUCIÓN: $p(B/A) = \frac{1}{2}$

22. A un congreso asisten 80 congresistas. De ellos 70 hablan inglés y 50 francés. Se eligen dos congresistas al azar y se desea saber:

I. Cuál es la probabilidad de que se entiendan sin intérprete.

II. Cuál es la probabilidad de que se entiendan sólo en francés.

III. Cuál es la probabilidad de que se entiendan en un solo idioma.

IV. Cuál es la probabilidad de que se entiendan en los dos idiomas.

SOLUCIÓN I: $p(A) = \frac{64}{79}$

SOLUCIÓN II: $p(B) = \frac{59}{632}$

SOLUCIÓN III: $p(C) = \frac{366}{632}$

SOLUCIÓN IV: $p(D) = \frac{67}{632}$

23. En una bolsa hay 8 bolas rojas, 10 negras y 6 blancas. Tres niños sacan, sucesivamente, dos bolas cada uno, sin reintegrar ninguna. Hallar la probabilidad de que el primero saque las dos rojas, el segundo las dos negras y el tercero las dos blancas.

SOLUCIÓN: $p(A \cap B \cap C) = \frac{15}{9614}$

24. Se lanza un dado *n* veces ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos un 6 en los *n* lanzamientos?

SOLUCIÓN: $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

25. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar sucesivamente cuatro monedas al aire y se pide:

I. La probabilidad de obtener a lo sumo tres cruces.

II. La probabilidad de obtener dos caras.

SOLUCIÓN I: $p(A) = \frac{15}{16}$

SOLUCIÓN II: $p(B) = \frac{3}{8}$

26. Una pieza de artillería dispone de 7 obuses para alcanzar un objetivo. En cada disparo la probabilidad de alcanzarlo es 1/7. ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar el objetivo con los siete disparos?

SOLUCIÓN I: $p(A) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7$

27. La probabilidad de que un hombre viva más de 25 años es 3/5, la de una mujer es 2/3. Se pide:

I. La probabilidad de que ambos vivan más de 25 años.

II. La probabilidad de que sólo viva más de 25 años el hombre.

III. La probabilidad de que sólo viva más de 25 años la mujer.

IV. La probabilidad de que viva más de 25 años, al menos, uno de los dos.

SOLUCIÓN I: $p(C) = \frac{2}{5}$

SOLUCIÓN II: $p(D) = \frac{1}{5}$

SOLUCIÓN III: $p(E) = \frac{4}{15}$

SOLUCIÓN IV: $p(F) = \frac{13}{15}$

28. Si de una baraja de 40 cartas se eligen cuatro al azar, determinar:

I. La probabilidad de elegir dos reyes.

II. La probabilidad de que tres de las cartas sean del mismo palo.

III. La probabilidad de que todos los números sean menores de siete.

SOLUCIÓN I: $p(A) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{36}{2}}{\binom{40}{4}}$

SOLUCIÓN II: $p(B) = \dfrac{4\binom{10}{3}\binom{30}{1}}{\binom{40}{4}}$

SOLUCIÓN III: $p(C) = \dfrac{\binom{24}{4}}{\binom{40}{4}}$

29. Se lanzan tres monedas sucesivamente y se consideran los siguientes sucesos:

A «obtener cruz en el primer lanzamiento»
B «obtener alguna cara»
C «obtener dos cruces»

y se desea saber:

I. Si A y B son incompatibles.
II. Si A y B son independientes.
III. Si A y C son incompatibles.
IV. Si A y C son independientes.
V. La probabilidad de $[(A \cup B) \cap C]$.

SOLUCIÓN I: **Como $A \cap B \neq \emptyset$ los sucesos A y B no son incompatibles.**

SOLUCIÓN II: **Como $p(B/A) \neq p(B)$ los sucesos A y B no son independientes.**

SOLUCIÓN III: **Como $A \cap C \neq \emptyset$ los sucesos A y C no son incompatibles.**

SOLUCIÓN IV: **Como $p(C/A) \neq p(C)$ los sucesos A y C no son independientes.**

SOLUCIÓN V: $[(A \cup B) \cap C] = \dfrac{3}{8}$

30. De las 100 personas que asisten a un congreso 40 hablan francés, 40 inglés, 51 castellano, 11 francés e inglés, 12 francés y castellano y 13 ingles y castellano. Se eligen al azar dos asistentes al congreso y se desea saber:

I. Cuál es la probabilidad de que ninguno hable francés.
II. Cuál es la probabilidad de que hablen castellano.
III. Cuál es la probabilidad de que se entiendan sólo en castellano.
IV. Cuál es la probabilidad de que sólo hablen un idioma.
IV. Cuál es la probabilidad de que hablen los tres idiomas.

SOLUCIÓN I: $p(A) = \dfrac{\binom{60}{2}}{\binom{100}{2}}$

SOLUCIÓN II: $p(B) = \dfrac{\binom{51}{2}}{\binom{100}{2}}$

SOLUCIÓN III: $p(C) = \dfrac{\binom{31}{2}+\binom{31}{1}\binom{8}{1}+\binom{31}{1}\binom{7}{1}+\binom{31}{1}\binom{5}{1}}{\binom{100}{2}}$

SOLUCIÓN IV: $p(D) = \dfrac{\binom{74}{2}}{\binom{100}{2}}$

SOLUCIÓN V: $p(E) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{100}{2}}$

31. Un dado está «cargado» de modo que, al lanzarlo, la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número. Hallar la probabilidad de que, al lanzar el dado, se obtenga un número par.

SOLUCIÓN: $p(A) = \dfrac{12}{21}$

32. En una encuesta realizada entre 24 alumnos resulta que 18 fuman Ducados, 12 Celtas y 8 las dos clases. Se eligen 3 alumnos al azar y se desea saber:

I. Cuál es la probabilidad de que los tres fumen.
II. Cuál es la probabilidad de que dos, exactamente dos, fumen Ducados.

SOLUCIÓN I: $p(A) = \dfrac{\binom{22}{3}}{\binom{24}{3}}$

SOLUCIÓN II: $p(B) = \dfrac{\binom{18}{2}\binom{6}{1}}{\binom{24}{3}}$

33. Si de 800 piezas fabricadas por una máquina salieron 25 defectuosas y se eligen 5 de aquéllas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya alguna defectuosa entre las cinco elegidas?

SOLUCIÓN: $p(A) = 1 - \dfrac{\binom{775}{5}}{\binom{800}{5}}$

34. Se tienen tres urnas de igual aspecto. En la primera hay 3 bolas blancas y 4 negras; en la segunda hay 5 negras y en la tercera 2 blancas y 3 negras. Se desea saber:

I. Si se extrae una bola de una urna, elegida al azar, cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

II. Se ha extraído una bola negra de una de las urnas ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la segunda urna?

SOLUCIÓN I: **p (A) = 0,724**

SOLUCIÓN II: $p(A_2/A) = 0{,}760$

35. En un hospital especializado en enfermedades de torax ingresan un 50 % de enfermos con bronquitis, un 30 % con neumonía y un 20 % con gripe. La probabilidad de curación completa en cada una de dichas enfermedades es, respectivamente, 0,7; 0,8 y 0,9. Un enfermo internado en el hospital ha sido dado de alta completamente curado. Hallar la probabilidad de que el enfermo dado de alta hubiera ingresado con bronquitis.

SOLUCIÓN: $p(A_1/A) = 0{,}48$

36. Hay una epidemia de cólera. Un síntoma muy importante es la diarrea, pero este síntoma también se presenta en personas con intoxicación, y, aun, en personas que no tienen nada serio. La

probabilidad de tener diarrea teniendo cólera, intoxicación y no teniendo nada serio es 0,99; 0,5 y 0,004 respectivamente. Por otra parte se sabe que el 2 % de la población tiene cólera, el 0,5 intoxicación, y el resto, 97,5 %, nada serio. Se desea saber:

I. Elegido al azar un individuo de la población ¿qué probabilidad hay de que tenga diarrea?

II. Se sabe que determinado individuo tiene diarrea ¿cuál es la probabilidad de que tenga cólera?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = 0{,}0262}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(A_1/A) = 0{,}755}$

37. La probabilidad de que un artículo provenga de una fábrica A_1 es 0,7, y la probabilidad de que provenga de otra fábrica A_2 es 0,3. Se sabe que la fábrica A_1 produce un 4 por mil (4‰) de artículos defectuosos y la A_2 un 8‰.

I. Se observa un artículo y se ve que está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la fabrica A_2?

II. Se pide un artículo a una de las dos fábricas, elegida al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

III. Se piden 5 artículos a la fábrica A_1 ¿cuál es la probabilidad de que haya alguno defectuoso?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A_2/A) = 0{,}461}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(A) = 0{,}0052}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(B) = 1 - 0{,}996^5}$

38. En una población animal hay epidemia. El 10 % de los machos y el 18 % de las hembras están enfermos. Se sabe además que hay doble número de hembras que de machos y se pide:

I. Elegido al azar un individuo de esa población ¿cuál es la probabilidad de que esté enfermo?

II. Un individuo de esa población se sabe que está enfermo ¿qué probabilidad hay de que el citado individuo sea macho?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = 0{,}153}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(A_1/A) = 0{,}217}$

39. En una clase mixta hay 30 alumnas, 15 estudiantes que repiten curso, de los que 10 son alumnos, y hay 15 alumnos que no repiten curso. Se pide:

I. Justificar que el número de estudiantes de esa clase es 55.

II. Elegido al azar un estudiante de esa clase, ¿cuál es la probabilidad de que sea alumno?

III. Elegido al azar un estudiante de esa clase , ¿cuál es la probabilidad de que sea alumna y repita curso?

IV. Elegidos al azar dos estudiantes ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(A) = \frac{5}{11}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(B) = \frac{1}{11}}$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{p(C) = \frac{\binom{40}{2}}{\binom{55}{2}}}$

40. La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0,6, la de que apruebe lengua 0,5 y la de que apruebe las dos 0,2. Hallar:

I. La probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.

II. La probabilidad de que no apruebe ninguna.

III. La probabilidad de que apruebe matemáticas y no lengua.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(D) = 0{,}9}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(E) = 0{,}1}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(F) = 0{,}4}$

41. Tres artilleros tienen probabilidades respectivas 2/3, 3/4 y 5/6 de hacer blanco al efectuar un disparo. Si los tres disparan simultáneamente, y suponiendo que cada uno acierte o no independientemente de los demás, se desea saber:

I. Qué probabilidad hay de que al menos uno de ellos dé en el blanco.

II. Qué probabilidad hay de que sólo acierte el segundo.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{71}{72}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{1}{24}}$

42. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar sucesivamente cuatro monedas al aire y se pide:

I. La probabilidad de obtener como mínimo dos caras.

II. La probabilidad de obtener tres cruces.

III. La probabilidad de obtener dos cruces en los dos últimos lanzamientos.

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{11}{16}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{1}{4}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(C) = \frac{1}{4}}$

43. Se lanza 8 veces un dado. Hallar la probabilidad de sacar 3 doses en los 8 lanzamientos.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5}$

44. El 30 % de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas. Calcular la probabilidad de que al elegir 10 piezas al azar haya dos defectuosas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{10}{2} 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8}$

45. Se lanza 12 veces un dado. Hallar la probabilidad de sacar más de 4 puntos en 5 ocasiones.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{12}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^7}$

46. Se lanza 10 veces una moneda. Hallar la probabilidad de sacar 7 cruces en los 10 lanzamientos.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

47. El 30 % de las piezas fabricadas por una máquina son defectusas. Calcular la probabilidad de que al elegir 10 piezas al azar haya al menos dos defectuosas.

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(C) = 1 - \left[0{,}7^{10} + \binom{10}{1} 0{,}3 \cdot 0{,}7^{9}\right]}$

48. Un trasnochador dispone de un llavero con tres llaves indistinguibles en la oscuridad, de las cuales sólo una abre la puerta de su casa. Para dar con la llave en cuestión sigue uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO: Prueba las llaves una tras otra teniendo cuidado de no volver a usar la misma llave.

SEGUNDO MÉTODO: Prueba una llave y, si no sirve, agita el llavero y prueba otra vez (con el riesgo de volverla a usar).

I. ¿Cuál es la probabilidad de que abra al tercer intento si usa el primer método?

II. ¿Cuál es la probabilidad de que abra al tercer intento si usa el segundo método?

III. Además, se sabe que usa el segundo método cuando ha bebido un poco más de la cuenta (lo que ocurre uno de cada tres dias) y el primero si está sobrio. Si se sabe que los dos primeros intentos han fracasado ¿cuál es la probabilidad de que esté borracho?

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(B) = \frac{1}{3}}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(C) = \frac{4}{27}}$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(A_2/A) = \frac{2}{5}}$

49. En cierto municipio para ascender de barrendero a jefe de escoba hay una gran competencia. Se puede ascender por tres caminos: por oposición, por concurso de méritos y por enchufe con el concejal delegado de limpieza pública.

La probabilidad de que un opositor alcance plaza es 0,25. El 78 % de los concursantes también consiguen la plaza y todos los enchufados del concejal de limpieza consiguen el puesto.

Sabiendo que el 75 % de los aspirantes a jefes de escoba son opositores, el 20% concursantes y el 5% consiguen el enchufe, calcular:

I. ¿Cuántos de los 300 jefes de escoba que hay en activo consiguieron el puesto por enchufe?

II. La probabilidad de que un determinado jefe de escoba haya conseguido el puesto por oposición.

SOLUCIÓN I: **Unos 38 jefes de escoba**

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(A_1/A) = 0{,}478}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO:

Construimos el espacio muestral:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	(2,6)
3,1	3,2	3,3	3,4	(3,5)	3,6
4,1	4,2	4,3	(4,4)	4,5	4,6
5,1	5,2	(5,3)	5,4	5,5	5,6
6,1	(6,2)	6,3	6,4	6,5	6,6

A «sacar por suma 8 puntos al lanzar dos dados»

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{5}{36}$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A) = \frac{5}{36}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

Imaginémonos que lanzamos primero un dado y a continuación el otro, sean:

A «servir el primer lanzamiento»

B «servir el segundo lanzamiento»

Evidentemente sacaremos por suma 8 puntos cuando sirva el primer lanzamiento y también el segundo, dando por sentado que ya sirvió el primero.

- *De acuerdo con la fórmula* **IV** *(pág. 5):*

$$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A) \qquad (1)$$

$$p(A) = \frac{5}{6}$$

- *Puesto que tenemos cinco casos favorables (2, 3, 4, 5 y 6) y seis posibles.*

$$p(B/A) = \frac{1}{6}$$

dando por hecho que sirvió el primer lanzamiento, sólo hay un caso favorable para que sirva el segundo (así si en el primero sacamos un 5 en el segundo tendremos que sacar un 3).

Llevando estos valores a la (1) *resulta:*

$$p(A \cap B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{5}{36}}$

NOTA: Aunque en un principio cueste adaptarse, recomendamos el segundo procedimiento, pues a la larga es mucho más ventajoso y general.

2. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO:

El espacio muestral es:

1,1	1,2	(1,3)	1,4	1,5	1,6
2,1	(2,2)	2,3	2,4	2,5	2,6
(3,1)	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	(5,6)
6,1	6,2	6,3	6,4	(6,5)	6,6

A «sacar por suma o bien 4, o bien 11 puntos»

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{5}{36}$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A) = \frac{5}{36}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

a) *A «sacar por suma 4 puntos»*
A_1 «servir el primer lanzamiento»
A_2 «servir el segundo lanzamiento»

$$p(A) = p(A_1 \cap A_2) = p(A_2/A_1) \cdot p(A_1)$$

$$p(A_2/A_1) = \frac{1}{6} \; ; \; p(A_1) = \frac{3}{6}$$

$$p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$$

b) *B «sacar por suma 11 puntos»*

$$p(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

c) *C «sacar por suma o bien 4, o bien 11 puntos»*

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p\,\cancel{(A \cap B)}$$

$$p(C) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(C) = \frac{5}{36}}$

NOTA: p (A ∩ B) = 0, pues A y B son incompatibles

3. RESOLUCIÓN

A «escribir al azar las cinco ...»

CASOS FAVORABLES: $P\,3 = 3!$

a, e, i, o, u,

e — — — o
e — — — o
e — — — o
• • • • •

CASOS POSIBLES: $P\,5 = 5!$

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{5 \cdot 4}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \frac{1}{20}}$

4. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO:

A «sacar dos bolas negras de una urna...»

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{12,2}}{C_{27,2}} = \frac{\frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2}}{\frac{27 \cdot 26}{1 \cdot 2}}$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A) = \frac{66}{351}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

A «ser negra la primera bola»
B «ser negra la segunda»

$$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

$$p(A) = \frac{12}{27} \; ; \; p(B/A) = \frac{11}{26}$$

$$p(A \cap B) = \frac{11}{26} \cdot \frac{12}{27}$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{66}{351}}$

NOTA: Siempre que no nos digan otra cosa debemos entender que es sin reintegrar.

5. RESOLUCIÓN

a) *A «sacar las dos blancas»*
A_1 «ser blanca la primera»
A_2 «ser blanca la segunda»

$$p(A) = p(A_1 \cap A_2) = p(A_2/A_1) \cdot p(A_1)$$

$$p(A_2/A_1) = \frac{11}{19} \; ; \; p(A_1) = \frac{12}{20}$$

$$p(A) = \frac{11}{19} \cdot \frac{12}{20} = \frac{132}{380}$$

b) *B «sacar las dos negras»*

$$p(B) = \frac{7}{19} \cdot \frac{8}{20} = \frac{56}{380}$$

c) *C «sacar las dos del mismo color»*

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p\,\cancel{(A \cap B)}$$

$$p(C) = \frac{132}{380} + \frac{56}{380} = \frac{188}{380}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(C) = \frac{94}{190}}$

6. RESOLUCIÓN

A «ser negra la primera»
B «ser negra la segunda»

Evidentemente A y B son sucesos independientes, por tanto, de acuerdo con la fórmula **V**:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \; ; \; p(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{4}{25}}$

7. RESOLUCIÓN

I. *Reintegrando.*
A «ser un caballo la primera»
B «ser un tres la segunda»

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \; ; \; p(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{1}{100}}$

II. *Sin reintegrar.*
C «ser un caballo la primera»
D «ser un tres la segunda»

$$p(C \cap D) = p(D/C) \cdot p(C)$$

$$p(C) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \;;\; p(D/C) = \frac{4}{39}$$

$$p(C \cap D) = \frac{4}{39} \cdot \frac{1}{10}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(C \cap D) = \frac{2}{195}}$

8. RESOLUCIÓN

A «realizarse el suceso efectuando 4 pruebas»

A_1, A_2, A_3, A_4 «realizarse el suceso en la primera, segunda, tercera y cuarta prueba, respectivamente»

Evidentemente:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = \frac{1}{3}$$

$$p(\bar{A}_1) = p(\bar{A}_2) = p(\bar{A}_3) = p(\bar{A}_4) = \frac{2}{3}$$

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4$$

y por tanto:

$$p\,\bar{A} = p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot p(\bar{A}_3) \cdot p(\bar{A}_4)$$

$$p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4}$

9. RESOLUCIÓN

I. *Reintegrando.*

A «servir la primera carta»
B «servir la segunda»

$$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

$$p(A) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \;;\; p(B/A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{1}{50}}$

II. *Sin reintegrar.*

C «servir la primera carta»
D «servir la segunda carta»

$$p(C \cap D) = p(D/C) \cdot p(C)$$

$$p(C) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \;;\; p(D/C) = \frac{4}{39}$$

$$p(C \cap D) = \frac{4}{39} \cdot \frac{1}{5}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(C \cap D) = \frac{4}{195}}$

NOTA: Obsérvese muy detenidamente la diferencia entre este problema y el número **7**.

10. RESOLUCIÓN

I. *A «sacar las tres bolas blancas»*

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{8,3}}{C_{15,3}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{24}{195}}$

II. *B «sacar dos bolas blancas y una negra»*

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{8,2} \cdot C_{5,1}}{C_{15,3}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 5}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{4}{13}}$

11. RESOLUCIÓN

I. *Sacar tres sotas*

A «ser sota la primera»
B «ser sota la segunda»
C «ser sota la tercera»

$$p(A \cap B \cap C) = p(C/A \cap B) \cdot p(B/A) \cdot p(A)$$

$$p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \;;\; p(B/A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13} \;;\; p(C/A \cap B) = \frac{2}{38} = \frac{1}{19}$$

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{10}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2\,470}}$

II. *Sacar un as, un dos y un tres*

D «servir la primera»
E «servir la segunda»
F «servir la tercera»

$$p(D \cap E \cap F) = p(F/D \cap E) \cdot p(E/D) \cdot p(D)$$

$$p(D) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \;;\; p(E/D) = \frac{8}{39} \;;\; p(F/D \cap E) = \frac{4}{38} = \frac{2}{19}$$

$$p(D \cap E \cap F) = \frac{2}{19} \cdot \frac{8}{39} \cdot \frac{3}{10}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(D \cap E \cap F) = \frac{8}{1\,235}}$

III. *Sacar un rey seguido...*

G «ser rey la primera»
H «ser un cinco la segunda»
I «ser un siete la tercera»

$$p(G \cap H \cap I) = p(I/G \cap H) \cdot p(H/G) \cdot p(G)$$

$$p(G) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \;;\; p(H/G) = \frac{4}{39} \;;\; p(I/H \cap G) = \frac{4}{38} = \frac{2}{19}$$

$$p(G \cap H \cap I) = \frac{2}{19} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{1}{10}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(G \cap H \cap I) = \frac{4}{3\,705}}$

12. RESOLUCIÓN

A «sacar una bola negra de la primera urna»
B «sacar una bola negra de la segunda»

$$p\,(A \cap B) = p\,(A) \cdot p\,(B)$$

$$p\,(A) = \frac{3}{5} \;\; ; \;\; p\,(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$p\,(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p\,(A \cap B) = \frac{6}{25}}$

13. RESOLUCIÓN

PRIMER PROCEDIMIENTO:

1,1	(1,2)	1,3	1,4	(1,5)	1,6
(2,1)	2,2	2,3	(2,4)	2,5	2,6
3,1	3,2	(3,3)	3,4	3,5	(3,6)
4,1	(4,2)	4,3	4,4	(4,5)	4,6
(5,1)	5,2	5,3	(5,4)	5,5	5,6
6,1	6,2	(6,3)	6,4	6,5	(6,6)

A «sacar por suma múltiplo de 3 al lanzar dos veces un dado»

$$p\,(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{12}{36}$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p\,(A) = \frac{1}{3}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

A «servir el primer lanzamiento»

B «servir el segundo lanzamiento»

$$p\,(A \cap B) = p\,(B/A)\, p\,(A)$$

$$p\,(A) = \frac{6}{6} = 1 \;\; ; \;\; p\,(B/A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p\,(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot 1$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO: $\mathbf{p\,(A \cap B) = \frac{1}{3}}$

NOTA: Obsérvese que en el primer lanzamiento sirven todos los números y que, salga el número que salga en el primero, siempre hay dos números del segundo lanzamiento que sumados al que salió en el primero dan una suma divisible por 3.

14. RESOLUCIÓN

I. *A «señalar... que sea múltiplo de 4»*

- *Terminaciones que darían $\dot{4}$*

$$12, \;\; 24, \;\; 32, \;\; 52$$

- *¿Cuántos terminan en 12?*

$$V_{3,1}$$

$$p\,(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{4\,V_{3,1}}{V_{5,3}} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p\,(A) = \frac{1}{5}}$

II. *B «señalar... que sea múltiplo de 3»*

$$\{1, 2, 3\} \;\; ; \;\; \{1, 3, 5\} \;\; ; \;\; \{2, 3, 4\} \;\; ; \;\; \{3, 4, 5\}$$

Los números de cualquiera de estos conjuntos, dispuestos en cualquier orden, son los que dan $\dot{3}$.

$$p\,(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{4\,P_3}{V_{5,3}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p\,(B) = \frac{2}{5}}$

15. RESOLUCIÓN

I. *A «extraer las tres bolas rojas»*

$$p\,(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{8,3}}{C_{18,3}} = \frac{\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p\,(A) = \frac{7}{102}}$

II. *B «extraer dos bolas rojas y una verde»*

$$p\,(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{8,2} \cdot C_{6,1}}{C_{18,3}} = \frac{\dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 6}{\dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p\,(B) = \frac{7}{34}}$

III. *C «extraer dos azules y otra no azul»*

$$p\,(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{4,2} \cdot C_{14,1}}{C_{18,3}} = \frac{\dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 14}{\dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p\,(C) = \frac{7}{68}}$

IV. *D «extraer las tres de distinto color»*

$$p\,(D) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{8,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{6,1}}{C_{18,3}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 6}{\dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{p\,(D) = \frac{4}{17}}$

V. *E «extraer las tres bolas del mismo color»*

E_1 «extraer las tres rojas»

E_2 «extraer las tres azules»

E_3 «extraer las tres verdes»

$$p\,(E_1) = \frac{C_{8,3}}{C_{18,3}} = \frac{7}{102}$$

$$p\,(E_2) = \frac{C_{4,3}}{C_{18,3}} = \frac{1}{204}$$

$$p\,(E_3) = \frac{C_{6,3}}{C_{18,3}} = \frac{5}{204}$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$p\,(E) = p\,(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p\,(E_1) + p\,(E_2) + p\,(E_3)$$

puesto que E_1, E_2 y E_3 son incompatibles dos a dos.

$$p\,(E) = \frac{7}{102} + \frac{1}{204} + \frac{5}{204}$$

SOLUCIÓN V: $\mathbf{p\,(E) = \frac{5}{51}}$

16. RESOLUCIÓN

A «sacar algún 1 en seis lanzamientos»

A_1, A_2, ... A_6 «sacar un 1 en el primer, segundo, ..., sexto lanzamiento»

Evidentemente:

$$p\,(A_1) = p\,(A_2) = ... = p\,(A_6) = \frac{1}{6}$$

$$p\,(\bar{A}_1) = p\,(\bar{A}_2) = ... = p\,(\bar{A}_6) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_6$$

y por tanto:

$$p\,\bar{A} = p\,(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_6) = p\,(\bar{A}_1) \cdot p\,(\bar{A}_2) ... p\,(\bar{A}_6)$$

$$p\,(\bar{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} ... \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$p\,(A) = 1 - p\,(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p\,(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6}$

17. RESOLUCIÓN

- *A «sacar las dos blancas»*
  A_1 «ser blanca la de la primera caja»
  A_2 «ser blanca la de la segunda caja»

$$p\,(A) = p\,(A_1 \cap A_2) = p\,(A_1) \cdot p\,(A_2)$$

$$p\,(A_1) = \frac{2}{9} \;;\; p\,(A_2) = \frac{3}{12}$$

$$p\,(A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{12} = \frac{6}{108}$$

- *B «sacar las dos negras»*

$$p\,(B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{12} = \frac{15}{108}$$

- *C «sacar las dos rojas»*

$$p\,(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{12} = \frac{16}{108}$$

- *D «sacar las dos del mismo color»*

$$D = A \cup B \cup C$$

$$p\,(D) = p\,(A \cup B \cup C) = p\,(A) + p\,(B) + p\,(C)$$

$$p\,(D) = \frac{6}{108} + \frac{15}{108} + \frac{16}{108}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p\,(D) = \frac{37}{108}}$

18. RESOLUCIÓN

A «sacar las 50 bolas en orden 1, 2, 3, ..., 50»

$$p\,(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{1}{P_{50}} = \frac{1}{50!}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p\,(A) = \frac{1}{50!}}$

19. RESOLUCIÓN

A «acertar de dos disparos»
A_1 «acertar con el primer disparo»
A_2 «acertar con el segundo disparo»

$$p\,(A_1) = p\,(A_2) = 0{,}2$$
$$p\,(\bar{A}_1) = p\,(\bar{A}_2) = 0{,}8$$

como $\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, será:

$$p\,(\bar{A}) = p\,(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p\,(\bar{A}_1) \cdot p\,(\bar{A}_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$
$$p\,(A) = 1 - p\,(\bar{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

SOLUCIÓN: **La respuesta correcta es: $p_2 = 0{,}36$**

20. RESOLUCIÓN

A «acertar de tres lanzamientos»

A_1, A_2, A_3 «acertar con el primer, segundo y tercer lanzamiento, respectivamente»

Se verifica:

$$p\,(A_1) = p\,(A_2) = p\,(A_3) = 0{,}3$$
$$p\,(\bar{A}_1) = p\,(\bar{A}_2) = p\,(\bar{A}_3) = 0{,}7$$
$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

y por tanto:

$$p\,(\bar{A}) = p\,(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = p\,(\bar{A}_1) \cdot p\,(\bar{A}_2) \cdot p\,(\bar{A}_3)$$
$$p\,(\bar{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7$$
$$p\,(A) = 1 - p\,(\bar{A}) = 1 - (0{,}7)^3$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p\,(A) = 1 - (0{,}7)^3}$

21. RESOLUCIÓN

a) *Cálculo de la probabilidad de sacar par en el segundo lanzamiento, condicionado a sacar impar en el primero:*

A «sacar impar en el primero»
B «sacar par en el segundo»

1,1	(1,2)	1,3	(1,4)	1,5	(1,6)
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	(3,2)	3,3	(3,4)	3,5	(3,6)
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	(5,2)	5,3	(5,4)	5,5	(5,6)
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$p\,(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}\;;\; p\,(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}\;;\; p\,(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$p\,(A \cap B) = p\,(B/A) \cdot p\,(A)$$

$$p\,(B/A) = \frac{p\,(A \cap B)}{p\,(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

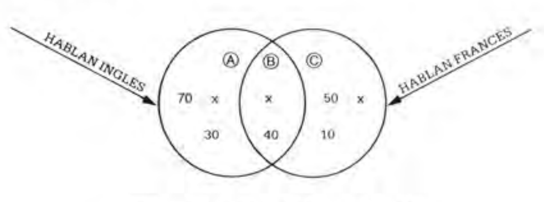
SOLUCIÓN: $\mathbf{p\,(B/A) = \frac{1}{2}}$

b) *Comprobación de que son independientes.*

$$p\,(B/A) = \frac{1}{2}\;;\; p\,(B) = \frac{1}{2}$$

Como $p\,(B/A) = p\,(B)$ los sucesos A y B son independientes.

22. RESOLUCIÓN



$$(70 - x) + x + (50 - x) = 80$$
$$x = 40$$

I. *A «los dos congresistas se entienden sin intérprete»*

No se entienden si uno de ellos es de la zona Ⓐ y el otro de la Ⓒ. Por tanto:

$$p(\bar{A}) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{30,1} \cdot C_{10,1}}{C_{80,2}} = \frac{30 \cdot 10}{\frac{80 \cdot 79}{1 \cdot 2}} = \frac{15}{79}$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{15}{79} = \frac{64}{79}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{64}{79}}$

II. *B «los dos congresistas se entienden sólo en francés»*

Se entienden sólo en francés si los dos son de la zona © o si uno es de la zona © y el otro de la zona Ⓑ.

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{10,2} + C_{10,1} \cdot C_{40,1}}{C_{80,2}} = \frac{45 + 400}{3\,160}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{59}{632}}$

III. *C «los dos congresistas se entiende en un solo idioma»*

C_1 «se entienden sólo en inglés»

C_2 «se entienden sólo en francés»

$$p(C_1) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{30,2} + C_{30,1} \cdot C_{40,1}}{C_{80,2}}$$

$$p(C_1) = \frac{335 + 1\,200}{3\,160} = \frac{307}{632}$$

$$p(C_2) = \frac{59}{632} \quad \text{(ver II)}$$

$$p(C) = p(C_1 \cup C_2) = p(C_1) + p(C_2) - p\,(C_1 \cap C_2)$$

$$p(C) = \frac{307}{632} + \frac{59}{632} = \frac{366}{632}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(C) = \frac{366}{632}}$

IV. *D «los dos congresistas se entiende en los dos idiomas»*

Se entienden en los dos idiomas si los dos son de la zona Ⓑ.

$$p(D) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{30,2}}{C_{80,2}} = \frac{335}{3\,160} = \frac{67}{632}$$

SOLUCIÓN IV: $\mathbf{p(D) = \frac{67}{632}}$

23. RESOLUCIÓN

A «sacar el primero las dos rojas»

B «sacar el segundo las dos negras»

C «sacar el tercero las dos blancas»

$$p(A \cap B \cap C) = p(C/_{A \cap B}) \cdot p(B/_A) \cdot p(A)$$

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{8,2}}{C_{24,2}} = \frac{7}{69}$$

$$p(B/_A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{10,2}}{C_{22,2}} = \frac{15}{77}$$

$$p(C/_{A \cap B}) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{6,2}}{C_{20,2}} = \frac{3}{38}$$

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{7}{69} \cdot \frac{15}{77} \cdot \frac{3}{38}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A \cap B \cap C) = \frac{15}{9614}}$

24. RESOLUCIÓN

A «sacar al menos un 6 en los n lanzamientos»

$A_1, A_2, ..., A_n$ «sacar un 6 en el primero, segundo, ..., enésimo lanzamiento»

Evidentemente:

$$p(A_1) = p(A_2) = ... = p(A_n) = \frac{1}{6}$$

$$p(\bar{A}_1) = p(\bar{A}_2) = ... = p(\bar{A}_n) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_n$$

y por tanto:

$$p\,\bar{A} = p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_n) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) ... p(\bar{A}_n)$$

$$p(\bar{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} ... \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

25. RESOLUCIÓN

El espacio muestral es:

S = {cccc, ccc +, cc + c, c + cc, + ccc, cc + +, c + c +, + cc +, c + + c, + c + c, + + cc, c + + +, + c + +, + + c +, + + + c, + + + +}

I. *A «obtener a lo sumo tres cruces»*

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{15}{16}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(A) = \frac{15}{16}}$

II. *B «obtener exactamente dos caras»*

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{6}{16}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(B) = \frac{3}{8}}$

26. RESOLUCIÓN

A «acertar de los siete disparos»

$A_1, A_2, ..., A_7$ «acertar del primer, segundo, ..., séptimo disparo respectivamente»

Se verifica:

$$p(A_1) = p(A_2) = ... = p(A_7) = \frac{1}{7}$$

$$p(\bar{A}_1) = p(\bar{A}_2) = ... = p(\bar{A}_7) = \frac{6}{7}$$

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_7$$

y, por tanto:

$$p(\bar{A}) = p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_7) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) ... p(\bar{A}_7)$$

$$p(\bar{A}) = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} ... \frac{6}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^7$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7}$

27. RESOLUCIÓN

I. *A «que el hombre viva más de 25 años»*

B «que la mujer viva más de 25 años»

C «que ambos vivan más de 25 años»

$$p(A) = \frac{3}{5} \; ; \; p(B) = \frac{2}{3} \; ; \; C = A \cap B$$

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{p(C) = \frac{2}{5}}}$

II. *D «que sólo viva más de 25 años el hombre»*

$$p(D) = p(A \cap \overline{B}) = p(A) \cdot p(\overline{B}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{p(D) = \frac{1}{5}}}$

III. *E «que sólo viva más de 25 años la mujer»*

$$p(E) = p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \cdot p(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{p(E) = \frac{4}{15}}}$

IV. *F «que viva más de 25 años al menos uno de los dos»*

PRIMER PROCEDIMIENTO

$$p(F) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(F) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{9 + 10 - 6}{15}$$

SOLUCIÓN PRIMER PROCEDIMIENTO IV: $\boxed{\mathbf{p(F) = \frac{13}{15}}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

$$\overline{F} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$p(\overline{F}) = p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

SOLUCIÓN SEGUNDO PROCEDIMIENTO IV: $\boxed{\mathbf{p(F) = \frac{13}{15}}}$

28. RESOLUCIÓN

I. *A «sacar cuatro cartas de una baraja y que haya dos reyes»*

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{4,2} \cdot C_{36,2}}{C_{40,4}}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{p(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{2}}{\binom{40}{4}}}}$

II. *B «sacar cuatro cartas de una baraja y que haya tres del mismo palo»*

B_1 «sacar cuatro cartas de una baraja y que haya tres oros»

$$p(B_1) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{10,3} \cdot C_{30,1}}{C_{40,4}}$$

como lo mismo ocurre con los otros palos será $p(B) = 4p(B_1)$, por tanto:

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{p(B) = \frac{4\binom{10}{3}\binom{30}{1}}{\binom{40}{4}}}}$

III. *C «sacar cuatro cartas de una baraja y que todos los números sean menores de siete»*

$$p(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{24,4}}{C_{40,4}}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{p(C) = \frac{\binom{24}{4}}{\binom{40}{4}}}}$

29. RESOLUCIÓN

I. *Construimos los sucesos S, A, B y C*

$S = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$

$A = \{+cc, +c+, ++c, +++\}$

$B = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c\}$

$C = \{c++, +c+, ++c\}$

$A \cap B = \{+cc, +c+, ++c\} \neq \varnothing$

SOLUCIÓN I: **Como $A \cap B \neq \varnothing$ los sucesos A y B no son incompatibles.**

II.

$$p(A \cap B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{3}{8} \; ; \; p(B) = \frac{7}{8} \; ; \; p(A) = \frac{4}{8}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4} \neq p(B)$$

SOLUCIÓN II: **Como $p(B/A) \neq p(B)$, los sucesos A y B no son independientes.**

III. $A \cap C = \{+c+, ++c\} \neq \varnothing$

SOLUCIÓN III: **Como $A \cap C \neq \varnothing$ los sucesos A y C no son incompatibles.**

IV.

$$p(A \cap C) = \frac{2}{8} \; ; \; p(C) = \frac{3}{8} \; ; \; p(A) = \frac{4}{8}$$

$$p(C/A) = \frac{p(C \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2} \neq p(C)$$

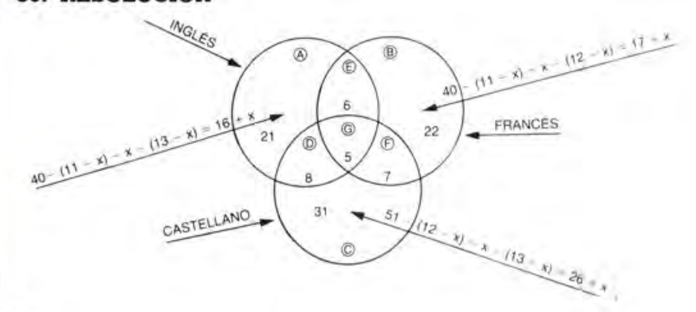
SOLUCIÓN IV: **Como $p(C/A) \neq p(C)$ los sucesos A y C no son independientes.**

V. $[(A \cup B) \cap C] = \{c++, +c+, ++c\}$

$$p[(A \cup B) \cap C] = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{3}{8}$$

SOLUCIÓN V: $\boxed{\mathbf{[(A \cup B) \cap C] = \frac{3}{8}}}$

30. RESOLUCIÓN



$$(16 + x) + (17 + x) + (26 + x) + (13 - x) + (11 - x) + (12 - x) + x = 100$$

$$x = 5$$

I. *A «ninguno de los dos habla francés»*

Ninguno hablará francés si los dos son de las zonas Ⓐ, Ⓒ y Ⓓ.

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{60,2}}{C_{100,2}}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{p(A)} = \dfrac{\binom{60}{2}}{\binom{100}{2}}}$

II. *B «los dos congresistas hablan castellano»*

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{51,2}}{C_{100,2}}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{p(B)} = \dfrac{\binom{51}{2}}{\binom{100}{2}}}$

III. *C «los dos congresistas se entienden sólo en castellano»*

Se entienden sólo en castellano si los dos son de la zona Ⓒ, o si uno es de la Ⓒ y el otro de la Ⓓ, o si uno es de la Ⓒ y el otro de la Ⓕ, o si uno es de la Ⓒ y el otro de la Ⓖ.

$$p(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{31,2} + C_{31,1} \cdot C_{8,1} + C_{31,1} \cdot C_{7,1} + C_{31,1} \cdot C_{5,1}}{C_{100,2}}$$

SOLUCIÓN III: $\boxed{\mathbf{p(C)} = \dfrac{\binom{31}{2} + \binom{31}{1}\binom{8}{1} + \binom{31}{1}\binom{7}{1} + \binom{31}{1}\binom{5}{1}}{\binom{100}{2}}}$

IV. *D «los dos congresistas hablan un solo idioma»*

Hablarán un solo idioma si son de las zonas Ⓐ, Ⓑ o Ⓒ.

$$p(D) = \frac{C_{74,2}}{C_{100,2}}$$

SOLUCIÓN IV: $\boxed{\mathbf{p(D)} = \dfrac{\binom{74}{2}}{\binom{100}{2}}}$

V. *E «los dos congresistas hablan los tres idiomas»*

$$p(E) = \frac{C_{5,2}}{C_{100,2}}$$

SOLUCIÓN V: $\boxed{\mathbf{p(E)} = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{100}{2}}}$

31. RESOLUCIÓN

Todos los puntos del dado suman 21, la probabilidad que le corresponde a cada unidad es, por tanto, y de acuerdo con el enunciado, $\frac{1}{21}$.

A «sacar número par al lanzar el dado»

A_1 «sacar un dos»

A_2 «sacar un cuatro»

A_3 «sacar un seis»

$$p(A_1) = \frac{2}{21} \;;\; p(A_2) = \frac{4}{21} \;;\; p(A_3) = \frac{6}{21}$$

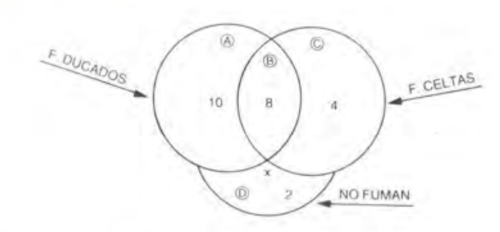
$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$$

$$p(A) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{p(A)} = \dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{21}}}$

32. RESOLUCIÓN



$$10 + 8 + 4 + x = 24 \Rightarrow x = 2$$

I. *A «los tres alumnos fuman»*

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{22,3}}{C_{24,3}}$$

SOLUCIÓN I: $\boxed{\mathbf{p(A)} = \dfrac{\binom{22}{3}}{\binom{24}{3}}}$

II. *B «dos de los tres alumnos fuman Ducados»*

Para que ocurra este suceso dos alumnos han de ser de las zonas Ⓐ y Ⓑ, el otro de la Ⓒ o Ⓓ.

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{18,2} \cdot C_{6,1}}{C_{24,3}}$$

SOLUCIÓN II: $\boxed{\mathbf{p(B)} = \dfrac{\binom{18}{2}\binom{6}{1}}{\binom{24}{3}}}$

33. RESOLUCIÓN

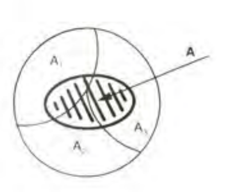
A «entre cinco piezas elegidas al azar hay alguna defectuosa»

$$p(\bar{A}) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{775,5}}{C_{800,5}} = \frac{\binom{775}{5}}{\binom{800}{5}}$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{775}{5}}{\binom{800}{5}}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{p(A)} = \mathbf{1} - \dfrac{\binom{775}{5}}{\binom{800}{5}}}$

34. RESOLUCIÓN



A_1 «extraer una bola de la primera urna»

A_2 «extraer una bola de la segunda urna»

A_3 «extraer una bola de la tercera urna»

A «extraer una bola negra»

Al ser las tres urnas iguales:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(A/A_1) = \frac{4}{7}\ ;\ p(A/A_2) = \frac{5}{5} = 1\ ;\ p(A/A_3) = \frac{3}{5}$$

I. *Cálculo de la p (A) (probabilidad total)*

$$p(A) = p(A/A_1)\,p(A_1) + p(A/A_2)\,p(A_2) + p(A/A_3)\,p(A_3)$$

$$p(A) = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN I: **p (A) = 0,724**

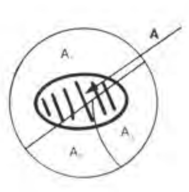
II. *Cálculo de la p (A_2/A) (Bayes)*

$$p(A_2/A) = \frac{p(A/A_2)\cdot p(A_2)}{p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2) + p(A/A_3)\cdot p(A_3)}$$

$$p(A_2/A) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}$$

SOLUCIÓN II: **p (A_2/A) = 0,760**

35. RESOLUCIÓN



A_1 *«el enfermo ingresa con bronquitis»*
A_2 *«el enfermo ingresa con neumonía»*
A_3 *«el enfermo ingresa con gripe»*

A «el enfermo cura»
Tenemos que calcular (A_1/A) (Bayes)

$$p(A_1/A) = \frac{p(A/A_1)\cdot p(A_1)}{p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2) + p(A/A_3)\cdot p(A_3)}$$

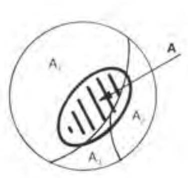
$p(A_1) = 0{,}5 \quad p(A_2) = 0{,}3 \quad p(A_3) = 0{,}2$

$p(A/A_1) = 0{,}7 \quad p(A/A_2) = 0{,}8 \quad p(A/A_3) = 0{,}9$

$$p(A_1/A) = \frac{0{,}7\cdot 0{,}5}{0{,}7\cdot 0{,}5 + 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}9\cdot 0{,}2}$$

SOLUCIÓN: **p (A_1/A) = 0,48**

36. RESOLUCIÓN



A_1 *«tienen cólera»*
A_2 *«tienen intoxicación»*
A_3 *«no tienen nada serio»*
A «tienen diarrea»

$p(A_1) = 0{,}02 \quad p(A_2) = 0{,}005 \quad p(A_3) = 0{,}975$

$p(A/A_1) = 0{,}99 \quad p(A/A_2) = 0{,}5 \quad p(A/A_3) = 0{,}004$

I. *Cálculo de la p (A) (probabilidad total)*

$$p(A) = p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2) + p(A/A_3)\cdot p(A_3)$$
$$p(A) = 0{,}99\cdot 0{,}02 + 0{,}5\cdot 0{,}005 + 0{,}004\cdot 0{,}975$$

SOLUCIÓN: **p (A) = 0,0262**

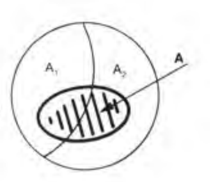
II. *Cálculo de la p (A_1/A) (Bayes)*

$$p(A_1/A) = \frac{p(A/A_1)\cdot p(A_1)}{p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2) + p(A/A_3)\cdot p(A_3)}$$

$$p(A_1/A) = \frac{0{,}99\cdot 0{,}002}{0{,}99\cdot 0{,}02 + 0{,}5\cdot 0{,}005 + 0{,}004\cdot 0{,}995}$$

SOLUCIÓN: **p (A_1/A) = 0,755**

37. RESOLUCIÓN



A_1 *«el artículo proviene de la primera fábrica»*
A_2 *«el artículo proviene de la segunda fábrica»*
A «el artículo es defectuoso»

$p(A_1) = 0{,}7 \quad p(A_2) = 0{,}3$
$p(A/A_1) = 0{,}004 \quad p(A/A_2) = 0{,}008$

I. *Cálculo de la p (A_2/A) (Bayes)*

$$p(A_2/A) = \frac{p(A/A_2)\cdot p(A_2)}{p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2)}$$

$$p(A_2/A) = \frac{0{,}008\cdot 0{,}3}{0{,}004\cdot 0{,}7 + 0{,}008\cdot 0{,}3}$$

SOLUCIÓN I: **p (A_2/A) = 0,461**

II. *Cálculo de la p (A) (probabilidad total)*

$$p(A) = p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2)$$

$$p(A) = 0{,}004\cdot 0{,}7 + 0{,}008\cdot 0{,}3$$

SOLUCIÓN II: **p (A) = 0,0052**

III. *B «entre 5 artículos servidos por la fábrica A_1 hay alguno defectuoso». B_1, B_2, ..., B_5 «son defectuosos el primero, segundo, ..., quinto, respectivamente.*

Se verifica:

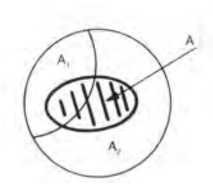
$$p(B_1) = p(B_2) = ... = p(B_5) = 0{,}004$$
$$p(\overline{B}_1) = p(\overline{B}_2) = ... = p(\overline{B}_5) = 0{,}996$$
$$\overline{B} = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap ... \cap \overline{B}_5$$

y, por tanto:

$$p(\overline{B}) = p(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap ... \cap \overline{B}_5) = p(\overline{B}_1)\cdot p(\overline{B}_2)\cdot ... \cdot p(\overline{B}_5)$$
$$p(\overline{B}) = 0{,}996\cdot 0{,}996\cdot ... \cdot 0{,}996 = 0{,}996^5$$
$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - 0{,}996^5$$

SOLUCIÓN III: **p (B) = 1 − $0{,}996^5$**

38. RESOLUCIÓN



A_1 *«el animal es macho»*
A_2 *«el animal es hembra»*
A «el animal está enfermo»

$p(A_1) = \frac{1}{3} \quad p(A_2) = \frac{2}{3}$

$p(A/A_1) = 0{,}1 \quad p(A/A_2) = 0{,}18$

I. *Cálculo de la p (A) (probabilidad total)*

$$p(A) = p(A/A_1)\cdot p(A_1) + p(A/A_2)\cdot p(A_2)$$

$$p(A) = 0{,}1\cdot\frac{1}{3} + 0{,}18\cdot\frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN I: **p (A) = 0,153**

II. *Cálculo de la* $p\left({}^{A_1}/_{A}\right)$ *(Bayes)*

$$p\left({}^{A_1}/_{A}\right) = \frac{p\left({}^{A}/_{A_1}\right) \cdot p(A_1)}{p\left({}^{A}/_{A_1}\right) \cdot p(A_1) + p\left({}^{A}/_{A_2}\right) \cdot p(A_2)}$$

$$p\left({}^{A_1}/_{A}\right) = \frac{0{,}1 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}1 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}18 \cdot \frac{2}{3}}$$

SOLUCIÓN II: **$p\left({}^{A_1}/_{A}\right) = 0{,}217$**

39. RESOLUCIÓN

I.

	NO REPITEN	REPITEN	TOTAL
ALUMNOS	15	10	**25**
ALUMNAS	**25**	**5**	30
ESTUDIANTES	**40**	15	**(55)**

II. *A «ser alumno un estudiante elegido al azar»*

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$

SOLUCIÓN II: **$p(A) = \frac{5}{11}$**

III. *B «ser alumna y repetidora un estudiante elegido al azar»*

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$$

SOLUCIÓN III: **$p(B) = \frac{1}{11}$**

IV. *C «ser no repetidores dos estudiantes elegidos al azar»*

$$p(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{C_{40,2}}{C_{55,2}}$$

SOLUCIÓN IV: **$p(C) = \frac{\binom{40}{2}}{\binom{55}{2}}$**

40. RESOLUCIÓN

A «aprobar matemáticas un alumno»
B «aprobar lengua»
C «aprobar matemáticas y lengua»

$$p(A) = 0{,}6 \qquad p(B) = 0{,}5 \qquad p(C) = 0{,}2$$

I. *D «aprobar al menos una de las dos»*

$$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(D) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$$

SOLUCIÓN I: **$p(D) = 0{,}9$**

II. *E «no aprobar ninguna de las dos»*

$$p(E) = p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

SOLUCIÓN II: **$p(E) = 0{,}1$**

III. *F «aprobar matemáticas y no lengua»*

$$F = A \cap \overline{B}$$

Puesto que $B \cup \overline{B}$ es el suceso seguro, podemos escribir:

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

y como $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son incompatibles:

$$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$
$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$$

SOLUCIÓN III: **$p(F) = 0{,}4$**

41. RESOLUCIÓN

I. *A_1 «acertar el primer artillero»*
A_2 «acertar el segundo artillero»
A_3 «acertar el tercer artillero»
A «acertar alguno de los tres»

$$p(A_1) = \frac{2}{3} \qquad p(A_2) = \frac{3}{4} \qquad p(A_3) = \frac{5}{6}$$

$$p(\overline{A}_1) = \frac{1}{3} \qquad p(\overline{A}_2) = \frac{1}{4} \qquad p(\overline{A}_3) = \frac{1}{6}$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$$

$$p(\overline{A}) = p(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(\overline{A}_3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{72} = \frac{71}{72}$$

SOLUCIÓN I: **$p(A) = \frac{71}{72}$**

II. *B «acertar sólo el segundo artillero»*

$$B = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$$

$$p(B) = p(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = p(\overline{A}_1) \cdot p(A_2) \cdot p(\overline{A}_3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

SOLUCIÓN II: **$p(B) = \frac{1}{24}$**

42. RESOLUCIÓN

El espacio muestral es:

S = {cccc, ccc +, cc + c, c + cc, + ccc, cc + +, c + c +,
+ cc +, c + + c, + c + c, + + cc, c + + +, + c + +, + + c + ,
+ + + c, + + + +}

I. *A «obtener como mínimo dos caras»*

$$p(A) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{11}{16}$$

SOLUCIÓN I: **$p(A) = \frac{11}{16}$**

II. *B «obtener tres cruces»*

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN II: **$p(B) = \frac{1}{4}$**

III. *C «obtener dos cruces en los dos últimos lanzamientos»*

$$p(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(C) = \frac{1}{4}}$

43. RESOLUCIÓN

A «sacar 3 doses en los 8 lanzamientos»

PREPARACIÓN

Sean:

B «sacar 3 doses en los 3 primeros lanzamientos y no sacar ningún dos en los otros 5»

$B_1, B_2, ..., B_8$ «sacar dos en el primero, segundo, ... octavo lanzamiento, respectivamente»

$$p(B_1) = p(B_2) = ... = p(B_8) = \frac{1}{6}$$

$$p(\bar{B}_1) = p(\bar{B}_2) = ... = p(\bar{B}_8) = \frac{5}{6}$$

$$B = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \bar{B}_4 \cap \bar{B}_5 \cap \bar{B}_6 \cap \bar{B}_7 \cap \bar{B}_8$$

$$p(B) = p(B_1 \cap ... \cap \bar{B}_8) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Consideremos ahora el:

C «sacar dos en el primero, segundo y sexto lanzamiento y no sacar dos en ninguno de los otros 5»

$$C = B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4 \cap \bar{B}_5 \cap B_6 \cap \bar{B}_7 \cap \bar{B}_8$$

de donde se sigue que:

$$p(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Sólo nos falta determinar cuantos sucesos como el B o C componen el A. Evidentemente, tantos como formas distintas tenemos de colocar 3 doses en 8 lugares: $C_{8,3}$. Así pues:

$$p(A) = C_{8,3}\, p(B) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5}$

44. RESOLUCIÓN

A «encontrar dos piezas defectuosas entre 10 elegidas al azar»

PREPARACIÓN

Sean:

B «salir defectuosas las dos primeras y buenas las ocho restantes»

$B_1, B_2, ..., B_{10}$ «salir defectuosas la primera, segunda, ..., décima pieza»

$$p(B_1) = p(B_2) = ... = p(B_{10}) = 0{,}3$$
$$p(\bar{B}_1) = p(\bar{B}_2) = ... = p(\bar{B}_{10}) = 0{,}7$$

$$B = B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4 \cap ... \cap \bar{B}_{10}$$
$$p(B) = p(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3 \cap ... \cap \bar{B}_{10}) = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$$

Consideremos que el suceso A se compone de $C_{10,2}$ sucesos similares al B (ver el ejercicio anterior). Por tanto:

$$p(A) = C_{10,2}\, p(B) = \binom{10}{2}\, 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{10}{2} 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8}$

45. RESOLUCIÓN

A «sacar más de 4 puntos en 5 ocasiones en los 12 lanzamientos»

PREPARACIÓN

Sean:

B «sacar más de 4 puntos en los 5 primeros lanzamientos y no sacar más de 4 en los 7 restantes»

$B_1, B_2, ..., B_{12}$ «sacar más de 4 puntos en el primero, segundo, ... decimosegundo lanzamiento»

$$p(B_1) = p(B_2) = ... = p(B_{12}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(\bar{B}_1) = p(\bar{B}_2) = ... = p(\bar{B}_{12}) = \frac{2}{3}$$

$$B = B_1 \cap ... \cap B_5 \cap \bar{B}_6 \cap ... \cap \bar{B}_{12}$$

$$p(B) = p(B_1 \cap ... \cap B_5 \cap \bar{B}_6 \cap ... \cap \bar{B}_{12}) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

$$p(A) = C_{12,5}\, p(B) = \binom{12}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{12}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^7}$

46. RESOLUCIÓN

A «sacar 7 cruces al lanzar 10 veces una moneda»

PREPARACION

Sean:

B «sacar 7 cruces en los 7 primeros lanzamientos y ninguna en los 3 restantes»

$B_1, B_2, ..., B_{10}$ «sacar cruz en el primero, segundo, ... décimo lanzamiento»

$$p(B_1) = p(B_2) = ... = p(B_{10}) = \frac{1}{2}$$

$$p(\bar{B}_1) = p(\bar{B}_2) = ... = p(\bar{B}_{10}) = \frac{1}{2}$$

$$B = B_1 \cap ... \cap B_7 \cap \bar{B}_8 \cap ... \cap \bar{B}_{10}$$

$$p(B) = p(B_1 \cap ... \cap B_7 \cap \bar{B}_8 \cap ... \cap \bar{B}_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$p(A) = C_{10,7}\, p(B) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(A) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3}$

47. RESOLUCIÓN

A «no encontrar piezas defectuosas entre 10 elegidas al azar»

$A_1, A_2, ..., A_{10}$ «ser defectuosa la primera, segunda, ..., décima pieza»

$$p(A_1) = p(A_2) = ... = p(A_{10}) = 0{,}3$$
$$p(\bar{A}_1 = p(\bar{A}_2) = ... = p(\bar{A}_{10}) = 0{,}7$$
$$A = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_{10}$$
$$p(A) = p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_{10}) = 0{,}7^{10}$$

B «encontrar una pieza defectuosa entre 10 elegidas al azar»

$$p(B) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9$$ (ver problema **45**)

C «encontrar al menos dos piezas defectuosas entre 10 elegidas al azar»

$$\bar{C} = A \cup B$$

$$p(\bar{C}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p\,(A \cup B)$$

$$p(\overline{C}) = 0{,}7^{10} + \binom{10}{1} 0{,}3 \cdot 0{,}7^{9}$$

$$p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - [0{,}7^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{9}]$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{p(C) = 1 - \left[0{,}7^{10} + \binom{10}{1} 0{,}3 \cdot 0{,}7^{9}\right]}$

48. RESOLUCIÓN

I. PRIMER PROCEDIMIENTO

Llamemos X, Y, Z a las tres llaves y supongamos que la que abre es la Z.

$$S = \{XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX\}$$

B «abrir al tercer intento usando el primer método»

$$p(B) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN I: $\mathbf{p(B) = \frac{1}{3}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

B_1, B_2, B_3 «abrir al primer, segundo, tercer intento, usando el método primero»

$$p(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3) = p(B_3/\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) \cdot p(\overline{B}_2/\overline{B}_1) \cdot p(\overline{B}_1)$$

$$p(\overline{B}_1) = \frac{2}{3} \; ; \; p(\overline{B}_2/\overline{B}_1) = \frac{1}{2} \; ; \; p(B_3/\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = 1$$

$$p(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3) = \frac{1}{3}}$

II. PRIMER PROCEDIMIENTO

Llamemos X, Y, Z a las tres llaves y supongamos que la que abre es la Z.

$S = \{XXX, XXY, XXZ, XYY, XZZ, XYZ, XZY, XYX, XZX,$
$YYY, YYX, YYZ, YXX, YZZ, YXZ, YZX, YXY, YZY,$
$ZZZ, ZZX, ZZY, ZXX\ ZYY, ZXY, ZYX, ZXZ, ZYZ\}$

C «abrir al tercer intento usando el segundo método»

$$p(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{4}{27}$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(C) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{4}{27}}$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

C_1, C_2, C_3 «abrir al primer, segundo, tercer intento, usando el segundo método»

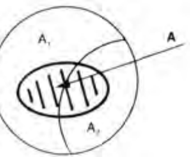
$$p(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) = p(\overline{C}_1) \cdot p(\overline{C}_2) \cdot p(C_3)$$

puesto que $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, C_3 son independientes.

$$p(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) = \frac{4}{27}}$

III. *Cálculo de la probabilidad de que esté borracho sabiendo que fracasó en los dos primeros intentos.*



A_1 «usa el primer método»
A_2 «usa el segundo método»
A «fracasó dos veces»

$$p(A_1) = \frac{2}{3} \qquad p(A_2) = \frac{1}{3}$$

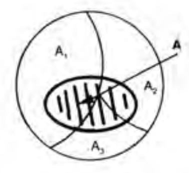
$$p(A/A_1) = \frac{1}{3} \qquad p(A/A_2) = \frac{4}{9}$$

$$p(A_2/A) = \frac{p(A/A_2) \cdot p(A_2)}{p(A/A_1) \cdot p(A_1) + p(A/A_2) \cdot p(A_2)}$$

$$p(A_2/A) = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}$$

SOLUCIÓN III: $\mathbf{p(A_2/A) = \frac{2}{5}}$

49. RESOLUCIÓN



I. *A_1 «ser opositor»*
A_2 «ser concursante»
A_3 «ser enchufado»
A «alcanzar el puesto»

$$p(A_1) = 0{,}75 \quad p(A_2) = 0{,}2 \quad p(A_3) = 0{,}05$$

$$p(A/A_1) = 0{,}25 \quad p(A/A_2) = 0{,}78 \quad p(A/A_3) = 1$$

- *Cálculo de la $p(A_3/A)$*

$$p(A_3/A) = \frac{p(A/A_3) \cdot p(A_3)}{p(A/A_1) \cdot p(A_1) + p(A/A_2) \cdot p(A_2) + p(A/A_3) \cdot p(A_3)}$$

$$p(A_3/A) = \frac{1 \cdot 0{,}05}{0{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}78 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}05} = 0{,}127$$

Un 12,7 % de los jefes de escoba consiguieron el puesto por enchufe.

$$300 \cdot \frac{12{,}7}{100} = 38{,}1$$

SOLUCIÓN I: **Unos 38 jefes de escoba**

- *Cálculo de la $p(A_1/A)$*

$$p(A_1/A) = \frac{p(A/A_1) \cdot p(A_1)}{p(A/A_1) \cdot p(A_1) + p(A/A_2) \cdot p(A_2) + p(A/A_3) \cdot p(A_3)}$$

$$p(A_1/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}78 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}05} = 0{,}478$$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{p(A_1/A) = 0{,}478}$

Bloque 16

- Estudio local de una función
- Regla de L'Hôpital
- Aproximación local de una función
- Fórmula de Taylor y Mac-Laurin

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

Teorema de Rolle

Si una función $y = f(x)$ *cumple las siguientes condiciones:*

I. *Es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$.

II. *Es derivable en el intervalo abierto* (a, b).

III. *Toma valores iguales en los extremos del* (a, b), *es decir:* $f(a) = f(b)$.
Existe al menos un punto $c \in (a, b)$ *en el que* $f'(c) = 0$

Teorema del valor medio

Si una función $y = f(x)$ *cumple las siguientes condiciones:*

I. *Es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$.

II. *Es derivable en el intervalo abierto* (a, b).

Existe al menos un punto $c \in (a, b)$, $a < c < b$, *en el que se verifica:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema de Cauchy

Si dos funciones $F(x)$ *y* $f(x)$ cumplen las siguientes condiciones:

I. *Son continuas en el intervalo cerrado* $[a, b]$.

II. *Son derivables en el intervalo abierto* (a, b).

III. *Es* $f(b) \neq f(a)$.

IV. *No se anulan simultáneamente en punto alguno del intervalo abierto* (a, b).

Existe al menos un punto $c \in (a, b)$, $a < c < b$, *en el que se verifica:*

$$\frac{F(b) - F(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{F'(c)}{f'(c)}$$

Regla de L'Hôpital

I. *Si* $F(x)$ *y* $f(x)$ *son dos funciones que se anulan para* $x = a$, *y derivables en un entorno reducido de* a, *se verifica:*

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

II. *Si* $F(x)$ *y* $f(x)$ *son dos funciones que se hacen infinitas para* $x = a$, *y derivables en un entorno reducido de* a, *se verifica:*

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

III. *Si* $F(x)$ *y* $f(x)$ *son dos funciones tales que* $\lim_{x \to a} F(x) = \infty$ *y* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, *y son derivables en un entorno reducido de* a, *se verifica:*

$$\lim_{x \to a} [F(x) \cdot f(x)] = \infty \cdot 0 = \begin{cases} \lim_{x \to a} \dfrac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty} = \cdots \\ \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{F(x)}} = \dfrac{0}{0} = \cdots \end{cases}$$

IV. *Si* $F(x)$ *y* $f(x)$ *son dos funciones que se hacen infinitas para* $x = a$, *y son derivables en un entorno reducido de* a, *se verifica:*

$$\lim_{x \to a} [F(x) - f(x)] = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{x \to a} F(x) \cdot f(x) \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x)} \right] = \infty \cdot 0 = \cdots$$

V. *Si* $\lim_{x \to a} [F(x)]^{f(x)}$ *encaja en alguna de las formas* 0^0, ∞^0, 1^∞, *se verifica:*

$$\lim_{x \to a} [F(x)]^{f(x)} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\,A = \lim_{x \to a} [f(x) \cdot L\,F(x)] = 0 \cdot \infty = \cdots = l$$

$$L\,A = l \Rightarrow \lim_{x \to a} [F(x)]^{f(x)} = e^l$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar si es aplicable el teorema de Rolle a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 - x & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: **En ningún caso le es aplicable el teorema de Rolle a la función**

2. Determinar si es aplicable el teorema de Rolle a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en el $I = [-1, 1]$

SOLUCIÓN: **No es aplicable el teorema de Rolle a la función en el $[-1, 1]$**

3. Analizar la aplicabilidad del teorema de Rolle a la función $f(x) = 1 - |2x|$ en el $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN: **No es aplicable el teorema de Rolle a la función en el $[-1, 1]$**

4. Indicar si es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x \cos x$ en el $[0, \pi/2]$.

SOLUCIÓN: **A la función $f(x) = x \cos x$ le es aplicable el teorema de Rolle en el $[0, \pi/2]$**

5. Indicar todas las razones por las que no le es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ en el $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN: **No es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ en el $[0, \pi]$ porque no es continua en $x = \dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, y además no es derivable en el $x = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$**

6. Comprobar que a la función $f(x) = x^2 + 2x$ le es aplicable el teorema del valor medio en el $[1, 3]$ y encontrar los puntos en los que se cumple el teorema.

SOLUCIÓN: **$x = \dfrac{3}{2}$ es el punto perteneciente al $[1, 3]$ en el que se verifica el teorema**

7. Averiguar si es aplicable el teorema del valor medio a la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ en el $[0, \pi]$, y, en caso afirmativo, encontrar los puntos del $(0, \pi)$ en los que se verifica.

SOLUCIÓN: **$x = \dfrac{\pi}{2}$ es el punto perteneciente al $(0, \pi)$ en el que se verifica el teorema**

8. Averiguar si es aplicable el teorema de Cauchy a las funciones $F(x) = x^2 - 2x + 3$ y $f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en el $[1, 4]$, y, en caso afirmativo, encontrar los puntos del $[1, 4]$ en los que se verifica.

SOLUCIÓN: **$x = 2 \in [1, 4]$ es el punto en el que se verifica el teorema**

9. Analizar si es aplicable el teorema de Cauchy a las funciones $F(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ en el $[0, \pi/2]$, y, en caso afirmativo, encontrar los puntos del $[0, \pi/2]$ en los que se verifica.

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$ **es el punto en el que se verifica el teorema**

10. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{12x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{12x} = \frac{1}{2}}$

11. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{1 - \text{sen } x + \cos x}{\text{sen } 2x - \cos x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{1 - \text{sen } x + \cos x}{\text{sen } 2x - \cos x} = 1}$

12. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{5\,x^2}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{5x^2} = 0}$

13. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{L sen } x}{\text{L } x^2}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{L sen } x}{\text{L } x^2} = \frac{1}{2}}$

14. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} [2x \text{ L } 3x]$.

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} [2x \text{ L } 3x] = 0}$

15. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{6x} - \frac{1}{3 \text{ sen } x}\right]$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{6x} - \frac{1}{3 \text{ sen } x}\right] = -\infty}$

16. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} (\text{tg } 5x)^{3x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} [\text{tg } 5x]^{3x} = 1}$

17. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/6} \frac{(x - \pi/6)^2}{3 \text{ sen } 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2}}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/6} \frac{(x - \pi/6)^2}{3 \text{ sen } 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 0}$

18. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{3x - \text{sen } 3x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{3x - \text{sen } 3x} = \frac{2}{27}}$

19. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\pi - 2x) \text{ tg } x$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/2} (\pi - 2x) \text{ tg } x = 2}$

20. Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} [x^2 - 3x + 1]^{\frac{1}{x^2 + 2x - 3}}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} [x^2 - 3x + 1]^{\frac{1}{x^2 + 2x - 3}} = 1}$

21. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/3} \frac{(x - \pi/3)^2}{2\cos x - 1}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/3} \frac{(x - \pi/3)^2}{2\cos x - 1} = 0}$

22. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{2x - \text{sen } 2x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{2x - \text{sen } 2x} = 16}$

23. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/3} (\pi - 3x) \text{ ctg } 3x$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/3} (\pi - 3x) \text{ ctg } 3x = -1}$

24. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} [\text{ctg } 2x]^{\text{sen } 2x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} [\text{ctg } 2x]^{\text{sen } 2x} = 1}$

25. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \text{tg } 2x\right)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \text{tg } 2x\right) = 0}$

26. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{2x}\right]^{\text{tg } x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{2x}\right]^{\text{tg } x} = 1}$

27. Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} [\text{tg } 3x]^{\cos 3x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} [\text{tg } 3x]^{\cos 3x} = 1}$

28. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\text{sen } 4x} - \text{ctg } 4x\right)$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\text{sen } 4x} - \text{ctg } 4x\right) = 0}$

29. Calcular $\lim\limits_{x \to k} \left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{\text{tg } \frac{\pi x}{2k}}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to k} \left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{\text{tg } \frac{\pi x}{2k}} = e^{6/\pi}}$

30. Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} (\text{L } x)^{\frac{1}{1 - \text{L } x}}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} (\text{L } x)^{\frac{1}{1 - \text{L } x}} = 1}$

31. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\text{L sen } \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\text{L sen } \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = -\frac{1}{8}}$

32. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/4} (1 - \text{ctg } x) \frac{4}{5 \cos 2x}$

SOLUCIÓN: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pi/4} (1 - \text{ctg } x) \frac{4}{5 \cos 2x} = -\frac{4}{5}}$

33. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = e^{-4/\pi}}$

34. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{\operatorname{sen} 2x}}{3x - \operatorname{sen} 3x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{\operatorname{sen} 2x}}{3x - \operatorname{sen} 3x} = \dfrac{8}{27}}$

35. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{5\left(1 - \cos \dfrac{x}{2}\right)}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{5\left(1 - \cos \dfrac{x}{2}\right)} = \dfrac{16}{5}}$

36. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos 2x)^{1/x^2}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos 2x)^{1/x^2} = \dfrac{1}{e^2}}$

37. Calcular $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(1 - \dfrac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 4^-} \left(1 - \dfrac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}} = 1}$

38. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{3x}\right)^{1/2x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{3x}\right)^{1/2x} = \infty}$

39. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \dfrac{1}{3}}$

40. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/2} [1 + 2 \cos x]^{1/\cos x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to \pi/2} [1 + 2 \cos x]^{1/\cos x} = e^2}$

41. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} = \dfrac{1}{6}}$

42. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x} = e^{\sqrt{2}/2}}$

43. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \, L(1 + x)}{1 - \cos x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \, L(1 + x)}{1 - \cos x} = 2}$

44. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left[\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{1/\operatorname{sen} x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left[\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{1/\operatorname{sen} x} = e^2}$

APROXIMACIÓN LOCAL DE UNA FUNCIÓN

Polinomio de Taylor

Si f(x) *es una función derivable* n *veces para* x = a, *el polinomio de aproximación, de grado* n, *de la función* f(x), *en el entorno* E *de* x = a, *es:*

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

llamado polinomio de Taylor de orden n, *de la función* f(x), *en el entorno* E *de* x = a.

Fórmula de Taylor con término complementario

Si f(x) *es una función derivable* n *veces para* x = a, *y existe la derivada de orden* n + 1 *en un entorno de* a, *es:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

El término $T_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1)}[a + \theta(x-a)]$ *se llama término complementario, éste, en concreto, es debido a Lagrange, por lo que la fórmula expuesta es la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange.*

NOTA: En este término $0 \leq \theta \leq 1$, por lo que $[a + \theta(x - a)] \in (a, x)$.

Fórmula de Mac-Laurin

En particular, si en la fórmula de Taylor hacemos a = 0, *obtenemos:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1)}(\theta x)$$

que se conoce con el nombre de fórmula de Mac-Laurin.

EJERCICIOS PROPUESTOS

45. Obtener el polinomio de Taylor de grado n, de la función $f(x) = e^{-x}$ en el entorno de $x = 0$.

SOLUCIÓN: $$P(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

46. Obtener el desarrollo de la función $f(x) = e^x$.

NOTA: Cuando no se especifica nada hemos de entender que se trata de desarrollar la función en el entorno de $x = 0$.

SOLUCIÓN: $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

47. Obtener el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \text{tg } x$, limitando el desarrollo al grado dos con el término complementario, en el entorno de $x = \pi/4$.

SOLUCIÓN: $$\text{tg } x = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + \frac{(x-\pi/4)^3}{6} \cdot \frac{2[1 + 2\,\text{sen}^2 \alpha]}{\cos^4 \alpha}$$ $$\alpha = \frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

48. Obtener el desarrollo de la función $f(x) = \cos x$, limitando el desarrollo al grado ocho, con el término complementario.

SOLUCIÓN: $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^9}{9!}\,\text{sen } \theta x$$

49. Obtener el desarrollo de la función $f(x) = \text{sen } x$, limitando el desarrollo al grado siete, con el término complementario.

SOLUCIÓN: $$\text{sen } x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\,\text{sen } \theta x$$

50. Obtener el desarrollo del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ en potencias del binomio $x - 2$.

SOLUCIÓN: $$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 1(x-2)^0 + 5(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$$

51. Obtener el desarrollo de la función logaritmo neperiano.

SOLUCIÓN: $$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

52. Desarrollar $f(x) = \text{sen } x$ en el entorno de $x = \pi/6$, limitando el desarrollo a los dos primeros términos y al término complementario.

SOLUCIÓN: $$\text{sen } x = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) + \frac{-(x-\pi/6)^2}{2}\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{6} + \theta\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

53. Desarrollar $f(x) = \cos x$ en el entorno de $x = \pi/4$, limitando el desarrollo a los dos primeros términos y al término complementario.

SOLUCIÓN: $$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{(x-\pi/4)^2}{2}\cos\left[\frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

54. Obtener el desarrollo de la función $f(x) = e^{-2x}$.

SOLUCIÓN: $$e^{-2x} = 1 + \frac{(-2)^1}{1!}x + \frac{(-2)^2}{2!}x^2 + \frac{(-2)^3}{3!}x^3 + \frac{(-2)^4}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(-2)^{n+1} e^{-2\theta x}$$

55. Desarrollar la función $y = x\,e^x$ por la fórmula de Mac-Laurin, escribiendo el término complementario correspondiente a la cuarta derivada.

SOLUCIÓN: $$x\,e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4!}(4 + \theta x)\,e^{\theta x}$$

56. Calcular el polinomio de Taylor para $x = 1$ de la función $y = x^3 - 3x^2$ (desarrollar el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2$ en potencias del binomio $x - 1$).

SOLUCIÓN: $$P(x) = -2(x-1)^0 - 3(x-1)^1 + 0(x-1)^2 + (x-1)^3$$

57. Calcular los tres primeros términos de la fórmula de Taylor de la función $y = x \cos x$ en el entorno de $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN: $$x\cos x = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{(x-\pi/2)^3}{6}[-3\cos\alpha + \alpha\,\text{sen}\,\alpha]$$ $$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

58. Aplicar la fórmula de Taylor al polinomio:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

en el punto $x = 2$ (desarrollar $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ en potencias de $x - 2$).

SOLUCIÓN: $$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0(x-2)^0 + 0(x-2)^1 + 0(x-2)^2 + (x-2)^3$$

59. Aplicar la fórmula de Taylor a la función $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en el punto $x = 0$ para $n = 3$ y hallar una cota superior k del último sumando si $x \in (0; 0{,}5)$.

SOLUCIÓN: $$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 - \frac{1}{81}x^3 + x^4\frac{1}{(\theta x + 3)^5}$$

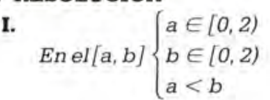
60. Calcular los tres primeros términos y el complementario de la fórmula de Mac-Laurin de la función $y = (x+3)\,e^{2x}$.

SOLUCIÓN: $$(x+3)\,e^{2x} = 3 + 7x + 8x^2 + \frac{x^3}{6}[8\theta x + 36]\,e^{2\theta x}$$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1. RESOLUCIÓN

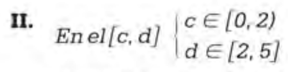
I.



$$\text{En el } [a, b] \begin{cases} a \in [0, 2) \\ b \in [0, 2) \\ a < b \end{cases}$$

No, en ningún caso se verifica f(a) = f(b).

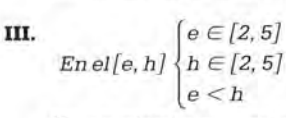
II.



$$\text{En el } [c, d] \begin{cases} c \in [0, 2) \\ d \in [2, 5] \end{cases}$$

No, es discontinua en x = 2.

III.



$$\text{En el } [e, h] \begin{cases} e \in [2, 5] \\ h \in [2, 5] \\ e < h \end{cases}$$

No, en ningún caso se verifica f(e) = f(h).

SOLUCIÓN: **En ningún caso le es aplicable el teorema de Rolle a la función**

2. RESOLUCIÓN

I. *Es continua en el [−1, 1].*

a) *Es continua en el [−1, 0) por su función polinómica.*

b) *Es continua en el x = 0 pues:*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 + 2x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - 2x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

c) *Es continua en el (0, 1] por ser una función polinómica.*

II. *Se verifica f(−1) = f(1) = −1.*

III. *No es derivable en x = 0.*

a) *Podemos ver en la gráfica que la función no tiene tangente en x = 0.*

b) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + 2x - 1}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 2x - 1}{x} = -2$$

SOLUCIÓN: **No es aplicable el teorema de Rolle a la función en el [−1, 1]**

3. RESOLUCIÓN

Como:

$$f(x) = 1 - |2x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

la resolución de este problema es idéntica a la del anterior.

SOLUCIÓN: **No es aplicable el teorema de Rolle a la función en el [−1, 1]**

4. RESOLUCIÓN

I. *La función f(x) = x cos x es continua en el [0, π/2], pues es el producto de dos funciones continuas en [0, π/2].*

II. *La función f(x) = x cos x es derivable en el (0, π/2), pues es el producto de dos funciones derivables en el (0, π/2).*

III. *Se verifica f(0) = f(π/2) = 0.*

SOLUCIÓN: **A la función f(x) = x cos x le es aplicable el teorema de Rolle en el [0, π/2]**

5. RESOLUCIÓN

I. *La función f(x) = tg x no es continua en x = π/2 ∈ [0, π]*

$$\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} \operatorname{tg} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \pi/2^+} f(x) = \lim_{x \to \pi/2^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

II. *La función f(x) = tg x no es derivable en x = π/2 ∈ (0, π), pues no es continua en dicho punto.*

III. *Se verifica f(0) = f(π) = 0.*

SOLUCIÓN: **No es aplicable el teorema de Rolle a la función f(x) = tg (x) en el [0, π] porque no es continua en $x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, y además no es derivable en el $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$**

6. RESOLUCIÓN

I. a) *La función $f(x) = x^2 + 2x$ es continua en el [1, 3], por ser una función polinómica.*

b) *La función $f(x) = x^2 + 2x$ es derivable en el (1, 3), por ser una función polinómica.*

A la función $f(x) = x^2 + 2x$ le es aplicable el teorema del valor medio en el [1, 3], pues verifica las dos hipótesis que requiere el teorema.

II. $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \; ; \; \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$$

$$\frac{15 - 3}{3 - 1} = f'(c) \Rightarrow f'(c) = 6$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(c) = 6 \\ f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(c) = 2c + 3 \\ 1 < c < 3 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN: **$x = \frac{3}{2}$ es el punto perteneciente al [1, 3] en el que se verifica el teorema**

7. RESOLUCIÓN

I. a) *La función f(x) = 2x + sen x es continua en el [0, π], pues es la suma de dos funciones continuas en el [0, π].*

b) *La función f(x) = 2x + sen x es derivable en el (0, π), pues es la suma de dos funciones derivables en el (0, π).*

A la función f(x) = 2x + sen x le es aplicable, por tanto, el teorema del valor medio en el [0, π], pues verifica las dos hipótesis que requiere el teorema.

II. $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \; ; \; \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = f'(c)$$

$$\frac{2\pi - 0}{\pi - 0} = f'(c) \Rightarrow f'(c) = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(c) = 2 \\ f'(x) = 2 + \cos x \Rightarrow f'(c) = 2 + \cos c \\ 0 < c < \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \cos c = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

SOLUCIÓN: **$x = \frac{\pi}{2}$ es el punto perteneciente al (0, π) en el que se verifica el teorema**

8. RESOLUCIÓN

I. a) *F(x) y f(x) son continuas en el [1, 4] por ser funciones polinómicas.*

b) *F(x) y f(x) son derivables en el (1, 4), por ser funciones polinómicas.*

c) *Es f(4) = 27 ≠ f(1) = 9.*

d) *$F'(x) = 2x - 2$ y $f'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ no se anulan simultáneamente en punto alguno del (1, 4).*

A las funciones F(x) y f(x) les es aplicable el teorema de Cauchy en el [1, 4], pues verifican las cuatro hipótesis que requiere el teorema.

II. $F'(x) = 2x - 2 \Rightarrow F'(c) = 2c - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 14x + 20 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 14c + 20$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{F(b)-F(a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{F'(c)}{f'(c)} \\ a < c < b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{11-2}{27-9} = \dfrac{2c-2}{3c^2-14c+20} \\ 1 < c < 4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}c^2 - 6c + 8 = 0 \\ 1 < c < 4\end{array}\right\} \Rightarrow c = 2$$

SOLUCIÓN: **x = 2 ∈ [1, 4] es el punto en el que se verifica el teorema**

9. RESOLUCIÓN

I. a) F(x) y f(x) son continuas en el [0, π/2] pues son continuas para todo $x \in \mathbf{R}$.

b) F(x) y f(x) son derivables en el (0, π/2), pues son derivables $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) Es $f(\pi/2) = 0 \neq f(0) = 1$.

d) $F'(x) = \cos x$ y $f'(x) = -\text{sen } x$ no se anulan simultáneamente en punto alguno del (0, π/2).

A las funciones F(x) y f(x) les es aplicable el teorema de Cauchy en el [0, π/2], pues verifican las cuatro hipótesis que impone el teorema.

II. $F'(x) = \cos x \Rightarrow F'(c) = \cos c$

$f'(x) = -\text{sen } x \Rightarrow f'(c) = -\text{sen } c$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{F(b)-F(a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{F'(c)}{f'(c)} \\ a < c < b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{1-0}{0-1} = \dfrac{\cos c}{-\text{sen } c} \\ 0 < c < \pi/2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{tg } c = 1 \\ 0 < c < \pi/2\end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$ **es el punto en el que se verifica el teorema**

10. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{12x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{6 \cos 6x}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{12x} = \frac{1}{2}$

11. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \text{sen } x + \cos x}{\text{sen } 2x - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cos x - \text{sen } x}{2 \cos 2x + \text{sen } x} =$$

$$= \frac{-1}{-2+1} = 1$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \text{sen } x + \cos x}{\text{sen } 2x - \cos x} = 1$

12. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{5x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \text{ sen } x - 2x}{10x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x - 2}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{5x^2} = 0$

13. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{L \text{ sen } x}{L\, x^2} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen } x}}{\dfrac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x}{2 \text{ sen } x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - x \text{ sen } x}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{L \text{ sen } x}{L\, x^2} = \frac{1}{2}$

14. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} [2x\, L\, 3x] = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{L\, 3x}{\dfrac{1}{2x}} =$$

$$= \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-2x) = 0$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} [2x\, L\, 3x] = 0$

15. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{6x} - \frac{1}{3 \text{ sen } x}\right] = \infty - \infty = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x - 2x}{6x \text{ sen } x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 2}{6 \text{ sen } x + 6x \cos x} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{6x} - \frac{1}{3 \text{ sen } x}\right] = -\infty$

16. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} (\text{tg } 5x)^{3x} = 0^0 = A$$

$$L\, A = \lim_{x \to 0^+} [3x \cdot L \text{ tg } 5x] = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{L \text{ tg } 5x}{\dfrac{1}{3x}} =$$

$$= \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{5 \sec^2 5x}{\text{tg } 5x}}{\dfrac{-1}{3x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-15x^2}{\text{sen } 5x \cos 5x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-30x}{5 \cos^2 5x - 5 \text{ sen}^2 5x} = \frac{0}{5} = 0$$

$$L\, A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} [\text{tg } 5x]^{3x} = 1$

17. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \pi/6} \frac{(x - \pi/6)^2}{3 \text{ sen } 2x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi/6} \frac{2\,(x - \pi/6)}{6 \cos 2x} = \frac{0}{3} = 0$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to \pi/6} \frac{(x - \pi/6)^2}{3 \text{ sen } 2x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}} = 0$

18. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{3x - \text{sen } 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3 - 3\cos 3x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{9 \text{ sen } 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{27 \cos 3x} = \frac{2}{27}$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{3x - \text{sen } x} = \frac{2}{27}$

19. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to \pi/2} (\pi - 2x)\cdot \operatorname{tg} x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\pi - 2x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\pi - 2x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-2}{-\operatorname{cosec}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{2}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{2}{1} = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to\pi/2} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x = 2}$

20. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to\infty} [x^2 - 3x + 1]^{\frac{1}{x^2+2x-3}} = \infty^0 = A$$

$$L\,A = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2+2x-3}\cdot L\,(x^2-3x+1)\right] = 0\cdot\infty =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{L\,(x^2-3x+1)}{x^2+2x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x-3}{x^2-3x+1}}{2x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2x^3+\cdots} = \cdots = 0$$

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to\infty} [x^2 - 3x + 1]^{\frac{1}{x^2+2x-3}} = 1}$

21. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{(x-\pi/3)^2}{2\cos x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi/3} \frac{2\,(x-\pi/3)}{-2\operatorname{sen} x} = \frac{0}{-\sqrt{3}} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to\pi/3} \frac{(x-\pi/3)^2}{2\cos x - 1} = 0}$

22. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{2x - \operatorname{sen} 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{4x} + 4e^{-4x} - 8}{2 - 2\cos 2x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16e^{4x} - 16e^{-4x}}{4\operatorname{sen} 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{64e^{4x} + 64e^{-4x}}{8\cos 2x} =$$

$$= \frac{128}{8} = 16$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{2x - \operatorname{sen} 2x} = 16}$

23. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to\pi/3} (\pi - 3x)\operatorname{ctg} 3x = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\pi - 3x}{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/3} \frac{\pi - 3x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi/3} \frac{-3}{3\sec^2 3x} = \frac{-3}{3} = -1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to\pi/3} (\pi - 3x)\operatorname{ctg} 3x = -1}$

24. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+} [\operatorname{ctg} 2x]^{\operatorname{sen} 2x} = \infty^0 = A$$

$$L\,A = \lim_{x\to 0^+} [\operatorname{sen} 2x\cdot L\operatorname{ctg} 2x] = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{L\operatorname{ctg} 2x}{\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{L\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{cosec} 2x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2\operatorname{cosec}^2 2x}{\operatorname{ctg} 2x}}{-2\operatorname{cosec} 2x\operatorname{ctg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} [\operatorname{ctg} 2x]^{\operatorname{sen} 2x} = 1}$

25. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\pi/4} \frac{1 - \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{-2\cos 2x}{-2\operatorname{sen} 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x\right) = 0}$

26. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2x}\right]^{\operatorname{tg} x} = \infty^0 = A$$

$$L\,A = \lim_{x\to 0^+}\left[\operatorname{tg} x\cdot L\,\frac{1}{2x}\right] = \lim_{x\to 0^+} [\operatorname{tg} x\,(L\,1 - L\,2x)] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [\operatorname{tg} x\cdot(-L\,2x)] = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{-L\,2x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-L\,2x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2x}\right]^{\operatorname{tg} x} = 1}$

27. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} [\operatorname{tg} 3x]^{\cos 3x} = \infty^0 = A$$

$$L\,A = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} [\cos 3x\, L\operatorname{tg} 3x] = 0\cdot\infty = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{L\operatorname{tg} 3x}{\frac{1}{\cos 3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{L\operatorname{tg} 3x}{\sec 3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{3\sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x}}{3\sec 3x\operatorname{tg} 3x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} [\operatorname{tg} 3x]^{\cos 3x} = 1}$

28. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 4x} - \operatorname{ctg} 4x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{sen} 4x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{sen} 4x}{4\cos 4x} = \frac{0}{1} = 0$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 4x} - \operatorname{ctg} 4x\right) = 0}$

29. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x\to k}\left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2k}} = 1^\infty = A$$

$$L\,A = \lim_{x\to k}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2k}\cdot L\left(4 - \frac{3x}{k}\right)\right] = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to k} \frac{L\left(4 - \frac{3x}{k}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2k}}} =$$

$$= \lim_{x\to k} \frac{L\left(4 - \frac{3x}{k}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2k}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to k} \frac{-\frac{1}{4 - \frac{3x}{4k}}\cdot\frac{3}{k}}{-\frac{\pi}{2k}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2k}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{k}}{\frac{\pi}{2k}} = \frac{6}{\pi}$$

$$L\,A = \frac{6}{\pi} \Rightarrow A = e^{6/\pi}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to k} \left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{tg \frac{\pi x}{2k}} = e^{6/\pi}}$

30. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \infty} (L\,x)^{\frac{1}{1 - L\,x}} = \infty^0 = A$$

$$L\,A = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{1}{1 - L\,x} L\,(L\,x)\right] = 0 \cdot \infty =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{L\,(L\,x)}{1 - L\,x} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{Lx} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{L\,x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to \infty} (L\,x)^{\frac{1}{1 - L\,x}} = 1}$

31. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \pi} \frac{L\,sen\,\frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{cos\,x/2}{sen\,x/2}}{2\,(x - \pi)} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{cos\,\frac{x}{2}}{4\,(x - \pi)\,sen\,\frac{x}{2}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{-\frac{1}{2}\,sen\,\frac{x}{2}}{4\left[sen\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,(x - \pi)\,cos\,\frac{x}{2}\right]} = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{-1}{8}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to \pi} \frac{L\,sen\,\frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = -\frac{1}{8}}$

32. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \pi/4} (1 - ctg\,x)\,\frac{4}{5\,cos\,2x} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to \pi/4} \frac{4\,(1 - ctg\,x)}{5\,cos\,2x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{4\,cosec^2\,x}{-10\,sen\,2x} = \frac{8}{-10} = -\frac{4}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to \pi/4} (1 - ctg\,x)\,\frac{4}{5\,cos\,2x} = -\frac{4}{5}}$

33. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{ctg\,\frac{\pi x}{2}} = 1^\infty = A$$

$$L\,A = \lim_{x \to 0} \left[ctg\,\frac{\pi x}{2} \cdot L\,(1 - 2x)\right] = \infty \cdot 0 =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{L\,(1 - 2x)}{\frac{1}{ctg\,\frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{L\,(1 - 2x)}{tg\,\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2}{1 - 2x}}{\frac{\pi}{2}\,sec^2\,\frac{\pi x}{2}} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-4}{\pi}$$

$$L\,A = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow A = e^{-4/\pi}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{ctg\,\frac{\pi x}{2}} = e^{-4/\pi}}$

34. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{sen\,2x}}{3x - sen\,3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - 2\,cos\,2x\,e^{sen\,2x}}{3 - 3\,cos\,3x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{4e^{2x} + 4\,sen\,2x\,e^{sen\,2x} - 4\,cos^2\,2x\,e^{sen\,2x}}{9\,sen\,3x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8e^{2x} + 8\,cos\,2x\,e^{sen\,2x} + 8\,sen\,2x\,cos\,2x\,e^{sen\,2x}}{27\,cos\,3x} +$$

$$+ \frac{16\,cos\,2x\,sen\,2x\,e^{sen\,2x} - 8\,cos^3\,2x\,e^{sen\,2x}}{27\,cos\,3x} = \frac{8}{27}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{sen\,2x}}{3x - sen\,3x} = \frac{8}{27}}$

35. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{5\left(1 - cos\,\frac{x}{2}\right)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{4x\;e^{2x^2}}{\frac{5}{2}\,sen\,\frac{x}{2}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\,e^{2x^2} + 16x^2\,e^{2x^2}}{\frac{5}{4}\,cos\,\frac{x}{2}} = \frac{4}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{5}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{5\left(1 - cos\,\frac{x}{2}\right)} = \frac{16}{5}}$

36. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} (cos\,2x)^{1/x^2} = 1^\infty = A$$

$$L\,A = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x^2}\,L\,cos\,2x\right] = \infty \cdot 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{L\,cos\,2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-2\,sen\,2x}{cos\,2x}}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\,sen\,2x}{2x\,cos\,2x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-4\,cos\,2x}{2\,cos\,2x - 4x\,sen\,2x} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$L\,A = -2 \Rightarrow A = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0^+} (cos\,2x)^{1/x^2} = \frac{1}{e^2}}$

37. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 4} \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{tg\,\frac{\pi x}{4}} = 0^0 = A$$

$$L\,A = \lim_{x \to 4} \left[tg\,\frac{\pi x}{4}\,L\left(1 - \frac{x}{4}\right)\right] = 0 \cdot (-\infty) =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{L\left(1 - \frac{x}{4}\right)}{\frac{1}{tg\,\frac{\pi x}{4}}} = \lim_{x \to 4} \frac{L\left(1 - \frac{x}{4}\right)}{ctg\,\frac{\pi x}{4}} = \frac{-\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{1 - x/4} \cdot \frac{-1}{4}}{-\frac{\pi}{4}\,cosec^2\,\frac{\pi x}{4}} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{4 - x}}{\frac{\pi}{4\,sen^2\,\frac{\pi x}{4}}} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{4\,sen^2\,\frac{\pi x}{4}}{\pi\,(4 - x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 4} \frac{2\pi\,sen\,\frac{\pi x}{4}\,cos\,\frac{\pi x}{4}}{-\pi} =$$

$$= \frac{0}{-\pi} = 0$$

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 4^-} \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{tg\,\frac{\pi x}{4}} = 1}$

38. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{tg\ 5x}{3x}\right)^{1/2x} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\infty} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ 5x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{5\ sec^2\ 5x}{3} = \frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\mathbf{tg\ 5x}}{\mathbf{3x}}\right)^{1/2x} = \infty}$

39. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - sen\ x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\ sen\ x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{x \cos x - sen\ x}}{\mathbf{x^3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$

40. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \pi/2} [1 + 2 \cos x]^{1/\cos x} = 1^{\infty} = A$$

$$L\ A = \lim_{x \to \pi/2} \left[\frac{1}{\cos x} \cdot L\ (1 + 2 \cos x)\right] = \infty \cdot 0 =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{L\ (1 + 2\cos x)}{\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{-2\ sen\ x}{1 + 2 \cos x}}{-sen\ x} =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{2}{1 + 2 \cos x} = 2$$

$$L\ A = 2 \Rightarrow A = e^2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to \pi/2} [\mathbf{1 + 2 \cos x}]^{1/\cos x} = \mathbf{e^2}}$

41. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{sen\ x}}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x\ e^{sen\ x}}{3x^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + sen\ x\ e^{sen\ x} - \cos^2 x\ e^{sen\ x}}{6x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + cosxe^{sen\ x} + senxcosxe^{sen\ x} + 2cosxsenxe^{sen\ x} - cos^3xe^{senx}}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{e^x - e^{sen\ x}}}{\mathbf{x^3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}$

42. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{e^{sen\ x} - e^{\cos x}}{sen\ x - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\cos x\ e^{sen\ x} + sen\ x\ e^{\cos x}}{\cos x + sen\ x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}/2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\ e^{\sqrt{2}/2}}{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}/2}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to \pi/4} \frac{\mathbf{e^{sen\ x} - e^{\cos x}}}{\mathbf{sen\ x - \cos x}} = \mathbf{e^{\sqrt{2}/2}}}$

43. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\ L\ (1 + x)}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{L\ (1 + x) + \frac{x}{1 + x}}{sen\ x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)\ L\ (1 + x) + x}{(1 + x)\ sen\ x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{L\ (1 + x) + 1 + 1}{sen\ x + (1 + x) \cos x} = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{x\ L\ (1 + x)}}{\mathbf{1 - \cos x}} = \mathbf{2}}$

44. RESOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0} \left[tg \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/sen\ x} = 1^{\infty} = A$$

$$L\ A = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{sen\ x}\ L\ tg \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \infty \cdot 0 =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{L\ tg \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{sen\ x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{tg\ (x + \pi/4)} \cdot sec^2\ (x + \pi/4)}{\cos x} = 2$$

$$L\ A = 2 \Rightarrow A = e^2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\lim_{x \to 0} \left[\mathbf{tg} \left(\mathbf{x} + \frac{\pi}{\mathbf{4}}\right)\right]^{1/sen\ x} = \mathbf{e^2}}$

45. RESOLUCIÓN

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\ !}\ x + \frac{f''(0)}{2\ !}\ x^2 + \frac{f'''(0)}{3\ !}\ x^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\ !}\ x^n$$

$$P\ (x) = 1 + \frac{-1}{1\ !}\ x + \frac{1}{2\ !}\ x^2 + \frac{-1}{3\ !}\ x^3 + \frac{1}{4\ !}\ x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n\ !}\ x^n$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = e^{-x} \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -e^{-x} \longrightarrow f'(0) = -1$

$f''(x) = e^{-x} \longrightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = -e^{-x} \longrightarrow f'''(0) = -1$

$f^{IV)}(x) = e^{-x} \longrightarrow f^{IV)}(0) = 1$

$f^{V)}(x) = -e^{-x} \longrightarrow f^{V)}(0) = -1$

. . . .

$f^{n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \longrightarrow f^{n)}(0) = (-1)^n$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{P\ (x) = 1} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1\ !}} + \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2\ !}} - \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3\ !}} + \frac{\mathbf{x^4}}{\mathbf{4\ !}} + \cdots + (\mathbf{-1})^n\ \frac{\mathbf{x^n}}{\mathbf{n\ !}}}$

46. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\ !}\ x + \frac{f''(0)}{2\ !}\ x^2 + \frac{f'''(0)}{3\ !}\ x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\ !}\ x^n + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)\ !}\ f^{n+1)}(\theta x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\ !} + \frac{x^2}{2\ !} + \frac{x^3}{3\ !} + \frac{x^4}{4\ !} +$$

$$+ \cdots + \frac{x^n}{n\ !} + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)\ !}\ e^{\theta x}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \longrightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \longrightarrow f'''(0) = 1$

$f^{IV)}(x) = e^x \longrightarrow f^{IV)}(0) = 1$

. . . .

$f^{n)}(x) = e^x \longrightarrow f^{n)}(0) = 1$

$f^{n+1)}(x) = e^x \longrightarrow f^{n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{e^x = 1} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1\ !}} + \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2\ !}} + \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3\ !}} + \frac{\mathbf{x^4}}{\mathbf{4\ !}} + \cdots + \frac{\mathbf{x^n}}{\mathbf{n\ !}} + \frac{\mathbf{x^{n+1}}}{\mathbf{(n + 1)\ !}}\ \mathbf{e^{\theta x}}}$

47. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\ !}\ (x - a) + \frac{f''(a)}{2\ !}\ (x - a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{n+1)}[a+\theta\,(x-a)]$$

$$f(x) = f(\pi/4) + \frac{f'(\pi/4)}{1\,!}(x-\pi/4) + \frac{f''(\pi/4)}{2\,!}(x-\pi/4)^2 +$$

$$+ \frac{(x-\pi/4)^3}{3\,!}\cdot\frac{2\,[1+2\,\text{sen}^2\,\alpha]}{\cos^4\alpha}$$

$$\text{tg}\,x = 1 + \frac{2}{1\,!}(x-\pi/4) + \frac{4}{2\,!}(x-\pi/4)^2 +$$

$$+ \frac{(x-\pi/4)^3}{3\,!}\cdot\frac{2\,[1+2\,\text{sen}^2\,\alpha]}{\cos^4\alpha}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = \text{tg}\,x \longrightarrow f(\pi/4) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow f'(\pi/4) = 2$

$f''(x) = \dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos^3 x} \longrightarrow f''(\pi/4) = 4$

$f'''(x) = \dfrac{2\,[1+2\,\text{sen}^2 x]}{\cos^4 x} \longrightarrow f'''(\alpha) = \dfrac{2\,[1+2\,\text{sen}^2\,\alpha]}{\cos^4\alpha}$

$$\alpha = \left[\frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{tg\,x = 1 + 2\,(x-\pi/4) + 2\,(x-\pi/4)^2 + \frac{(x-\pi/4)^3}{6}\cdot\frac{2\,[1+2\,sen^2\,\alpha]}{cos^4\,\alpha}}$$

48. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\,!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{VIII)}(0)}{8\,!}x^8 + \frac{x^9}{9\,!}f^{IX)}(\theta x)$$

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1\,!}x + \frac{-1}{2\,!}x^2 + \frac{0}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{8\,!}x^8 + \frac{-x^9}{9\,!}\,\text{sen}\,\theta x$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = 1$
$f'(x) = -\text{sen}\,x \longrightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(0) = -1$
$f'''(x) = \text{sen}\,x \longrightarrow f'''(0) = 0$
$f^{IV)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{IV)}(0) = 1$
$f^{V)}(x) = -\text{sen}\,x \longrightarrow f^{V)}(0) = 0$
$f^{VI)}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{VI)}(0) = -1$
$f^{VII)}(x) = \text{sen}\,x \longrightarrow f^{VII)}(0) = 0$
$f^{VIII)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{VIII)}(0) = 1$
$f^{IX)}(x) = -\text{sen}\,x \longrightarrow f^{IX)}(\theta x) = -\text{sen}\,\theta x$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \frac{x^8}{8\,!} - \frac{x^9}{9\,!}\,sen\,\theta x}$$

49. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\,!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{VII)}(0)}{7\,!}x^7 + \frac{x^8}{8\,!}f^{VIII)}(\theta x)$$

$$\text{sen}\,x = 0 + \frac{1}{1\,!}x + \frac{0}{2\,!}x^2 + \frac{-1}{3\,!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{-1}{7\,!}x^7 + \frac{x^8}{8\,!}\,\text{sen}\,\theta x$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = \text{sen}\,x \longrightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = -\text{sen}\,x \longrightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x \longrightarrow f'''(0) = -1$
$f^{IV)}(x) = \text{sen}\,x \longrightarrow f^{IV)}(0) = 0$
$f^{V)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{V)}(0) = 1$
$f^{VI)}(x) = -\text{sen}\,x \longrightarrow f^{VI)}(0) = 0$
$f^{VII)}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{VII)}(0) = -1$
$f^{VIII)}(x) = \text{sen}\,x \longrightarrow f^{VIII)}(\theta x) = \text{sen}\,\theta x$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{sen\,x = \frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \frac{x^8}{8\,!}\,sen\,\theta x}$$

50. RESOLUCIÓN

El enunciado es análogo a desarrollar la función:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

en el entorno de $x = 2$.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{n+1)}[a+\theta\,(x-a)]$$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1\,!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2\,!}(x-2)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(2)}{n\,!}(x-2)^2 + \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{n+1)}[2+\theta\,(x-2)]$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 =$$

$$= 1 + \frac{5}{1\,!}(x-2) + \frac{8}{2\,!}(x-2)^2 + \frac{6}{3\,!}(x-2)^3 + 0 + 0 + \cdots$$

NOTA: Este desarrollo es exacto, el polinomio obtenido es idéntico al P(x).

CÁLCULOS AUXILIARES

$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \longrightarrow P(2) = 1$
$P'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \longrightarrow P'(2) = 5$
$P'' = 6x - 4 \longrightarrow P''(2) = 8$
$P'''(x) = 6 \longrightarrow P'''(2) = 6$
$P^{IV)}(x) = 0 \longrightarrow P^{IV)}(2) = 0$
. . . .

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{x^3 - 2x^2 + x - 1 = 1\,(x-2)^0 + 5\,(x-2)^1 + 4\,(x-2)^2 + (x-2)^3}$$

51. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\,!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{n+1)}(\theta x)$$

Como la función $f(x) = L\,x$ no está definida para $x = 0$, no podemos desarrollarla. Por tanto desarrollaremos la función:

$$f(x) = L\,(1+x)$$

$$L\,(1+x) = 0 + \frac{1}{1\,!}x + \frac{-1\,!}{2\,!}x^2 + \frac{2\,!}{3\,!}x^3 + \frac{-3\,!}{4\,!}x^4 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)\,!}{n\,!}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{n+1)}(\theta x)$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = L(1+x) \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1!}{(1+x)^2} \longrightarrow f''(0) = -1!$

$f'''(x) = \dfrac{2!}{(1+x)^3} \longrightarrow f'''(0) = 2!$

$f^{IV)}(x) = \dfrac{-3!}{(1+x)^4} \longrightarrow f^{IV)}(0) = -3!$

$f^{V)}(x) = \dfrac{4!}{(1+x)^5} \longrightarrow f^{V)}(0) = 4!$

. . . .

$f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \longrightarrow f^{n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$f^{n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \longrightarrow f^{n+1)}(\theta x) = \dfrac{(-1)\, n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots}$$
$$\mathbf{\cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}}$$

52. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''[a + \theta(x-a)]$$

$$\text{sen } x = f(\pi/6) + \frac{f'(\pi/6)}{1!}(x - \pi/6) +$$
$$+ \frac{(x-\pi/6)^2}{2!} f''[\pi/6 + \theta(x - \pi/6)]$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = \text{sen } x \longrightarrow f(\pi/6) = 0{,}5$

$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(x) = -\text{sen } x \longrightarrow f''(\alpha) = -\text{sen } \alpha$

$$\alpha = \left[\frac{\pi}{6} + \theta\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{\text{sen } x = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) +}$$
$$\mathbf{+ \frac{-(x-\pi/6)^2}{2} \text{ sen}\left[\frac{\pi}{6} + \theta\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

APLICACIÓN

Calcular, aproximadamente, sen 31°, limitando el cálculo a los dos primeros términos del desarrollo y determinar el límite del error cometido.

I. $\text{sen } x = 0{,}5 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\text{sen } 31° = 0{,}50000 + 0{,}86603\,[0{,}54105 - 0{,}52360]$

SOLUCIÓN I: **sen 31° = 0,51515**

II. $T_n = T_2 = \dfrac{-(x-\pi/6)^2}{2} \text{ sen}[\pi/6 + \theta(x - \pi/6)]$

$\Delta = \dfrac{-(x-\pi/6)^2}{2} \text{ sen } \alpha$

$\Delta \leq \left|\dfrac{-(x-\pi/6)^2}{2}\right| = \dfrac{0{,}01745^2}{2}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{\Delta \leq 0{,}00015}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 31° = 0{,}54105 \text{ rad}$

$x - \dfrac{\pi}{6} = 1° = 0{,}01745 \text{ rad}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \left[\dfrac{\pi}{6} + \theta\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right] \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 30° \leq \alpha \leq 31°$$

53. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''[a + \theta(x-a)]$$

$$\cos x = f(\pi/4) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}(x - \pi/4) +$$
$$+ \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} f''[\pi/4 + \theta(x - \pi/4)]$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = \cos x \longrightarrow f(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(x) = -\text{sen } x \longrightarrow f'(\pi/4) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(\alpha) = -\cos \alpha$

$$\alpha = \left[\frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) -}$$
$$\mathbf{- \frac{(x-\pi/4)^2}{2} \cos\left[\frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

APLICACIÓN

Calcular, aproximadamente, cos 44°, limitando el cálculo a los dos primeros términos del desarrollo y determinar el límite del error cometido.

I. $\cos x \simeq \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\cos 44° \simeq 0{,}70710 - 0{,}70710\,(0{,}76794 - 0{,}78540)$

SOLUCIÓN I: **cos 44° = 0,71950**

II. $T_n = T_2 = \dfrac{-(x-\pi/4)^2}{2} \cos[\pi/4 + \theta(x - \pi/4)]$

$\Delta = \dfrac{-(x-\pi/4)^2}{2} \cos \alpha$

$\Delta \leq \left|\dfrac{(x-\pi/4)^2}{2}\right| = \dfrac{0{,}01745^2}{2}$

SOLUCIÓN II: $\mathbf{\Delta \leq 0{,}00015}$

CÁLCULOS AUXILIARES

$x = 44° = 0{,}76794 \text{ rad}$

$x - \dfrac{\pi}{4} = -1° = -0{,}01745 \text{ rad}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \left[\dfrac{\pi}{4} + \theta\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \end{array}\right\} \Rightarrow 44° \leq \alpha \leq 45°$$

54. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}\,x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\,!}\,x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,f^{n+1)}(\theta x)$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = e^{-2x} \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = (-2)^1\,e^{-2x} \longrightarrow f'(0) = (-2)^1$

$f''(x) = (-2)^2\,e^{-2x} \longrightarrow f''(0) = (-2)^2$

$f'''(x) = (-2)^3\,e^{-2x} \longrightarrow f'''(0) = (-2)^3$

$f^{IV)}(x) = (-2)^4\,e^{-2x} \longrightarrow f^{IV)}(0) = (-2)^4$

$f^{V)}(x) = (-2)^5\,e^{-2x} \longrightarrow f^{V)}(0) = (-2)^5$

. . . .

$f^{n)}(x) = (-2)^n\,e^{-2x} \longrightarrow f^{n)}(0) = (-2)^n$

$f^{n+1)}(x) = (-2)^{n+1}\,e^{-2x} \longrightarrow f^{n+1)}(\theta x) = (-2)^{n+1}\,e^{-2\theta x}$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{e^{-2x} = 1 + \frac{(-2)^1}{1\,!}\,x + \frac{(-2)^2}{2\,!}\,x^2 + \frac{(-2)^3}{3\,!}\,x^3 + \frac{(-2)^4}{4\,!}\,x^4 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n\,!}\,x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,(-2)^{n+1}\,e^{-2\theta x}}$$

55. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}\,x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\,!}\,x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,f^{n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}\,x^3 + \frac{x^4}{4\,!}\,f^{IV)}(\theta x)$$

$$x\,e^x = 0 + \frac{1}{1\,!}\,x + \frac{2}{2\,!}\,x^2 + \frac{3}{3\,!}\,x^3 + \frac{x^4}{4\,!}\,(4 + \theta x)\,e^{\theta x}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = x\,e^x \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = (1 + x)\,e^x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = (2 + x)\,e^x \longrightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = (3 + x)\,e^x \longrightarrow f'''(0) = 3$

$f^{IV)}(x) = (4 + x)\,e^x \longrightarrow f^{IV)}(\theta x) = (4 + \theta x)\,e^{\theta x}$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x\,e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4\,!}\,(4 + \theta x)\,e^{\theta x}}$

56. RESOLUCIÓN

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}\,(x - a) + \frac{f''(a)}{2\,!}\,(x - a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n\,!}\,(x - a)^n$$

$$P(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1\,!}\,(x - 1) + \frac{f''(1)}{2\,!}\,(x - 1)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(1)}{n\,!}\,(x - 1)^n$$

$$P(x) = -2 + \frac{-3}{1\,!}\,(x - 1) + \frac{0}{2\,!}\,(x - 1)^2 + \frac{6}{3\,!}\,(x - 1)^3 + 0 + 0 + \cdots$$

NOTA: Este desarrollo es exacto, el polinomio obtenido es idéntico a la función $y = x^3 - 3x^2$.

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = x^3 - 3x^2 \longrightarrow f(1) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \longrightarrow f'(1) = -3$

$f''(x) = 6x - 6 \longrightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = 6 \longrightarrow f'''(1) = 6$

$f^{IV)}(x) = 0 \longrightarrow f^{IV)}(1) = 0$

. . . .

SOLUCIÓN: $\mathbf{P(x) = -2\,(x - 1)^0 - 3\,(x - 1)^1 + 0\,(x - 1)^2 + (x - 1)^3}$

57. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}\,(x - a) + \frac{f''(a)}{2\,!}\,(x - a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n\,!}\,(x - a)^n + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)}\,f^{n+1)}[a + \theta\,(x - a)]$$

$$f(x) = f(\pi/2) + \frac{f'(\pi/2)}{1\,!}\,(x - \pi/2) + \frac{f''(\pi/2)}{2\,!}\,(x - 2)^2 + \frac{(x - \pi/2)^3}{3\,!}\,f'''[\pi/2 + \theta\,(x - \pi/2)]$$

$$x\cos x = 0 + \frac{-\pi/2}{1\,!}\,(x - \pi/2) + \frac{-2}{2\,!}\,(x - \pi/2)^2 + \frac{(x - \pi/2)^3}{3\,!}\,[-3\cos\alpha + \alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha]$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = x\cos x \longrightarrow f(\pi/2) = 0$

$f'(x) = \cos x - x\,\mathrm{sen}\,x \longrightarrow f'(\pi/2) = -\pi/2$

$f''(x) = -2\,\mathrm{sen}\,x - x\cos x \longrightarrow f''(\pi/2) = -2$

$f'''(x) = -3\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x \longrightarrow f'''(\alpha) = -3\cos\alpha + \alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha$

$$\alpha = \left[\frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

SOLUCIÓN: $\mathbf{x\cos x = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{(x - \pi/2)^3}{6}\,[-3\cos\alpha + \alpha\,sen\,\alpha]}$

58. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}\,(x - a) + \frac{f''(a)}{2\,!}\,(x - a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n\,!}\,(x - a)^n + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)\,!}\,f^{n+1)}[a + \theta\,(x - a)]$$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1\,!}\,(x - 2) + \frac{f''(2)}{2\,!}\,(x - 2)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(2)}{n\,!}\,(x - 2)^n + \frac{(x - 2)^{n+1}}{(n + 1)\,!}\,f^{n+1)}[2 + \theta\,(x - 2)]$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$$

$$= 0 + \frac{0}{1\,!}\,(x - 2) + \frac{0}{2\,!}\,(x - 2)^2 + \frac{6}{3\,!}\,(x - 2)^3 + 0 + 0 + \cdots$$

NOTA: Este desarrollo es exacto, el polinomio obtenido es idéntico al P(x).

CÁLCULOS AUXILIARES

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \longrightarrow P(2) = 0$

$P'(x) = 3x^2 - 12x + 12 \longrightarrow P'(2) = 0$

$P''(x) = 6x - 12 \longrightarrow P''(2) = 0$

$P'''(x) = 6 \longrightarrow P'''(2) = 6$

$P^{IV)}(x) = 0 \longrightarrow P^{IV)}(2) = 0$

. . . .

SOLUCIÓN: $\mathbf{x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0\,(x - 2)^0 + 0\,(x - 2)^1 + 0\,(x - 2)^2 + (x - 2)^3}$

59. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}\,x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n\,!}\,x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,f^{n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}\,x^3 + \frac{x^4}{4\,!}\,f^{IV)}(\theta x)$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} + \frac{-1!/9}{1!}x + \frac{2!/27}{2!}x^2 + \frac{-3!/81}{3!}x^3 + $$
$$+ \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{4!}{(\theta x+3)^5}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Delta = \dfrac{x^4}{(\theta x+3)^5} \\ 0<\theta<1 \\ 0<x<0,5 \end{array}\right\} \Delta < \frac{0,5^4}{3^5} \Rightarrow k = \frac{0,5^4}{3^5}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = \dfrac{1}{x+3} \longrightarrow f(0) = \dfrac{1}{3}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2} \longrightarrow f'(0) = \dfrac{-1!}{9}$

$f''(x) = \dfrac{1\cdot 2}{(x+3)^3} \longrightarrow f''(0) = \dfrac{2!}{27}$

$f'''(x) = \dfrac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4} \longrightarrow f'''(0) = \dfrac{-3!}{81}$

$f^{IV)}(x) = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+3)^5} \longrightarrow f^{IV)}(\theta x) = \dfrac{4!}{(\theta x+3)^5}$

SOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 - \frac{1}{81}x^3 + x^4\frac{1}{(\theta x+3)^5}}$$

60. RESOLUCIÓN

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1)}(\theta x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$$

$$(x+3)\,e^{2x} = 3 + \frac{7}{1!}x + \frac{16}{2!}x^2 + \frac{x^3}{3!}(8\theta x + 36)\,e^{2\theta x}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$f(x) = (x+3)\,e^{2x} \longrightarrow f(0) = 3$

$f'(x) = (2x+7)\,e^{2x} \longrightarrow f'(0) = 7$

$f''(x) = (4x+16)\,e^{2x} \longrightarrow f''(0) = 16$

$f'''(x) = (8x+36)\,e^{2x} \longrightarrow f'''(\theta x) = (8\theta x+36)\,e^{2\theta x}$

SOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{(x+3)\,e^{2x} = 3 + 7x + 8x^2 + \frac{x^3}{6}[8\theta x + 36]\,e^{2\theta x}}$$

ÍNDICE

Índice